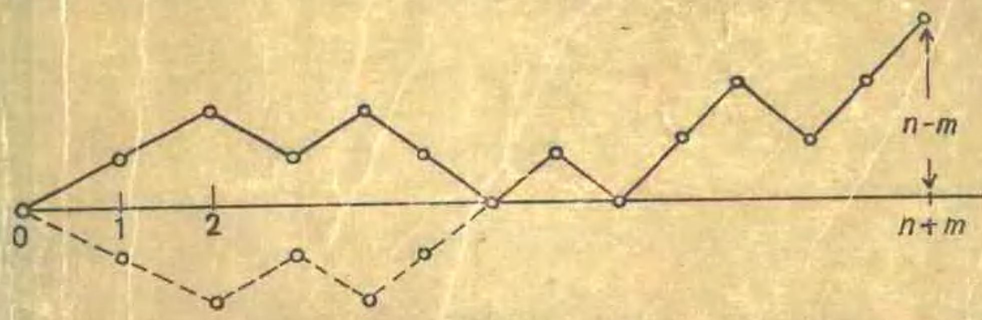
概率论初级教程

[美] 谢尔登·罗斯 著

李漳南　杨振明 译



人民教育出版社

概率论初级教程

[美] 谢尔登·罗斯 著
李漳南　杨振明 译

人民教育出版社

内 容 提 要

本书是一本概率论的入门书。其内容包括组合分析、概率的公理、条件概率与独立性、随机变量、数学期望、极限定理、一些附加课题等。作者精心选择了大量的例题与习题。要求读者具备初等微积分的知识。可供高等院校许多专业的师生教学概率论课程时参考。

概率论初级教程

[美] 谢尔登·罗斯 著

李漳南 杨振明 译

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

咸宁地区印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 10.375 字数 250,000

1981 年 6 月第 1 版 1982 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—21,500

书号 13012·0617 定价 1.30 元

译　序

我们将美国加利福尼亚大学谢尔登·罗斯(Sheldon Ross)著的这本《概率论初级教程》介绍给我国广大读者.

作为一本入门书，本书突出了选材和写法上的通俗性与直观性；作为一本数学教材，它又不失其严密性与准确性．因此，可以期望它既能使初学者较准确地学到概率论的基本概念与方法，又不致苦于较深的数学推导所造成的困难与乏味．正如作者在序言中所说，它可以作为高等院校许多专业(包括数学专业)的概率课教科书，也可供具备初等微积分知识的读者自学参考.

为达到上述目的，作者精心地选择和编排了大量的例题与习题，共计625题，约占全书篇幅的三分之二．在通过例题阐述概率论的基本概念与方法方面，作者的努力是较为成功的．同时，通过这些题目，又反映出概率论在各个方面的广泛应用.

在翻译过程中，对涉及西方社会生活的某些内容，我们努力使之便于我国读者理解，并改正了原书中一些错误．由于水平所限，不妥之处可能不少，恳请广大读者批评指正.

译　者

1980.7

序　言

著名的法国数学家和天文学家("法国的牛顿")皮埃尔·西蒙·拉普拉斯侯爵曾说过："我们发现，概率论实质上仅仅是被归纳为计算问题的常识，它使我们能正确地评价凭某种直觉所感受到的、往往又不能解释清楚的见解的合理性．……值得注意的是，概率论这门起源于机会游戏的科学，终将成为人类知识中最重要的组成部分．……生活中那些最重要的问题绝大部分正是概率问题．"尽管许多人可以认为，这位曾对概率论的发展做出很大贡献的著名侯爵的话有点说过了头，然而，概率论确实已经成为几乎所有的科学家、工程师、开业医生、法学家和实业家手中的一个有力的基本工具．事实上，有知识的人已经习惯于问："是这样的概率有多大?"而不再问："是这样的吗?"了．

本教材试图写成概率的数学理论入门书，对象是具有初等微积分必备知识的学习数学、工程学以及其它科学(包括社会科学和管理科学)的学生．本书不仅试图介绍概率的数学理论，而且通过大量的例子说明它的许多不同的应用．

