

亚、超音速定常位流 的面元法

俞华昉 张炳璋 宋自强 编著



国防工业出版社

内 容 简 介

本书介绍亚、超音速定常位流中面元法的基础知识，及其在实际飞行器的计算中的简单应用。

采用此种方法不仅可计算亚、超音速气流中在不太大迎角时的压力分布和流场，而且可作外形的设计。

本书可供从事飞行器空气动力学研究、设计和教学的人员参考。

亚、超音速定常位流的面元法

徐华舫 张炳暄 朱自强 编著

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₃₂ 印张 15³/₄ 335千字

1981年3月第一版 1981年3月第一次印刷 印数：0,001—1,100册

统一书号：15034·2112 定价：1.65元

序 言

随着高速电子计算机的发展,在升力面理论的基础上,发展了计算空气动力的面元法 (Panel Method),这种方法近年来获得了广泛的应用。本书的目的是想介绍与面元法有关的问题,由于具体的方法很多,应用的范围也很广,我们只能作简单的介绍,这本书可作为对面元法有兴趣的读者的入门参考书。

面元法的理论基础是理想流体位流的线化理论。为了方便读者,书中概括地讲述了位流的线化理论,由于本书不准备介绍非定常的空气动力计算方法,所以只限于定常的情况。

本书共分四章,第一章讲述了面元法中遇到的一些基本概念和理论基础,其中包括位流的线化理论基础,常用的一些奇点的概念等;第二章对面元法的特点作一个浅近的说明和一般的介绍;第三章以机翼机身组合体为对象,介绍几种常用的典型计算方法,为了方便读者,力求给出完整的计算用公式;第四章对有些实用问题作补充说明,简单地述及侧滑的影响,计及弹性变形的空气动力计算方法,滑流的影响,小展弦比机翼非线性升力计算等问题。由于这些问题中多数问题现在还处在发展和研究中,所以只能作粗略地介绍。

目 录

第一章 线化位流理论基础

一、低速流的基本方程和压强公式、奇点	1
§ 1 低速流动的基本方程和压强公式	1
§ 2 低速流动的各种奇点	5
1. 点源; 2. 源作平面分布——面源; 3. 作面分布的偶极子;	
4. 格林定理的应用; 5. 压力偶极子; 6 涡; 7. 二维流动的	
源、涡和偶极子; 8. 压力偶极子和涡的关系; 9. 有涡线	
或涡面的流场是否还存在位函数; 10. 奇点的分布法和边界	
条件; 11. 库塔条件; 12. 前缘吸力; 13. 库塔-儒可夫斯基	
升力定理; 14. 二维薄翼——骨架翼型	
§ 3 低速流动中绕旋成体流动的奇点	78
1. 柱坐标系下的运动方程; 2. 边界条件和压强公式; 3. 轴	
对称流的奇点; 4. 旋成体有迎角时的奇点; 5. 环形物的	
奇点	
二、亚音速流的运动方程及戈泰特法则	101
§ 1 可压缩流动的运动方程及其线化	101
§ 2 近似的边界条件和压强系数公式	106
§ 3 普朗佗-葛劳涅法则、戈泰特法则	108
1. 二维亚音速流压缩性影响的修正法则; 2. 三维的平薄物体	
的压缩性修正; 3. 轴对称流的压缩性修正	
三、超音速流的线化方程	118
§ 1 前、后马赫锥, 及其影响所及区和依赖区	119
§ 2 格林定理在超音速线化流场上的应用、超音速源和	
偶极子	122
§ 3 线化超音速流中的旋成体	132

1. 旋成体的轴对称流; 2. 旋成体的横向流; 3. 绕圆锥流动的线化超音速解	
§ 4 线化超音速流场中涡的基本公式	143
§ 5 涡线所产生的诱导速度	147
第一章 附录	152

