[美] G. 伯克霍夫　S. 麦克莱恩著

近世代数概论

下册

王连祥
徐广善　译

民教育出版社

近世代数概论

下册

[美] G. 伯克霍夫
S. 麦克莱恩 著

王连祥
徐广善 译

人民教育出版社

1980 · 北京

近世代数概论

下　册

[美] G.伯克霍夫　S.麦克莱恩　著

王连祥　徐广善　译

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
黄冈报印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 8.75　字数 210,000
1980年7月第1版　1981年2月湖北第1次印刷
印数 00,001—12,500
书号 13012·0491　定价 0.77元

目　录

第九章　线　性　群

§9.1　基底的变换

在矢量空间V中，矢量ξ的坐标依赖于V的基底的选取(见§7.8)，因此，基底的任意变化将引起ξ的坐标的变化．例如，在实平面R^2中，矢量$\beta=4\varepsilon_1+2\varepsilon_2$，按照定义它关于由单位矢量$\varepsilon_1$和$\varepsilon_2$组成的基底的坐标是(4,2)．矢量

$$\alpha_1=2\varepsilon_1,\quad \alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2 \tag{1}$$

也可以构成一组基底，关于这组基底，β可表示成$\beta=\alpha_1+2\alpha_2$．系数1和2是β关于这组新基底的坐标(也就是关于图1所表示的斜角坐标系的坐标)．

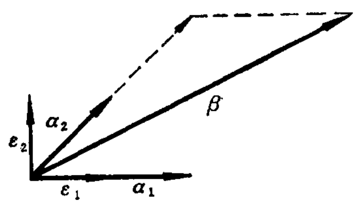

图　1

更一般地，任意矢量ξ关于新基底α_1,α_2的坐标$x_1{}^*,x_2{}^*$可以从ξ的“老”坐标x_1，x_2按下面方法求得．按照定义(§7.8)，这两组坐标是矢量ξ关于两组基底表达式的系数

$$\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2,\quad \xi=x_1{}^*\alpha_1+x_2{}^*\alpha_2.$$

解矢量方程(1)，我们求出ε_1和ε_2

$$\varepsilon_1=\frac{1}{2}\alpha_1,\quad \varepsilon_2=\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1.$$

把ε_1和ε_2的值代入ξ的第一个表达式中，我们得到

$$\xi=x_1\left(\frac{1}{2}\alpha_1\right)+x_2\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1\right)=\frac{1}{2}(x_1-x_2)\alpha_1+x_2\alpha_2.$$

因此 ξ 的新坐标由线性齐次方程

$$x_1^*=\frac{1}{2}(x_1-x_2),\quad x_2^*=x_2 \tag{2}$$

给出. 反过来,老坐标可以通过新坐标表示为

$$x_1=2x_1^*+x_2^*,\quad x_2=x_2^*.$$

在 n 维空间中有类似的关系式. 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是一组给定的基底,这些矢量是按一定次序排列的,而 $\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*$ 是一组新的(有序)基底,那么新基底的每个矢量 α_i^* 可以表示为老基底矢量的线性组合:

$$\alpha_i^*=p_{i1}\alpha_1+\cdots+p_{in}\alpha_n=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\alpha_j,\quad i=1, \cdots, n. \tag{3}$$

表达式(3)可以形式地写成矩阵方程 $\alpha^*=\alpha P^{\tau}$, 这里 P^{τ} 是 P 的转置矩阵, $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha^*=(\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*)$.

这些表达式的系数矩阵 $P=(p_{ij})$ 的第 i 行元素是矢量 α_i^* 的老坐标 $(p_{i1}, \cdots, p_{in})$. 因为矢量 $\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*$ 构成一组基底,所以 P 的所有行是线性无关的,因此 P 是非奇异的(§ 8.6 定理 9). 反过来,如果 $P=(p_{ij})$ 是任意非奇异矩阵, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的任意一组基底,那么用矩阵 P 按公式(3)所确定的矢量 $\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*$ 是线性无关的,因此构成 V 的一组新基底. 这就证明了

定理 1 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是矢量空间 V 的一组基底,那么对每个非奇异矩阵 $P=(p_{ij})$, n 个矢量 $\alpha_i^*=\sum p_{ij}\alpha_j (i=1, \cdots, n)$ 构成 V 的一组新基底,并且 V 的每组基底可以按这种方法恰由一个非奇异矩阵 P 得到.