第一章介绍组合分析的基本原理，这在计算概率时很有用．

第二章研究概率论的公理，并说明如何应用这些公理计算各种有关的概率．在这一章末尾，证明了一个重要的(常常被不幸地忽略了的)概率的连续性，然后用它研究一个"逻辑悖论"．

第三章论述了条件概率与事件独立性的一些极为重要的课题．我们借助一系列例题说明：不仅在有一部分信息可利用时，条件概率是如何发挥着作用；而且即使没有部分信息可利用时，条件概率作为一种工具也可以使得我们能比较容易地算出概率．借助

"条件化"算概率这一极为重要的技巧还出现在第七章，在那里我们用它来计算数学期望.

在第四、五、六章，我们介绍随机变量的概念. 第四章讲述离散型随机变量，第五章讨论连续型随机变量，而随机变量的联合分布放在第六章.

第七章介绍数学期望这一重要概念. 在定义了随机变量的数学期望之后，我们讲述如何用实用统计学家的定律计算随机变量函数的数学期望，并给出这一定律的初等证明. 我们还列举了许多例题来说明，随机变量和的数学期望等于它们的数学期望之和这一结果是非常有用的. 这一章还有几节讲述条件数学期望及其在预测中的应用，以及矩母函数等.

第八章阐述概率论中一些较重要的理论结果，特别证明了强大数定律和独立同分布随机变量序列的中心极限定理. 强大数定律的证明(用柯尔莫戈洛夫不等式及概率的连续性)是完整的，而在证明中心极限定理时，我们假定了勒维连续性定理成立.

第九章介绍了几个附加课题，诸如马尔科夫链、反射原理、模拟以及信息与编码理论初步.

全书有许多已经解出的例题，并有大量的习题——分为"理论习题"与"习题"——留待学生去做. 例题与习题都是精心安排过的，书末有大部分习题的答案.

谢尔登·罗斯

目　　录

第一章 组合分析

§1 引 言

概率论中的许多问题，只需要简单地数一数某特定事件能以几种不同的方式发生，就可以得到解决．计数的数学理论通称为**组合分析**．

§2 计数基本原理

对于我们的整个讨论而言，下述计数原理是基本的．这个原理可粗略地表述为：若某一试验有m个可能结果，而另一试验有n个可能结果，则两个试验就有mn个可能结果．

计数基本原理

假设有两个试验．若试验1有m个可能结果．而对于试验1的每一个结果，试验2有n个可能结果．则两个试验共有mn个可能结果．

基本原理的证明 为得到此原理的证明，现将两个试验的全部可能结果列举如下：

$$
\begin{array}{c}
(1,1),\ (1,2),\ \cdots,\ (1,n)\\
(2,1),\ (2,2),\ \cdots,\ (2,n)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(m,1),\ (m,2),\ \cdots,\ (m,n)
\end{array}
$$

其中结果(i, j)表示，试验1得到它的第i个可能结果，然后试验2得到它的第j个可能结果．因此，两个试验的可能结果的集合由m行组成，每行含n个元素．于是结论得证． ∎

例 2a 从5个男人、8个女人的人群中选出1男1女组成两个人的委员会．问有多少个委员会可供选择？

解 把被选上的男人作为试验1的一个结果，被选上的女人看作试验2的一个结果．由基本计数原理知，共有 $5\times8=40$ 个可供选择的委员会． ∎

基本原理的推广形式是：设有 r 个试验，第一个试验有 n_1 个可能结果，对于前 $(i-1)$ 个试验的每一个可能结果，第 i 个试验有 n_i 个可能结果，$i=1, 2, \cdots, r$，那么，这 r 个试验总共有 $n_1n_2\cdots n_r$ 个可能结果．

例 2b 某学院计划委员会由3名新生、4名二年级学生、5名三年级学生及2名四年级学生组成．现从委员中选各年级1人组成4人小组，问可以有多少种选法？

解 由基本原理的推广形式知，可以有

$$3\cdot4\cdot5\cdot2=120$$

种选法． ∎

例 2c 七位牌照的前三位是字母，后四位是数字①．问可以有多少个牌照？

解 据基本原理的推广形式可知，答案应是

$$26\cdot26\cdot26\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=175760000$$ ∎

