第二分册目次

第一章　複變數函數論的基礎

1. 複變數函數　在講微積分的時候，我們假定自變數和他的函數都祇取實數值。進之，當我們考察最初等的函數，即多項式，以作研究高等代數的基礎時，便要討論到自變數取複數值時的情形了。本章的目的就是要把解析學的基礎推廣到複變數函數的情形。

例如取一多項式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,$$

其中 a_k 都是已知的複數。假如我們現在讓自變數 z 也能取任意的複數值的話，那末對於 z 的任何複數值，函數 $f(z)$ 就是有意義的。相仿的，對有理函數

$$\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m},$$

或具有根號的函數，如　$\sqrt{z-1},$

都可以這樣去解釋他。

在第一卷第六章裏我們曾定義了一些當自變數取複數值時的初等超越函數。即對於指數函數有：

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)。$$

藉這樣定義的指數函數又可以定義複變數的三角函數

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};$$

(1) $$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{i2z}-1}{e^{i2z}+1};$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{i2z}+1}{e^{i2z}-1}。$$

再回憶複數的自然對數的定義：

(2) $$\lg z = \lg|z| + i\arg z,$$

其中$|z|$是z的模，$\arg z$是z的幅角。藉此考慮（1）式中諸函數的反函數，就引向復變數的反三角函數

$$\arcsin z,\quad \arccos z,\quad \operatorname{arctg} z,\quad \operatorname{arcctg} z。$$

不難說明，這些函數能夠通過對數來表達。

例如，置 $$z = \operatorname{tg} w = \frac{e^{i2w}-1}{i(e^{i2w}+1)},$$

則 $$i(e^{i2w}+1)z = e^{i2w}-1,$$

或 $$e^{i2w} = \frac{1+iz}{1-iz}。$$

分子分母同以i乘，再取對數，得

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\lg\frac{i-z}{i+z}。$$

完全一樣，如令 $$z = \sin w = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i},$$

則得e^{iw}的二次方程 $$e^{2iw}-2iz\,e^{iw}-1=0,$$

因此 $$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1-z^2},$$

從而 $$w = \frac{1}{i}\lg(iz \pm \sqrt{1-z^2}),$$

這裏根號應當取正負兩種數值。

以後就會看到，所有上述這些複變數的初等函數都有導數，且這些

導數也是複變數函數。就是說,對這些函數,比率

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

當複改變量 Δz 趨向零時有一定的極限值。這一章的全部就在替有導數的複變數函數的理論奠一個基礎。我們將會看到這套理論一方面是以非常嚴格和簡潔著稱,而另一方面在許多自然科學和專門技術的部門中又有他廣大的應用。本章中先說他的理論的大概,在以後各章裏面再講他的應用。我們希望用這辦法可以達到比較嚴格和簡潔的行文。

以後我們常要用到複數的幾何解釋法,還早在[I, 170]中已講過。現在再略述其中的一些基本概念。在平面中取直角坐標軸 OX 和 OY,那末對平面上每點就可以兩個實數坐標 (x, y) 或一個複數坐標 $x+iy$ 和他對應,後者是我們以後要用的。在這意義下,平面稱爲複平面,X 軸稱爲實軸,Y 軸稱爲虛軸。對於複數除了這種點的解釋法以外,在以後各章中我們主要地還要用到一種向量的解釋法,那就是對於複數 $x+iy$ 以一個在兩坐標軸方向的支量爲 x 及 y 的向量和他對應。這兩種解釋之間的關係是很顯然的。即如從原點到 $x+iy$ 點引一向量,那末他就是對應於複數 $x+iy$ 的向量了。一般,如平面上一向量的起點 A 的坐標是 a_1+ia_2,終點 B 的坐標是 b_1+ib_2,則向量 $\overline{AB}$ 所對應的複數就等於終點坐標與起點坐標之差,即

$$(b_1-a_1)+i(b_2-a_2)。$$

關於複數的加減乘除,可以參看[I, 170 和 172]。兩個複數的和所對應的向量是各個複數所對應的向量的和。複數的模就是他所對應的向量的長度,幅角就是這向量和 X 軸的交角。當複變數 z 變動時,對應點也就在平面上移動。