我们还可以用新基底表示老基底,其方程式是 $\alpha_k=\sum q_{ki}\alpha_i^*$, 其中系数矩阵为 $Q=(q_{ki})$. 如果把用 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 表示的 α_i^* 的值代入这个方程式中,我们就得到

$$\alpha_k=\sum_i q_{ki}\Big(\sum_j p_{ij}\alpha_j\Big)=\sum_j\Big(\sum_i q_{ki}p_{ij}\Big)\alpha_j.$$

可是,α_1, …, α_k 这组矢量用它们本身来表示的话，只有一种表达式，即 $\alpha_k=\alpha_k$. 因此这里 α_j 的系数 $\sum q_{ki}p_{ij}$ 一定是 0 或 1, 它取决于 $k\neq j$ 或 $k=j$. 由于这些系数正好是乘积矩阵 QP 的$(k,\ j)$位置上的元素, 因此 $QP=I$, 所以 $Q=P^{-1}$ 是 P 的逆矩阵.

与此平行的关于坐标变换的结果如下所述:

定理 2 如果矢量空间 V 的基底 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 变换成一组新基底 $\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*$, α_i^* 表示成形式 $\alpha_i^*=\sum_j p_{ij}\alpha_j$, 那么任意矢量 ξ 关于老基底 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 通过齐次线性方程组

$$x_j=x_1^*p_{1j}+\cdots+x_n^*p_{nj}=\sum_{i=1}^n x_i^*p_{ij} \tag{4}$$

可以确定 ξ 关于基底 $\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*$ 的新坐标 $x_1^*, \cdots, x_n^*$.

证明 按照定义(§ 7.8), ξ 关于基底 $\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*$ 的坐标 x_1^*, …, x_n^*, 是把 ξ 看作 $\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*$ 的线性组合 $\xi=\sum x_i^*\alpha_i^*$ 时, 表达式中的系数. 把关于 α_i^* 的公式(3) 代入这个表达式中, 便得出

$$\xi=\sum_i x_i^*\Big(\sum_j p_{ij}\alpha_j\Big)=\sum_j\Big(\sum_i x_i^*p_{ij}\Big)\alpha_j.$$

这里每个 α_j 的系数是 ξ 的老坐标 x_j, 因此方程组(4)成立.

方程组(4)还可以写成矩阵形式 $X=X^*P$, 这里 $X=(x_1, \cdots, x_n)$ 是老坐标的行矩阵, $X^*=(x_1^*, \cdots, x_n^*)$ 是新坐标的行矩阵. 因为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*$ 都是基底, 所以 P 是非奇异的, 并且可以利用 X 表示 X^* 为 $X^*=XP^{-1}$.

如果我们把这个矩阵方程同前面已提到的(3)式的矩阵公式 $\alpha^*=\alpha P^\tau$ 进行比较, 便可得到有趣的关系

$$\text{基底: } \alpha^*=\alpha P^\tau,\quad \text{坐标: } X^*=XP^{-1}. \tag{5}$$

第二个方程中的矩阵 P^{-1} 是第一个方程中的矩阵 P^{T} 的转置逆矩阵.(有时把这些叙述概括成:坐标变换是基底变换的转置逆变换.)

习 题

1. 设 T 是把通常的单位矢量 ε_i(在 V_2 或 V_3 中)变换到下面指定的矢量 α_i. 求出相应的用老坐标表示新坐标的方程,和用新坐标表示老坐标的方程. 对情况(a)和(b)画出图来.

(a) $\alpha_1=(1,1)$, $\alpha_2=(1,-1)$.

(b) $\alpha_1=(2,3)$, $\alpha_2=(-2,-1)$.

(c) $\alpha_1=(1,1,0)$, $\alpha_2=(1,0,1)$, $\alpha_3=(0,1,1)$.

(d) $\alpha_1=(i,1,i)$, $\alpha_2=(0,1,i)$, $\alpha_3=(0,i,1)$, 这里 $i^2=-1$.

2. 如果新基底 $\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*$ 是通过形为 $\alpha_i=\sum\limits_j q_{ij}\alpha_j^*\ (i=1,\cdots,n)$ 的方程组间接给出,算出相应的坐标变换的方程.