第二章 面 元 法

一、面元法简述	159
二、几何处理和平面面元的形成	160
§ 1 任意曲面的表达法	160
§ 2 平面面元的一种作法	161
§ 3 面元坐标系及其与参考坐标系的转换关系	164
§ 4 面元几何量的计算	165
§ 5 面元的使用	166
§ 6 其他的几何处理方法简述	168
三、奇点的配置	169
§ 1 奇点的布法和类型	169
§ 2 面元上奇点的弦向分布	173
§ 3 面元上奇点的展向分布	176
§ 4 高阶奇点	181
四、空气动力影响系数法	185
§ 1 空气动力影响系数矩阵	185
§ 2 控制点的选取	187
五、矩阵方程的求解方法	188
§ 1 直接法和迭代法	188
§ 2 控制的松弛迭代法	190

第三章 翼身组合体的绕流计算

一、表面布奇点法——赫斯法	195
§ 1 方法的概述	195
§ 2 升力体上面元取梯形的必要性	200
1. 任意面元的四个边缘上偶极子都连续的要求; 2. 二次多项式的偶极子强度变化要求梯形面元; 3. 梯形面元的几何量计算; 4. 任意四边形面元的面矩公式	
§ 3 面元在空间点上产生的诱导速度	206
1. 常值面源产生的诱导速度; 2. 偶极子引起的诱导速度的计算	
§ 4 计算逻辑	236
1. 附着涡的两种展向分布; 2. 解题步骤	
§ 5 库塔条件的应用	240
1. 尾流切向条件; 2. 后缘上下表面的压强相等条件	
§ 6 端梢条件和机身内的“附加升力条带”	247
§ 7 算例	248
二、亚超音速统一的近场理论——伍德沃德法	251
§ 1 几何描述	251
§ 2 奇点的布法	253
§ 3 亚、超音速的统一方法	254
§ 4 单独机身线源和线偶极子强度的确定	256
1. 单位强度线源和线偶极子的速度函数; 2. 线奇点强度的确定	
§ 5 单位强度面奇点的速度函数	267
1. 超音速情况; 2. 亚音速情况	
§ 6 面奇点产生的各扰动速度和空气动力影响系数	282
1. 面元对称性的利用; 2. 多部份面元; 3. 负斜率面元	
§ 7 机翼上面源强度及其扰动速度的计算	286
§ 8 等压面涡强度的确定	290

§ 9 压强、合力和力矩的计算	294
1. 压强系数 C_p ; 2. 单独机身上的作用力和力矩; 3. 机翼面元和机身面元上的力和力矩; 4. 机翼机身组合体的力和力矩	
§ 10 算例	296
§ 11 方法的改进	299
三、涡格法	300
§ 1 平面涡格法	300
1. 飞行器的平面涡格模型; 2. 诱导速度的计算; 3. 涡强度的计算; 4. 算例	
§ 2 非平面涡格法	319

第四章 某些实用问题的补充说明

一、小侧滑角下空气动力的计算	323
§ 1 引言	323
§ 2 侧滑平板机翼	325
1. “ α ”问题; 2. “ β ”问题; 3. “ $\alpha\beta$ ”问题	
§ 3 侧滑机翼机身组合体	341
1. 物体表面上的边界条件; 2. 尾流或自由涡面上的边界条件	
§ 4 扰动速度位的分组求解	352
1. 零迎角和侧滑角的问题; 2. “ α ”问题; 3. “ β ”问题; 4. “ $\alpha\beta$ ”问题	
§ 5 扰动速度位对称解的讨论	355
§ 6 扰动速度位反对称解的讨论	360
二、计及弹性变形的空气动力计算	370
§ 1 引言和柔度影响系数矩阵	370
§ 2 空气动力载荷影响系数矩阵	377
§ 3 准静弹性条件下的空气动力计算	379
三、螺旋桨滑流对机翼的干扰	384
§ 1 以偶极子来表达滑流的作用	385

§ 2 确定偶极子分布函数的方程	389
§ 3 减缩为单积分的问题	397
四、前缘吸力的计算	402
§ 1 计算的说明	402
§ 2 两种估算前缘吸力的方法	406
1. 平面涡格法中的一种计算方法; 2. “平面切向力”的算法	
五、小展弦比机翼非线性升力的计算	415
§ 1 引言	415
§ 2 推广涡格法	417
1. 方法的概述; 2. 计算特点和公式;	
§ 3 前缘吸力比拟法	428
六、十字翼面的翼身组合体的计算	434
§ 1 十字翼面的边界条件处理	434
§ 2 算例	437
第四章 附录	441
一、弹性飞机的刚体运动方程	441
二、柔度影响函数及弹性变形方程	450
三、离散质量系的弹性变形方程和柔度影响系数矩阵	463
四、准静弹性简化假定和空气动力载荷影响系数矩阵	468
五、小迎角下弹性飞机的空气动力	473
六、弹性飞机的纵向扰动运动方程组	480