例 2d 定义在 n 个点上而取值为0或1的函数共有多少个？

解 设这些点是 $1, 2, \cdots, n$，由于对每一个 $i=1, 2, \cdots, n$，$f(i)$ 只能取0或1，故共有 2^n 个函数． ∎

例 2e 在例2c中，如果字母与数字都不允许重复，那么可以有多少个牌照？

解 此时可以有 $26\cdot25\cdot24\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7=78624000$ 个牌照． ∎

---

① 题中字母系指英文字母，数字指阿拉伯数字——译注。

§3 排　　列

将字母 a, b 和 c 排成有次序的一列，问可能有多少种不同的排法？由直接列举法可知共有 6 种，即 abc, acb, bac, bca, cab 和 cba. 我们把其中的每一个称为一个排列. 于是，包含 3 个对象的集合有 6 种可能排列. 此结论也能由基本原理推出，因为排列的第一个对象可以是 3 个对象中的任何一个，排列的第二个对象可以是从余下的 2 个对象中选出的任何一个，而排列的第三个对象就只能是剩下的那一个了. 所以有 $3\cdot2\cdot1=6$ 种可能排列.

现设有 n 个对象，类似上段的推理可得，这 n 个对象有

$$n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

种不同排列.

例 3a　由 9 人组成的棒球队可以有多少种击球次序？

解　可以有 $9!=362880$ 种击球次序. ∎

例 3b　某概率论班共有 6 名男生与 4 名女生. 举行一次测验后将他们按成绩排队. 假定他们所得的分数各不相同，试问：

1. 可以有多少种排法？
2. 如将男、女生分开各自排队，可以有多少种不同排法？

解

1. $10!=3628800$.
2. $(6!)(4!)=17280$. ∎

例 3c　琼斯有 10 本书，其中数学书 4 本，化学书 3 本，历史书 2 本，语文书 1 本. 琼斯打算把他的书摆在书架上，若要求同类的书放在一起，问可能有多少种不同摆法？

解　把数学书摆在前面，接着是化学书，然后是历史书，最后是语文书，共有 $4!3!2!1!$ 种摆法. 类似地，对每一种书类的次序都有 $4!3!2!1!$ 种摆法. 由于书类又有 $4!$ 种次序，故所求的答案是

$$4!4!3!2!1!=6912.$$

现在我们来计算当有一些对象彼此不加区别时，含有 n 个对象的集合的排列种数. 为直接地讲清计算方法,考虑如下例子.

例 3d 用字母 $PEPPER$ 能组成多少种不同的字母排列?

解 我们首先指出，若 3 个 P 之间、2 个 E 之间彼此加以区别，则字母 $P_1E_1P_2P_3E_2R$ 共有 6! 种排列. 但是，考虑这些排列中的任何一个，例如 $P_1P_2E_1P_3E_2R$，若在 P 与 P 之间、E 与 E 之间交换位置，则所得的排列仍将是 $PPEPER$ 型的. 就是说，3!2! 个排列

$$\begin{array}{ll}
P_1P_2E_1P_3E_2R & P_1P_2E_2P_3E_1R \\
P_1P_3E_1P_2E_2R & P_1P_3E_2P_2E_1R \\
P_2P_1E_1P_3E_2R & P_2P_1E_2P_3E_1R \\
P_2P_3E_1P_1E_2R & P_2P_3E_2P_1E_1R \\
P_3P_1E_1P_2E_2R & P_3P_1E_2P_2E_1R \\
P_3P_2E_1P_1E_2R & P_3P_2E_2P_1E_1R
\end{array}$$

都是 $PPEPER$ 型的. 因此，字母 $PEPPER$ 有 $\frac{6!}{3!2!}=60$ 种可能的排列.

一般地，运用解例 3d 的同样推理可证：若 n 个对象中有某 n_1 个对象彼此不加区别，另 n_2 个彼此不加区别，…，另 n_r 个彼此不加区别，则总共有

$$\frac{n!}{n_1n_2!\cdots n_r!}$$

种不同排列.