3. 给出平面上坐标轴旋转 θ 角的坐标变换的方程.

§9.2 相似矩阵与特征矢量

矢量空间 V 的线性变换 $T:V\to V$, 可以用各种不同的矩阵来表示,这些矩阵依赖于 V 的基底(坐标系)的选择. 比如,在平面上,由 $\varepsilon_1\longmapsto 3\varepsilon_1$, $\varepsilon_2\longmapsto -\varepsilon_1+2\varepsilon_2$ 定义的变换,它在 $\mathbf{R}^2$ 的普通坐标系中可用矩阵 A 表示出来,矩阵 A 的行是 ε_1 和 ε_2 的变换式的坐标,如下所示:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

但是对于 §9.1 中所讨论的新基底 $\alpha_1=2\varepsilon_1$, $\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, 上述变换便是 $\alpha_1\longmapsto 3\alpha_1$, $\alpha_2\longmapsto 2\alpha_2$; 因此它就可以用比较简单的对角矩阵

$$D=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

来表示．我们称这样两个矩阵A和D是相似的．

为了推广这个结果，让我们回想一下，矩阵是怎样表示变换的．取矢量空间V的任意一组(有序)基底α_1，…，α_n和任意线性变换$T:V\to V$．那么基底矢量α_i在T之下的象可以用§8.1公式(9)写成

$$\alpha_i T=\sum_j a_{ij}\alpha_j,\quad A=(a_{ij}).\tag{6}$$

因此，对于基底$\alpha=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，$T$用$n\times n$矩阵$A$表示．这个关系也可以通过坐标来表示．设$\xi=\sum x_i\alpha_i$是$V$的一个矢量，它对于基底$\alpha$的坐标是$n$-数组$X=(x_1,\cdots,x_n)$．那么象$\eta=\xi T$是

$$\begin{aligned}\xi T&=(\sum x_i\alpha_i)T=\sum x_i(\alpha_i T)\\&=\sum_i\sum_j x_i a_{ij}\alpha_j=\sum_j\left(\sum_i x_i a_{ij}\right)\alpha_j.\end{aligned}$$

而η的坐标y_j恰好是α_j的系数，所以

$$y_j=\sum_i x_i a_{ij},$$

η的坐标矢量Y恰好是矩阵乘积$Y=XA$．简明地写出就是

$$\begin{aligned}&Y=XA,\ \text{其中}X\text{是}\xi\text{关于}\alpha\text{的坐标},\\&\qquad Y\text{是}\eta=\xi T\text{关于}\alpha\text{的坐标}.\end{aligned}\tag{7}$$

两个等价的命题(6)和(7)都意味着，对于基底α，变换T可用矩阵A来表示．

现在设α_1^*，…，α_n^*是另一组基底．那么根据定理1，新基底可以用一个$n\times n$非奇异矩阵P通过老基底来表示，如(3)所示；再根据定理2，ξ和ξT的新坐标可以通过老坐标给出，表示成$X^*=XP^{-1}$和$Y^*=YP^{-1}$．那么由(7)有

$$Y^*=YP^{-1}=XAP^{-1}=X^*(PAP^{-1}).$$

因此再根据(7)，在新坐标系下表示变换T的矩阵B具有形式

PAP^{-1}. 等价关系 $B=PAP^{-1}$ 在形式上很象群中的共轭元素的关系(§6.12). 在矩阵代数中, 这是很重要的, 称它为相似关系.

定义 元素在域 F 中的两个 $n\times n$ 矩阵 A 和 B(在 F 上)相似当且仅当在 F 上有一个 $n\times n$ 非奇异矩阵 P 使得 $B=PAP^{-1}$.

上述讨论就证明了

定理 3 域 F 上的两个 $n\times n$ 矩阵 A 和 B, 对于(通常)不同的坐标系表示 F 上 n 维矢量空间 V 的同一个线性变换 $T: V\to V$, 当且仅当矩阵 A 和 B 是相似的.

我们还可以更清楚地把这个定理重述如下:

定理 3′ 假设对于 V 的基底 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 线性变换 $T: V\to V$ 用矩阵 A 来表示, 设 $P=(p_{ij})$ 是非奇异矩阵, $\alpha_i{}^*=\sum\limits_j p_{ij}\alpha_j$ 是 V 的相应的新基底, 那么对于新基底, T 就用矩阵 PAP^{-1} 来表示.