我們稱 $z=x+iy$ 趨向極限 $\alpha=a+ib$，這裏 a 和 b 是常數，假如 z 和 α 之差的模

$$|\alpha-z|=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$$

趨向零。

因爲上式根號裏面兩項都是正的，故知 $|\alpha-z|\to 0$ 實與

$$x\to a,\quad y\to b$$

兩式相抵。因之　　$x+iy\to a+ib$

也就和　　$x\to a,\quad y\to b$

兩式相抵了。

由此顯然可見坐標爲 $z=x+iy$ 的變動點 M 趨向坐標爲 $\alpha=a+ib$ 的固定點 A 的意義實與通常平面上一點趨向其極限位置的意義符合。不難證明普通關於極限之加減乘除的定理對複變數也一樣成立，這我們不想詳細說了。

又由上述極限的定義容易知道 $z\to 0$ 和 $|z|\to 0$ 相抵。如果 $z\to\alpha$，則 $|z|\to|\alpha|$。

對複變數，勾犀判別極限存在的準則也成立。例如設

$$z_1=x_1+iy_1;$$

$$z_2=x_2+iy_2;\ \cdots;$$

$$z_n=x_n+iy_n;\ \cdots$$

爲一複數敍列。這敍列極限的存在和兩實數敍列 x_n 與 y_n 的極限都存在相抵。但後兩極限存在的充要條件是：對所有充分大的 n 和 m，$|x_n-x_m|$ 和 $|y_n-y_m|$ 可任意小。參看[I, 31]。

但由　　$$|z_n-z_m|=\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2}$$

及根號裏面兩項皆爲正，可知 z_n 的極限存在的充要條件是：對所有充分大的 m 和 n，$|z_n-z_m|$ 可任意小。嚴格些說就是：對任一已給正數 ε，

存在一正整數 N，使 $|z_n-z_m|<\varepsilon$，祇要 n 和 m 都大於 N。一般，複變數 z 的行程不一定是如上所設的可數點集。那末我們應該仿照[I, 25]一樣在 z 的全部行程中定出一個次序來。而極限存在的充要條件就可以這麼說：對任一已給正數 ε，存在 z 之一值 z_0，使得 $|z'-z''|<\varepsilon$，祇要 z' 和 z'' 是任意兩個在 z_0 後面的 z 的值。又以後我們稱複變數 z 趨向無限，如果 $|z|\to+\infty$。

現在我們回過來看複變數函數

$$w=f(z),$$

並約定幾個名詞。函數 $f(z)$ 可以在整個複平面上都有定義，也可以祇在平面上某一區域內有定義，如圓，長方形，環，等等之內。在所有這些區域裏面，我們可以區別他的內點和境界點。例如當這區域是以原點做中心的單位圓時，其內點就是滿足條件

$$|z|<1 \quad 或 \quad x^2+y^2<1$$

的點的全體。境界點的全體就是圓周

$$|z|=1 \quad 或 \quad x^2+y^2=1。$$

區域的內點的特徵是：不但他們自己，並且他們有一個鄰域全部屬於這個區域。換句話說，一點 M 是某區域的內點，假如有一個以 M 做中心的很小的圓全部屬於此區域的話。區域的境界點雖然不是他的內點，但在其任意小的鄰域中一定有區域的內點存在。此外，還要規定我們的區域並不分為許多分開的小塊(區域之連通性)。換言之，我們將常假定區域中任何兩點都可以用一條線連接起來，這條線上面的點全部屬於這個區域。依照慣例，以後我們用到區域這兩字時，就祇指他的內點的全體。如果連境界點也在內的話，我們就稱他做閉區域。此外，如一區域中所有的點和原點的距離都小於一個有限數，則此區域稱為有界。關於區域的其他特徵將在以後補充。

現在再回頭來考察函數 $w=f(z)$。假設這函數係在某一區域 B 的內部所定義,卽對 B 內部任一點 z, $f(z)$ 必有一定的複數值(我們祇說單值函數)。設 z_0 爲 B 中一點,如果當 $z\to z_0$ 時, $f(z)\to f(z_0)$, 則稱函數 $f(z)$ 在 z_0 爲連續。這就是說,對任一已給正數 ε, 存在一正數 η, 使當 $|z-z_0|<\eta$ 時有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$。若 $f(z)$ 在 B 中每一點都連續,則稱他在 B 中連續。函數 $f(z)$ 有時不但可在 B 中有定義,並且也可以在 B 的境界線 l 上有定義,卽 $f(z)$ 在閉區域 B 中有定義。這時若 $f(z)$ 在閉區域 B 中每一點都連續,則稱 $f(z)$ 在閉區域 B 中爲連續。當定義函數在境界線 l 上一點 z_0 的連續性時,須注意這時 z 可以用任何方式趨向 z_0, 但不能離開閉區域 B。和實變數一樣,[I, 43]的定理仍成立:若 $f(z)$ 在閉有界區域中爲連續,則在這區域中必爲一致連續。就是說,對任一已給正數 ε, 存在一正數 η(對全區域祇有一個),使當 $|z_1-z_2|<\eta$ 時, $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$, 這裏 z_1 和 z_2 是閉區域中任意兩點。