第一章 线化位流理论基础

一、低速流的基本方程和压强公式、奇点

本书讲的都是无黏流体（理想流体）的位流问题，而且只限于线化的定常流动。速度范围包括低速、亚音速和超音速流动，而不包括跨音速流动，因为跨音速流没有线化方程可用。

低速流的问题，按说应该包括在亚音速流动之内，它不过是马赫数趋于零的一个特例而已。但为了讲解的方便，我们倒是要从低速流动（即不可压流动）讲起，而将亚音速流的问题作为一种推广来处理。

§ 1 低速流动的基本方程和压强公式

一个低速直匀流 $\vec{v}_\infty$ 流过一个物体（单独机翼、或单独机身、或翼身组合体）时所形成的一个扰动流场，其扰动范围从物面 S （见图 1-1）直到无限远方。流场上任意一点 $P(x, y, z)$ 处的速度 $\vec{v}_R$ 可以表为来流速度 $\vec{v}_\infty$ 和扰动速度 $\vec{v}$ 的合速：

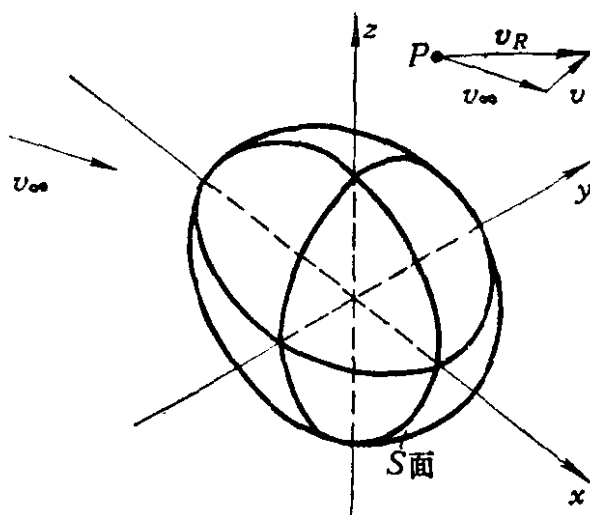


图 1-1

$$\vec{v}_R = \vec{v}_\infty + \vec{v} \quad (1-1)$$

这个扰动速度有三个分速 v_x 、 v_y 、 v_z :

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z \quad (1-2)$$

流场上每个流体微团所应遵循的规律是质量方程和无旋条件。后者是一个假设，但在无黏流里是很合理的。

低速流的质量方程是

$$\text{div } \vec{v}_R = 0$$

将式 (1-1) 代入此方程，成为

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (1-3)$$

这就是说只要求扰动速度 $\vec{v}$ 遵循这个规律，因为直匀流速是个常数。式 (1-3) 写成直角坐标系的方程是

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1-3 a)$$

无旋条件是

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \quad (1-4)$$

这里也只要求扰动速度 $\vec{v}$ 遵循无旋规律。式 (1-4) 写成直角坐标系的形式:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (1-4 a)$$

根据式 (1-4 a) 的关系，可以提出一个标量函数 $\phi(x, y, z)$ ，这个函数的梯度等于扰动速度 $\vec{v}$ 。

$$\vec{v} = \text{grad } \phi \quad (1-5)$$

函数 ϕ 称为扰动位函数。式 (1-5) 写成直角坐标系的形式是

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1-5 a)$$

式(1-5 a)说明 ϕ 在任何一个方向的偏导数就等于扰动速度在那个方向的分量。后面常要用到的是扰动速度在物面 S 的法线方向 $\vec{n}$ 的分量 v_n ，按 ϕ 的性质可知，这个法向分速等于 ϕ 在 n 方向的偏导数：