对角矩阵的代数运算特别容易: 任意两个对角矩阵相加(或相乘), 只是把相应的对角线元素相加(或相乘). 由于这个以及其他理由, 考查什么样的矩阵同对角矩阵相似, 考查哪些成对的对角矩阵彼此是相似的, 这是非常重要的. 这些问题的回答包含了特征矢量和特征根的概念, 这两个概念也称为本征矢量和本征值.

定义 线性变换 $T: V\to V$ 的特征矢量是 V 中满足条件 $\xi T=c\xi$ 的一个非零矢量 ξ, 这里 c 是某一标量; T 的特征值是满足 $\xi T=c\xi$ 的标量 c, 这里 ξ 是某一非零矢量. 相应地, 方阵 A 的特征矢量和特征值是满足 $XA=cX$ 的矢量 $X=(x_1, \cdots, x_n)$ 和标量 c. T(或 T_A)的所有特征值的集合称为 T 的谱.

这样, T 的每个特征矢量 ξ 确定一个特征值 c, 并且每个特征值至少属于一个特征矢量. 因为相似矩阵对应着不同基底下的同一个线性变换, 所以相似矩阵具有同样的特征值. 显然, 如果矢量 $X\neq 0$ 对某一标量 c 满足 $XA=cX$, n 维矢量 X 就是 $n\times n$ 矩阵 A

的特征矢量. 如果矩阵 $B=PAP^{-1}$ 相似于 A, 那么 $(XP^{-1})B=XP^{-1}PAP^{-1}=c(XP^{-1})$, 所以 XP^{-1} 是 B 的属于同一特征值 c 的特征矢量. 还应注意,特征矢量乘上任意非零标量还是特征矢量.

特征矢量与对角矩阵之间的联系由下面定理给出.

定理 4 一个 $n\times n$ 矩阵 A 与一个对角矩阵 D 相似当且仅当 A 的特征矢量张成 F^n; 如果 A 与 D 相似, 那么 A 的特征值就是 D 的对角线元素.

特别是, 这个定理意味着, 对角矩阵的特征值是对角线上的元素.

证明 首先假定矩阵 A 与对角矩阵 D 相似, D 的对角线元素是 $d_1, \cdots, d_n$. 那么单位矢量 $\varepsilon_1=(1, 0, \cdots, 0), \cdots, \varepsilon_n=(0, \cdots, 0, 1)$ 是 D 的特征矢量, 这是因为 $\varepsilon_1D=d_1\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_nD=d_n\varepsilon_n$. 还有, 对角线元素 $d_1, \cdots, d_n$ 是 D 的相应的特征值, 因此也是 A 的特征值. $d_1, \cdots, d_n$ 是唯一的一组特征值, 因为设 $X=(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$ 是 D 的任意特征矢量, 那么对某一适当的特征值 c 有 $XD=cX$. 而 $XD=(d_1x_1, \cdots, d_nx_n)$, 所以对所有的 i 有 $d_ix_i=cx_i$. 因为有某个 $x_i\neq 0$, 所以就证明了对这个 i, 有 $d_i=c$, 于是特征值 c 确实是某个 d_i.

反过来, 假设 A 存在足够的特征矢量张成整个空间 F^n, T_A 是 F^n 上相应的线性变换, 那么(§7.4 定理 4 的推论 2), 我们可以取出特征矢量的一个子集合 $\beta_1, \cdots, \beta_n$, 它构成 F^n 的一组基底. 因为每个 β_i 是特征矢量, 所以有 $\beta_1T_A=c_1\beta_1, \cdots, \beta_nT_A=c_n\beta_n$, 其中 $c_1, \cdots, c_n$ 是一组特征值. 因此, 对于基底 $\beta_1, \cdots, \beta_n$, T_A 可以用对角矩阵 D 象公式(6)那样表示, 这里 D 的对角线元素是 $c_1, \cdots, c_n$, 所以 A 与这个矩阵 D 相似.

推论 如果矩阵 P 的行是 $n\times n$ 矩阵 A 的 n 个线性无关的特征矢量, 那么 P 是非奇异的, 并且 PAP^{-1} 是对角矩阵.