把 z 和 $w=f(z)$ 分寫做實數部份和虛數部份:

$$z=x+iy;$$

$$w=f(z)=u+iv\text{。}$$

給 z 一值就是給 x 和 y 各一值,給 $f(z)$ 一值就是給 u 和 v 各一值,因此 u 和 v 必定是 x 和 y 的函數:

$$w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)\text{。}\tag{3}$$

對於初等函數,祇須用簡單的運算就可把實數部份和虛數部份分開。例如:

$$w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy\text{。}$$

設 $z_0=x_0+iy_0$, 由前知 $z\to z_0$ 與 $x\to x_0$, $y\to y_0$ 兩式相抵。

如果函數在 z_0 點爲連續,那末當 $z\to z_0$ 時,卽 $x\to x_0$, $y\to y_0$ 時,應有

$$f(z)\to f(z_0),$$

或　$$u(x, y)+iv(x, y)\to u(x_0, y_0)+iv(x_0, y_0),$$

這和
$$u(x, y)\to u(x_0, y_0)$$
$$v(x, y)\to v(x_0, y_0)$$

兩式相抵。因此知道$f(z)$在z_0點爲連續與$u(x, y)$, $v(x, y)$在(x_0, y_0)點爲連續相抵。

把函數分開做實數部份和虛數部份，再用初等實函數的連續性質，我們可以證明多項式，e^z, $\sin z$, $\cos z$等都是全平面上的連續函數。有理分式也是處處連續，除了那些使他的分母爲零的點以外。

要講更進一步的理論，我們得先講單值函數，以後再特別考慮多值函數的問題。多值函數例如$\sqrt{z-1}$, $\lg z$以及反三角函數等都是。

2. 導數　假設$f(z)$在z點和他的某一鄰域內已有定義。導數$f'(z)$我們已經照常例定義做比率

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{4}$$

的極限。這時極限值須是有限。並且不論複改變量Δz依照什麼規律趨向零，極限值常爲一定。

和實變數的情形一樣，不難證明求導數時常數因子可以拿到導數符號之外來，並且通常關於和，積，商的微分的定理對複函數也一樣成立[I, 47]。此外，用牛頓二項式公式易證關於指數爲正整數的冪函數的微分規則[I, 47]對複函數也成立：

$$(z^n)'=nz^{n-1}。 \tag{5}$$

這樣我們就可斷言多項式在任何一點z的導數都存在，而有理分式則除在使他的分母爲零之點以外處處有導數。

進之，通常關於複合函數的微分規則也成立：

$$F'_z(w)=F'_w(w)\cdot w'_z。 \tag{6}$$

當然,這時等式右邊兩個導數都要存在。又和實變數一樣,如果$f(z)$在某點的導數存在,那末他在這點必爲連續[I, 45]。

如果函數$f(z)$在某區域B中已有定義,而且在B裏面的每一點都有導數,就簡稱$f(z)$在區域B中有導數。這導數也是B中的單值函數。

現在引進一個新的重要的定義。我們稱$f(z)$在B中爲正則,如果他在B中爲單值而且有連續的導數$f'(z)$。由前所述,可知這時$f(z)$在B中當然爲連續。有時也稱$f(z)$在一點z_0爲正則,這是指$f(z)$在包含z_0的某一區域中爲正則的意思。

回到(3)式,在那裏z和$f(z)$都被分開成實數部份和虛數部份,我們問:函數$u(x, y)$和$v(x, y)$應該滿足什麽條件時,$f(z)$纔能在B中爲正則。現在先假設$f(z)$在B中爲正則,看由此可以引出關於$u(x, y)$和$v(x, y)$的什麽結果來。