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (1-6)$$

封闭曲面 S 的法线以向外为正。

将式(1-5)代入式(1-3)，得扰动位函数 ϕ 所应满足的方程如下：

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1-7)$$

或将式(1-5 a)代入式(1-3 a)，得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1-7 a)$$

方程(1-7)或(1-7 a)称为拉普拉斯方程。这是每一个位流都应遵循的规律。

一个具体的流场情况是由具体的物面形状，即 S 的具体形状所决定的。要对一个具体流动求解，就是要去找一个符合具体边界条件而又满足方程(1-7)或(1-7 a)的具体的 ϕ 函数。在物体上，这个边界条件就是直匀流与扰动速度的合速 $\vec{v}_R$ 恰与物面相切，或说合速没有法向分量，即

$$\vec{v}_\infty \cdot \vec{n} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{\text{面}} = 0 \quad (1-8)$$

下标“面”表示物面。这一类问题在偏微分方程中称为诺曼边值问题。边界指的是整个流场的边界，或说是包围整个流动空间域 R 的全部边界，内外边界都在内。浸没在流体里的物体，其表面 S 是流场的内边界，无限远方是它的外边界，所以除了规定物面上的边界条件之外，还得规定无限远方的

边界条件。一个有限尺寸的物体对流场的扰动，离物体越远越弱，到无限远方，扰动趋于零。那末，无限远处的边界条件便是

$$|\text{grad } \phi|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (1-9)$$

这个式子表达，在无限远处扰动分速全为零。

这样，拉普拉斯方程加上边界条件就组成了位函数 ϕ 的一个完全确定的问题。给定一个物形，只要能找到一个具体的函数 $\phi(x, y, z)$ ，这个 ϕ 既能满足拉普拉斯方程，又能满足物形及远方的边界条件，那末这个问题就算解出来了。因为，有了 $\phi(x, y, z)$ 的具体函数之后，流场上任何一点的流速都很容易计算出来，而有了速度之后就可以据之把压强算出来。

速度和压强的关系式导自运动方程（即欧拉方程）

$$(\vec{v}_R \cdot \nabla) \vec{v}_R = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (1-10)$$

此式积分后成为柏努利方程：

$$\frac{\rho}{2} v_R^2 + p = C \quad (1-11)$$

这里的 v_R 是流场上某点的合速绝对值， p 是同一点的静压， C 是常数。 C 在同一流场上是一个值，可按远方来流条件（即流速 v_{∞} ，相应的静压为 p_{∞} ，其 $C = \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 + p_{\infty}$ ）决定。

通常，物面上的压强都是用压强系数 C_p 来表达的。压强系数的定义是：某点的静压 p 与来流静压 p_{∞} 之差除以来

流的动压 $\frac{\rho}{2} v_{\infty}^2$ ：

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2}$$

应用柏努利公式将压强改为速度，得

$$C_p = 1 - \left(\frac{v_K}{v_\infty} \right)^2 = - \left[2 \frac{v}{v_\infty} + \frac{v^2}{v_\infty^2} \right] \quad (1-12)$$

式中 v 是扰动速度的绝对值。

§ 2 低速流动的各种奇点

尽管扰动位函数 ϕ 所应满足的偏微分方程 (1-7 a) 是极简单的，但要给 ϕ 找个解析解的话，能够找到具有实际意义的却并不多。至于有实际意义的物形，如机翼、机身或翼身组合体，则总是因为形状太复杂，而无法找到解析的 ϕ 解。这些实用的物形的求解问题，在过去，只能把物形作大大的简化，然后就简化后的物形求近似的解答。现在有了高速大容量的电子计算机之后，物形就可以尽量保持原状，用一些奇点的叠加去求解。这样求得的解答当然仍是近似的，但精确度比过去高得多。

其所以能用一些奇点的叠加去求解，前提在于式 (1-7 a) 是线性的。既然方程是线性的，那末，只要每个奇点都满足方程 (1-7 a)，把许多奇点加在一起的总 ϕ 必然仍能满足该方程。允许叠加，就有了一个可能，即用众多的奇点叠加起来去满足具体物形所规定的边界条件。下面讲各种奇点的公式及其所产生的速度公式，以及各种奇点对流场的作用。