证明 我们给出 n 个线性无关的 n 维矢量 $X_1, \cdots, X_n$, 它们是

A 的特征矢量，所以对特征值 $c_1, \cdots, c_n$，有 $X_iA=c_iX_i$，$i=1, \cdots, n$. 以 $X_1, \cdots, X_n$ 为行的矩阵 P 是非奇异的，因为它所有的行是线性无关的. 根据分块矩阵乘法法则有

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} A=\begin{pmatrix} c_1X_1 \\ \vdots \\ c_nX_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

这就表明 $PA=DP$，因此 $PAP^{-1}=D$，这里 D 是以 $c_1, \cdots, c_n$ 为对角线元素的对角矩阵. 事实上，矩阵 P 恰好是定理 4 的直接证明中对基底变换所需要的矩阵. 证毕

另一方面，存在着与任意对角矩阵都不相似的矩阵(参看下面习题 5).

为了明显地构造出与已知矩阵相似的对角矩阵(如果它存在的话)，我们要找出特征值和特征矢量. 根据下面的考虑，特征值和特征矢量的求法可以大大简化.

如果标量 λ 是 $n\times n$ 矩阵 A 的特征值，I 是 $n\times n$ 单位矩阵，那么 $XA=\lambda X=\lambda XI$，因此对某个非零 n 维矢量 X 有 $X(A-\lambda I)=O$. 于是以 $A-\lambda I$ 为系数矩阵的 n 个齐次线性方程组有非平凡解；因此根据 § 8.6 定理 9 的推论 1，我们有

定理 5 标量 λ 是矩阵 A 的特征值当且仅当矩阵 $A-\lambda I$ 是奇异的.

例如，不难看出，2×2 矩阵

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \tag{9}$$

是奇异的当且仅当

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0. \tag{10}$$

(这只表明 $A-\lambda I$ 的行列式等于零.)因此，我们通过求解这个方程求出所有的特征值. 而且，对每个根 λ 至少有一个特征矢量，这

可以通过求解方程组

$$x_1a_{11}+x_2a_{21}=\lambda x_1,$$
$$x_1a_{12}+x_2a_{22}=\lambda x_2$$

而得到.

例 求与矩阵$\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$相似的对角矩阵.

多项式(10)是 $\lambda^2+4\lambda-5$. 这个多项式的根是 1 和 -5; 因此特征矢量满足齐次方程组

$$\begin{matrix}-3x+2y=x\\ 4x-y=y,\end{matrix}\quad 或\quad \begin{matrix}-3x+2y=-5x\\ 4x-y=-5y.\end{matrix}$$

解这两个方程组, 我们得到特征矢量$(1,2)$和$(1,-1)$. 用这两个矢量作新的基底,上述变换的矩阵就呈现对角形. 根据定理 3′, 新的对角矩阵可以写成矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}.$$

习　　题

1. 证明: 方程 $2x'=(1+b)x+(1-b)y$, $2y'=(1-b)x+(1+b)y$, 表示一个关于通过原点与 x 轴成 $45°$ 角的直线的压缩. 计算这个变换的特征值和特征矢量,并说明它们的几何意义.

2. 计算下列在复数域上的矩阵的特征值和特征矢量:

(a) $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}$,　　(b) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$,　　(d) $\begin{pmatrix}-1 & 2i\\ -2i & 2\end{pmatrix}$.

3. 对习题 2 所给出的每个矩阵 A, 如果可能的话, 求出非奇异矩阵 P, 使得 PAP^{-1} 是对角矩阵.

4. (a) 求出表示转过 θ 角的平面旋转的矩阵的复特征值.

(b) 证明: 表示转过 θ 角$(0<\theta<\pi)$ 的平面旋转的矩阵不能同任意实

对角矩阵相似.

5. 证明: 当 $c\neq 0$, 矩阵 $\begin{pmatrix}1 & c\\0 & 1\end{pmatrix}$ 不能同任意实的或复的对角矩阵相似. 从几何上说明这个结果.

6. 证明: 2×2 矩阵 A 的特征矢量的斜率 γ 满足二次方程 $a_{21}\gamma^2+(a_{11}-a_{22})\gamma-a_{12}=0$.

7. 证明: 属于已知矩阵的固定特征值的所有特征矢量的集合构成一个子空间, 这时假定 $\mathbf{0}$ 包含在这些特征矢量中.