我們早已說過,當導數存在時,其值和複改變量$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$趨向零的方式無關。今在$B$中任取一點$M$,坐標爲$z=x+iy$,又取一動點$N$,坐標爲$z+\Delta z=(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)$,且$N$趨向$M$。現在試看$N$趨向$M$的兩種不同方式。第一種方式是:$N$沿一平行於$X$軸的直線趨向$M$。這時有:

$$(7)\qquad \Delta y=0 \quad 而 \quad \Delta z=\Delta x。$$

第二種方式是:N沿一平行於Y軸的直線趨向M。這時有:

$$(8)\qquad \Delta x=0 \quad 而 \quad \Delta z=i\Delta y。$$

現在對這兩種情形來求$f'(z)$。在一般情形我們有:

$$(9)\qquad f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y)]+i[v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x, y)]}{\Delta x+i\Delta y}。$$

因此當 N 照第一種方式趨向 M 時,有:

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,\ y)-v(x,\ y)}{\Delta x}\right]。$$

這樣,等式右邊的實數部份和虛數部份就都應該有極限,就是說,函數 $u(x,\ y)$和 $v(x,\ y)$應該有關於 x 的偏導數,並且下式成立:

$$f'(z)=\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}。\tag{10}$$

同樣,如果 N 照第二種方式趨向 M 的話,則由(8)和(9)應有:

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{i}\left[\frac{u(x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)}{\Delta y}+i\frac{v(x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)}{\Delta y}\right]$$

或

$$f'(z)=\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}。\tag{11}$$

比較(10)和(11)的右邊,就得到 $u(x,\ y)$和 $v(x,\ y)$應滿足的條件:

$$\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y};\tag{12}$$

$$\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}=-\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}。$$

注意:由 $f'(z)$的連續性和(10),(11)兩式可知 $u(x,\ y)$和 $v(x,\ y)$有連續的一階偏導數。由以上的論斷我們得到下面的結果:要 $f(z)$ 在 B 中為正則,必須 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$在 B 中有關於 x 和 y 的連續一階偏導數,並且這些偏導數要滿足(12)式中的兩個關係。

現在再證明這些條件對 $f(z)$在 B 中為正則不但是必要而且也是充分的。為此,我們假定上面的條件已經成立,再來證明 $f'(z)$的存在和連續。由假設 $u(x,\ y)$和 $v(x,\ y)$關於 x 和 y 的一階偏導數都是連續的,所以可寫[I. 68]:

$$u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)=\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

$$v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)=\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y,$$

其中 ε_k 和 Δx, Δy 一齊趨向零。利用上二式求出函數 $f(z)$ 的改變量 $f(z+\Delta z)-f(z)$，代入(4)式得:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

利用(12)式的條件，上式可改寫爲:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\varepsilon_5\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}+\varepsilon_6\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

其中
$$\varepsilon_5=\varepsilon_1+i\varepsilon_3,\quad \varepsilon_6=\varepsilon_2+i\varepsilon_4$$
和 Δz 一齊趨向零。

易知上面的等式右邊最後兩項也趨向於零。例如:

$$\left|\varepsilon_5\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}\right|=|\varepsilon_5|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},$$

右邊第一個因子趨向零，而第二因子不大於一。

這樣我們就有

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}+\varepsilon_7,$$

其中 ε_7 和 Δz 一齊趨向零，而等式右邊前面兩項和 Δz 無關。因此，(4)式的比率就趨向一定的極限，恰如(10)式所定義的一般，而前述條件是 $f(z)$ 在 B 中爲正則的充要條件也就得以證明了。(12)中兩等式通常稱爲勾屈黎曼方程。

其實這兩個方程我們早已經見過，就是在研究理想不可壓縮液體的穩定平面流動時，速度勢和流函數須滿足這兩個方程[II, 74]。因此我們知道複變數函數論的基本方程(12)同時也是研究流體力學的基本方程。基於這事實，複變數函數論在流體力學上有許多的應用，我們在下一章將要講到。

現在再注意一件可以由(12)式導出的重要事實。以後我們將會知道，當$f(z)$為正則時，$u(x, y)$和$v(x, y)$的任何階偏導數都存在。現在先用一用他們的二階偏導數存在這一件事再說。將(12)中第一式對x求偏導數，第二式對y求偏導數，相加得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0。\tag{13_1}$$

同樣由(12)可導出

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0。\tag{13_2}$$

由此可知，正則函數$f(z)$的實數部份和虛數部份都要滿足拉普拉斯方程，這就是說，他們應該都是調和函數。在下一章中我們還要詳細研究複函數論和拉普拉斯方程間的關係。