例 3e 将 3 个白球、4 个红球和 4 个黑球排成一行. 如果颜色相同的球彼此不加区别，问有多少种排法?

解 有 $\frac{11!}{3!4!4!}=11550$ 种可能排法.

§4 组　合

我们时常要计算从 n 个对象中取出的、包含 r 个对象的不同组的数目. 例如, 从 A, B, C, D 和 E 五个项目中选取三项为一组, 能有多少个不同的组? 为回答这个问题可作如下推理: 由于选取第一个项目有 5 种方法, 然后选第二个项目有 4 种方法, 再选第三个项目有 3 种方法, 故若考虑项目被选取的次序, 则选取含三个项目的组有 $5\cdot4\cdot3$ 种方法. 但此时每个由某三项组成的组, 例如由 A, B 和 C 项组成的组, 都被计数 6 次(就是说, 若考虑选取次序, 排列 ABC, ACB, BAC, BCA, CAB 与 CBA 全要算上). 由此可见, 总共能组成

$$\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$$

个不同的组.

一般地, 由于考虑选取次序时, 从 n 个项目中选取 r 个为一组, 共有 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同选法, 而这时每个含某 r 个项目的组全被计数 $r!$ 次, 故由一个包含 n 个项目的集合中取出 r 个项目所组成的不同的组数应是

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

记号与术语

对 $r\leqslant n$, 我们定义

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

并称 $\binom{n}{r}$ 为从 n 个对象中一次取出 r 个的可能组合数. ①

① 习惯上约定 $0!$ 为 1, 于是 $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$.

于是，$\binom{n}{r}$ 表示不考虑选取次序时，从一个包含 n 个对象的集合中取出的、容量为 r 的不同组的数目.

例 4a 从 20 个人中选 3 人组成一委员会，问有多少种选法?

解 有 $\binom{20}{3}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1}=1140$ 种可能选法. ∎

例 4b 从 5 个男人与 7 个女人中选 2 男 3 女为一组，问有多少种选法?

解 由于 2 个男人有 $\binom{5}{2}$ 种选法，3 个女人有 $\binom{7}{3}$ 种选法，故 2 男 3 女有

$$\binom{5}{2}\binom{7}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=350$$

种选法. ∎

一个有用的组合恒等式是

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r},\quad 1\leqslant r\leqslant n \tag{4.1}$$

(4.1)式可以用分析的方法也可用如下组合方法证明. 考虑一个包含 n 个对象的集合并挑出其中特定的某一个——称之为 1 号对象. 于是，包含 1 号对象且容量为 r 的组合数为 $\binom{n-1}{r-1}$(因为每一个这样的组合都是从剩下的 $n-1$ 个对象再取 $r-1$ 个组成). 同样地，不含 1 号对象且容量为 r 的组合数为 $\binom{n-1}{r}$. 由于容量为 r 的组合总数为 $\binom{n}{r}$，(4.1)式得证.

通常称 $\binom{n}{r}$ 这个量为二项式系数，这是由于它在二项式定理中居有突出的地位.

二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \tag{4.2}$$

我们将给出二项式定理的两个证明. 前者用数学归纳法，而后者则基于组合方法.

二项式定理的归纳法证明 当 $n=1$ 时，(4.2)式化为

$$x+y=\binom{1}{0}x^0y^1+\binom{1}{1}x^1y^0=x+y$$

设(4.2)式对 $n-1$ 成立，那么

$$\begin{aligned}(x+y)^n&=(x+y)(x+y)^{n-1}\\&=(x+y)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-1-k}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-1-k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k}\end{aligned}$$

在第一个和式中令 $i=k+1$，第二个和式中令 $i=k$，我们就得到

$$\begin{aligned}(x+y)^n&=\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}x^i y^{n-i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^i y^{n-i}\\&=x^n+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right]x^i y^{n-i}+y^n\\&=x^n+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}+y^n\\&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}\end{aligned}$$

其中倒数第二个等号是由(4.1)式得到. 用归纳法，定理得证. ∎

二项式定理的组合法证明 考虑乘积

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_n+y_n)$$

它的展开式是 2^n 个项的和，每一项是 n 个因子的积. 并且，对每