1. 点源

奇点共有三种：源、偶极子和涡。这里先讲最简单的

点源。

一个强度为 σ 位于 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 点的点源, 它对流场上

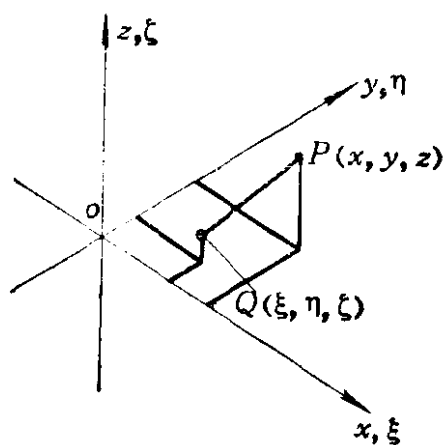


图 1-2

某点 $P(x, y, z)$ 所产生的位函数是 (见图 1-2)

$$\phi_s = -\frac{\sigma}{4\pi} \cdot \frac{1}{r(P, Q)} \quad (1-13)$$

式中的下标 S 表示源。 $r(P, Q)$ 是由点源所在点 Q 至流场点 $P(x, y, z)$ 的距离:

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

这个 $P(x, y, z)$ 就是受扰点。这个点源在 P 点所产生的三个扰动分速分别是

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sigma}{4\pi} \cdot \frac{x - \xi}{r^3}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\sigma}{4\pi} \frac{y - \eta}{r^3}, \\ v_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\sigma}{4\pi} \frac{z - \zeta}{r^3} \end{aligned} \quad (1-14)$$

点源的位函数 ϕ_s 的定义式 (1-13) 右侧为什么要用一个负号, 现在就看清楚了。扰动速度的公式 (1-14) 说明, 这样一来, 正的 σ 值就产生正的流量, 即由点源向外流。 P 点的扰动合速值是

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{1}{r^2} \quad (1-15)$$

当点源强度 σ 给定后，这个扰动速度的大小就只决定于距离 r ，并与 r^2 成反比。距离无限地增大，扰动速度迅速趋于零。所以这种奇点是符合无限远方的边界条件的。这个奇点 ϕ_s 满足方程 (1-7 a)，这一点很容易证明，只要把 (1-14) 各式再分别对 x 、 y 、 z 做一次偏导数，然后把三个二阶偏导数加起来就行了。

这个解有一个物理意义。我们可以按式 (1-15) 计算一下流过半径为 r_0 的一个球面的流量。合速 $\vec{v}$ 到处都与球面相垂直，流量就等于流速乘球面积：

$$4\pi r_0^2 |\vec{v}| = 4\pi r_0^2 \cdot \frac{\sigma}{4\pi r_0^2} = \sigma$$

可见 ϕ_s 代表的是一种从 Q 点向四面八方的流动，流量是 σ 。这个流量是常数，不论在多大的球面上来计算流量，结果都一样，都是 σ 。事实上并不一定在一个球面上计算流量，在任何一个包有 Q 点在内的封闭曲面上计算流量，结果都是 σ 。当 σ 为负时，流动是从四面八方向 Q 点汇聚的，称负源。

点源的存在，对于直匀流所起的作用是把来流撑开。这里举一个简单的例子，看一看单个点源对直匀流的作用。为方便计，把坐标原点放在点源所在之点，即令 $\xi = \eta = \zeta = 0$ ，并令 x 轴与直匀流的指向一致，则流场上任意一点 (x, y, z) 的速度是：

$$v_\infty + v_x = v_\infty + \frac{\sigma}{4\pi} \frac{x}{r^3}; \quad v_y = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{y}{r^3};$$