從(13)還可以導出一件重要的事實，就是如果已知一個正則函數的實數部份，我們可以作出這個函數來。這時$u(x,y)$當然是(13_1)的一個解，我們要證明$v(x, y)$除了一個常數項以外可以唯一決定。其實，由(12)式有：

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

因此

$$v(x, y)=\int^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C，\tag{14}$$

剩下來要證明的，就是上式中線積分的數值和積分道路無關，並且是自己的上限的函數[II, 71]。回憶線積分

$$\int Xdx+Ydy$$

和積分道路無關的條件可寫爲

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}。$$

把這條件用到(14)式的積分上去，得到：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad 或 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

這方程由假設是適合的，因爲我們取 $u(x, y)$爲某一調和函數之故。注意：雖然 $u(x, y)$是單值，但如(14)式的積分所在的區域爲複通區時，$v(x, y)$卻可以是多值的 [II, 72]。

現在舉幾個例子看看。多項式顯然是全平面中的正則函數。有理分式在所有不包含分母的零點❶的區域中也是正則函數。例如，設 $f(z)=z^2$，則 $u(x, y)=x^2-y^2$，$v(x, y)=2xy$。不難證明這兩函數滿足(12)式的條件。

現在再證明指數函數

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$$

是全平面中的正則函數。由上式有：

$$u(x, y)=e^x\cos y; \quad v(x, y)=e^x\sin y;$$

因此就有：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y。$$

這些偏導數都是連續函數，而且滿足(12)式的條件。依照(10)式求導數：

❶函數 $f(z)$的零點就是方程式 $f(z)=0$ 的根(譯者)。

$$(e^z)'=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y),\ 即(e^z)'=e^z。$$

這和具實變數的指數函數的微分規則一樣。現在容易證明 $\sin z$ 和 $\cos z$ 有在全平面上爲連續的導數，並且求導數時的規則也和實變數的情形一樣。實際上，由指數函數和複合函數的微分規則有：

$$(\sin z)'=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)'=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z,$$

$$(\cos z)'=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)'=i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=-\sin z。$$

3. 保角變換　現在我們來說明函數關係和導數這兩個概念的幾何意義。設函數 $f(z)$ 在 (X, Y) 平面中一區域 B 裏面爲正則。對 B 中每一點 z 有一定複數值 $w=f(z)$。對應於 B 中點的全體，這種數值 $w=u+iv$ 的全體充滿另一區域 B_1，我們把他畫在另一複平面 (U, V) 上面（圖 1）。這樣我們就稱函數 $f(z)$ 把區域 B 變成區域 B_1。嚴格些

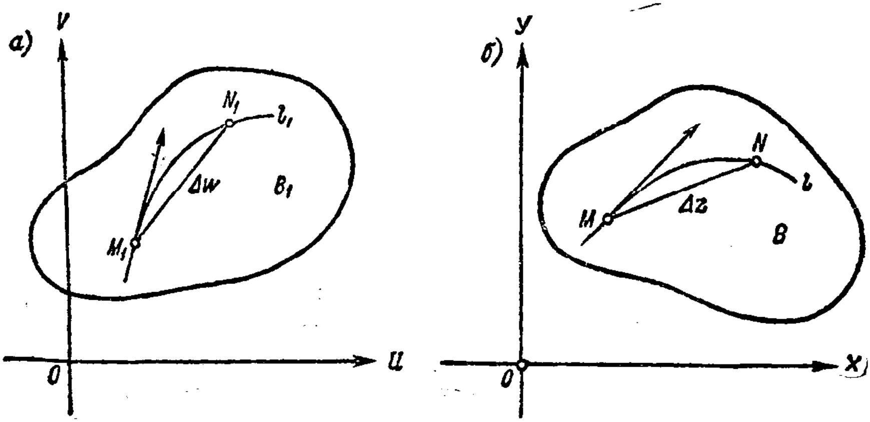

圖 1

說，我們需要更詳細地尋求在變換 $w=f(z)$ 之下兩種點 z 和 w 間的關聯，並證明 w 的全體 B_1 也是平面 (U, V) 上的一個區域。這在以後，等解析學的知識足夠時，我們會詳細去研究他。那時可以證明如果在 z

點 $f'(z)\neq 0$，則以 z 做中心的一個相當小的圓就被 $f(z)$ 變換做 w 平面上一個區域，且以 $w=f(z)$ 這點爲內點。現在我們但講些一般的知識，祇要使讀者能夠了解前述概念的幾何意義就行了。