8. 证明: 非标量矩阵的任意 2×2 实对称矩阵有两个不同的实特征矢量.

9. (a) 证明: 两个 $m\times n$ 矩阵 A 和 B 是等价的当且仅当它们对于 m 维矢量空间 V 与 n 维矢量空间 W 的两组不同基底表示同一个从 V 到 W 的线性变换 $T:V\to W$.

(b) 按照这种看法, 解释 § 8.9 定理 18.

*10. 设 A 和 B 都与对角矩阵相似. 证明: $AB=BA$ 当且仅当 A 与 B 具有共同的特征矢量基底(Frobenius).

*11. (a) 证明: 如果 $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ 与一个正交矩阵相似, 那么 $ad-bc=\pm 1$. (正交矩阵的定义见 § 9.4.)

(b) 证明: 如果 $ad-bc=1$, 那么 A 与正交矩阵相似当且仅当 $A=\pm I$, 或 $-2<a+d<2$.

(c) 证明: 如果 $ad-bc=-1$, 那么 A 与正交矩阵相似当且仅当 $a+d=0$.

§ 9.3 全线性群与仿射群

n 维矢量空间 F^n 的所有非奇异线性变换构成一个群, 因为这样的变换的乘积和逆变换还是线性的和非奇异的(§ 8.6 定理 9). 这个群称为全线性群 $L_n=L_n(F)$. 在线性变换同矩阵的一一对应中, 线性变换的乘积对应着矩阵的乘积, 所以全线性群与元素属于域 F 的所有 $n\times n$ 非奇异矩阵构成的群同构.

全体平移构成另一重要的群. 平面上的平移是把平面上的所有点沿着某一指定的方向移动同样一段距离. 移动的距离和方向可以用矢量κ表示,κ具有适当的大小和方向,那么平移把每个矢量ξ的端点移到矢量$\xi+\kappa$的端点. 在空间F^n中, 平移是变换$\xi\longmapsto\xi+\kappa$,其中κ是固定矢量. 对任意坐标系,平移后的矢量的坐标是$y_1=x_1+k_1, \cdots, y_n=x_n+k_n$, 这里$k_i$是矢量$\kappa$的坐标. 平移$\xi\longmapsto\eta=\xi+\kappa$与$\eta\longmapsto\zeta=\eta+\lambda$的乘积是通过代入而得, 它是平移$\xi\longmapsto\zeta=\xi+(\kappa+\lambda)$. 这恰好对应于矢量$\kappa$与$\lambda$的和. 类似地, 平移$\xi\longmapsto\xi+\kappa$的逆是$\eta\longmapsto\eta-\kappa$. 于是我们就证明了凯莱定理(§ 6.5 定理 8)的特殊情形:

定理 6 F^n的所有平移$\xi\longmapsto\xi+\kappa$构成一个阿贝耳群, 这个群与F^n的全体矢量κ的加法群同构.

线性变换T后面再跟随一个平移,就得到变换

$$\xi\longmapsto\eta=\xi T+\kappa \quad (T\text{ 是线性变换}, \kappa\text{ 是固定矢量}) \tag{11}$$

任意一个这种形式的变换称为F^n的一个仿射变换H. 仿射变换包括线性变换(当$\kappa=0$)和平移(当$T=I$). 如果仿射变换(11)后面跟随第二个仿射变换$\eta\longmapsto\eta U+\lambda$,则它们的乘积是

$$\xi\longmapsto(\xi T+\kappa)U+\lambda=\xi(TU)+(\kappa U+\lambda). \tag{12}$$

其结果还是仿射变换, 因为$\kappa U+\lambda$是F^n的一个固定矢量. 每个平移是一一的,也是映上的,因此它有逆. 所以仿射变换(11)是一一映上的当且仅当它的线性部分是一一的. 因此仿射变换(11)的逆是仿射变换$\eta\longmapsto\xi=\eta T^{-1}-\kappa T^{-1}$,这可通过公式(11)解出$\xi$而得到. 这就证明了

定理 7 F^n的所有非奇异仿射变换的集合构成一个群, 称为仿射群$A_n(F)$. 全线性群和平移群是它的子群.

仿射变换对于基底的方程是什么? 线性部分T产生矩阵$A=(a_{ij})$; 平移矢量按坐标写成行矢量$K=(k_1, \cdots, k_n)$. 于是仿射变