$$v_z = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{z}{r^3}$$

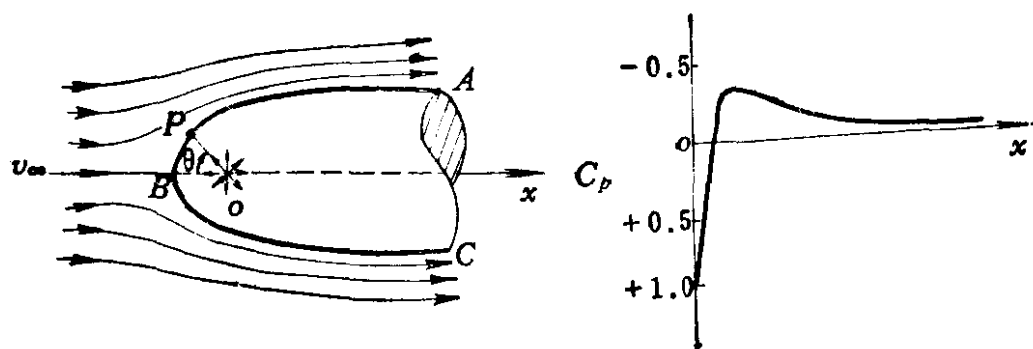


图 1-3

式中的 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。在负 x 轴上有一个合速为零的点。这一点称为驻点（图 1-3 上的 B 点）。其坐标 x_B 可由合速为零这个条件确定：这时 $x = -x_B$, $y = z = 0$, $r = x_B$,

$$v_\infty - \frac{\sigma}{4\pi} \frac{1}{x_B^2} = 0$$

由此得

$$x_B = \sqrt{\sigma / (4\pi v_\infty)}$$

过 B 点有一个以 x 轴为对称轴线的流面 ABC 。这个流面是一个旋成面，在正 x 方向伸展到无限远。这个流面对于直匀的来流说，等于有一个半无限长的轴对称物体存在。母线 ABC 可以从直匀流的流量和点源的流量恰好相等这一关系定出来。设母线上某点 P 对点源而言的张角为 θ （此角由负 x 轴向起，顺时针增大），则弧线 BP 绕 x 轴旋转一周而成的曲面对 O 点所张的立体角是 $2\pi(1 - \cos \theta)$ 。围绕 O 点的整个立体角是 4π ，与之相对应的总流量是 σ ，所以通过上述曲面的流量是 $\sigma \cdot 2\pi(1 - \cos \theta) / 4\pi$ ，即 $\frac{\sigma}{2}(1 - \cos \theta)$ 。这是从点源发出的流量，它应该恰等于直匀流流过弧 BP 所旋成的曲面原先应有的流量（即点源不存在时原先的流量），也就是通过以 $r \sin \theta$ 为半径而垂直于 x 轴的那个一个圆盘

流量，即 $v_{\infty} \pi (r \sin \theta)^2$ 。从这个流量相等的关系得母线 ABC 的方程如下：

$$\frac{\sigma}{2} (1 - \cos \theta) = \pi r^2 v_{\infty} \sin^2 \theta$$

这是在 xz 对称平面上的极坐标系下的曲线方程（其实任何一个过 x 轴的平面都是流动的纵向对称平面，在这些对称平面上，母线的形状都一样）。式中的 $r \sin \theta = z$ 。 z 值随 θ 增大而增大，当 $\theta = \pi$ 时（对应于 $x = +\infty$ ）， z 值最大。这也就是半无限体的半径之极限值 R 。

$$R = \sqrt{\sigma / (\pi v_{\infty})}$$

这样，点源的强度 σ 便可以用物体的尺寸 R 来表达了；母线的方程可以表为

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin \theta}$$

不难证明，在这个型面上，无论哪一点上，气流的合速都恰与物面相切，即法向分速为零。

物形是轴对称的，流动也是轴对称的，压强分布只要计算 xz 平面上的就行了。在 xz 面上， $y = 0$ ，只有 x 向和 z 向分速，合速平方是

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(v_{\infty} + \frac{\sigma}{4\pi} \frac{x}{r^3} \right)^2 + \left(\frac{\sigma}{4\pi} \frac{z}{r^3} \right)^2 \\ &= \left(v_{\infty} - \frac{\cos \theta}{4} \frac{R^2}{r^2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{4} \frac{R^2}{r^2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } C_p = 1 - \frac{v^2}{v_{\infty}^2} = 1 - 4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 3 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

这是物面上的压强系数。画出图来是图1-3下面的那条曲线。

这个例子并没有什么直接的实用价值，这里只是借它具