我們先解釋導數的模和輻角的幾何意義，但假定在我們所觀察的點導數 $f'(z)\neq 0$。設在 B 中任取兩個鄰近點 M 和 N，他們的坐標是 z 和 $z+\Delta z$。設在 B_1 中的對應點是 M_1 和 N_1，坐標爲 w 和 $w+\Delta w$。如果將線段 MN 和 M_1N_1 看成向量的話，他們就表示複數 Δz 和 Δw。這樣，兩向量長度的比就是

$$\frac{|M_1N_1|}{|MN|}=\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}。$$

因爲商的模等於模的商，所以

$$\frac{|M_1N_1|}{|MN|}=\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|。$$

當 N 趨向極限位置 M 時，N_1 亦趨向極限位置 M_1，故得

$$\lim\frac{|M_1N_1|}{|MN|}=|f'(z)|。$$

這就是說，導數 $f'(z)$ 的模代表在 z 點的線性度量經過變換 $f(z)$ 以後所起的變化。例如令 $f(z)=z^2+z+3$，則在 $z=1$ 點的線性度量經過變換 $f(z)$ 以後增大了三倍。

現在再看輻角的幾何意義。設 N 沿一曲線 l 趨向 M，在區域 B_1 中對應於 l 的曲線爲 l_1（圖 2）。複數 Δz 的輻角 $\arg\Delta z$ 就是向量 $\overline{MN}$ 和實軸所成的角，同樣 $\arg\Delta w$ 就是向量 $\overline{M_1N_1}$ 和實軸所成的角。兩輻角之差

$$\arg\Delta w-\arg\Delta z$$

表示向量 $\overline{MN}$ 的方向與向量 $\overline{M_1N_1}$ 的方向所作成的角度，這個角度由向量 MN 逆時針計算。因爲商的輻角等於被除數的輻角減去除數的

輻角，故

$$\arg \Delta w - \arg \Delta z = \arg \frac{\Delta w}{\Delta z}。$$

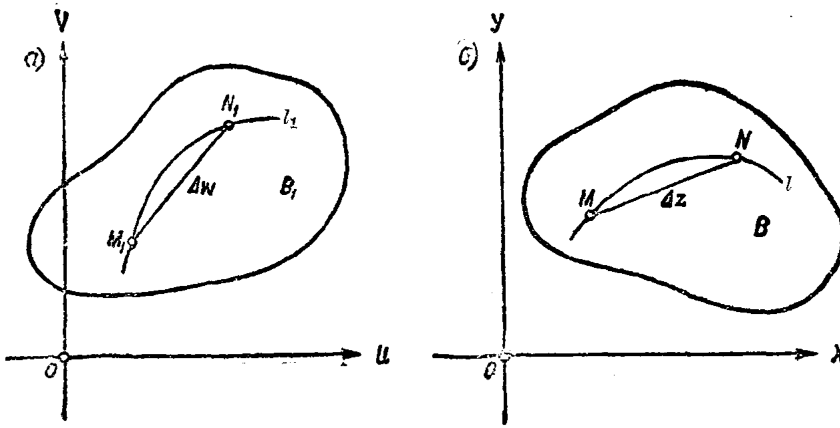

圖　2

當 N 趨向極限 M 時，向量 $\overline{MN}$ 的方向與曲線 l 在 M 點的切線方向重合，同時向量 $\overline{M_1N_1}$ 的方向與曲線 l_1 在 M_1 點的切線方向重合。

因此將前式取極限就知道 $\arg f'(z)$ 代表經過變換 $f(z)$ 以後在一點 z 所生的迴轉角。詳細些說，如果過 z 點畫任意曲線 l，l 在 z 點有一定的切線。設經變換 $f(z)$ 以後，z 的像是 w，l 的像是 l_1，那末 l_1 在 w 點的切線方向可以由 l 在 z 點的切線方向逆時針地轉一角度 $\arg f'(z)$ 而得到。如果區域 B 中任意兩條曲線在其交點 z 有一定的交角，經變換 $f(z)$ 以後，每一曲線在 z 點的切線方向和他們的像在 $w=f(z)$ 點的切線方向間的交角都等於 $\arg f'(z)$，因此 B 中兩曲線在 z 點的交角必等於 B_1 中對應曲線在 w 點的交角。就是說，在每一不使導數爲零之點，正則變換保持角度。這種保持角度的變換我們稱他做保角變換。

如果我們在 XY 平面中的區域 B 裏面取一個曲線網，那末經過變