微分方程及其应用

〔美国〕H. 毕茨等著

科技卫生出版社

微分方程及其应用

〔美國〕 H. 畢 茨 等著
徐偉成 乐茂生 曉 燕 譯

科技卫生出版社

內 容 提 要

本書叙述微分方程的一般理論，特別着重于微分方程在物理学，生物学以及一些工程問題中的应用。書中对拉普拉斯变換，算符法，数值解法及偏微分方程等也有專章討論，以工程技術上的应用要求为限，使讀者可以得到全面的知識。本書可供高等學校工程系，物理系，生物系作教材及教学参考之用。

微分方程及其应用

DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH APPLICATIONS

原著者　H. Betz, P. B. Burcham, G. M. Ewing

原出版者　Harper & Brothers Publishers 1954 年版

譯　者　徐偉成　乐茂生　晚　燕

*

科技卫生出版社出版

(上海南京西路 2084 号)

上海市書刊出版業營業許可証出 093 号

大众文化印刷厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

統一書号: 15119 · 863

开本 787×1092 耗 1/32 · 印張 10 · 字數 211,000

1958 年 9 月第 1 版

1958 年 9 月第 1 次印刷 · 印数 1—3,000

定价: (10) 1,20 元

序　言

这是一本为微分方程的入門教程所寫的教科書，重点突出在微分方程对物理学，生物学以及工程上的各种特殊应用．

第一章至第六章包含了这一教程不可缺少的一些主要部分．教师可按其認为值得重視的，或結合各不同班級的需要和接受能力再选擇本書最后六章中的某几章來講授．由于学物理学及工程的学生都可能在他們進一步的研究中遇到一些偏微分方程，作者在自己所講授的班級中已体驗到有授完第十一章和第十二章的必要．某些作为补充的節段均用星号标注，指明它們可以省略．为了有些学生对双曲綫函数不熟悉，我們特在本書附錄中作了一个簡單介紹．本書对有关微分方程所选的应用例題比通常在这一类教科書中所見到的有着更透澈的分析和討論，这是本書所有的新穎特色之一．所以，当我們提供許多練習題以鍛鍊解方程的必要技巧时，着重于啓發学生如何把已給問題用数学術語來列出式子，以及如何体会已建立方程的理想化内容．

虽然，在微分方程教科書中通常并不涉及拉普拉斯变换，但由于它的应用很为廣泛，我們感到有必要把这一数学工具在这一类教程中加以簡單的介紹．

对常系数綫性微分方程的古典算符解法，本書也非常重視．我們相信，第五章的处理方式是与初等教程的目的完全一致的．

書中所包括的对某些題材，象生物动力学，非綫性方程以及

火箭的飛射等所介紹的簡單材料是比較及时而新穎的.

作者通过把微分方程的各种应用,特别在第三,六,七及十二章中的应用,組成为本教程的一个主要部分,以竭力使內容旣生动且能实用. 書中所有的討論和推導已大都囊括完整,因此并不需要具有較深的,特殊的預备知識.

有几章章末所附的參考文献,是为了对需要更多知識的学生有所帮助. 并介紹給第一次采用本書的教师們.

作　者

目　錄

第一章

引論

1-1. 定义

一个包含有導数或微分的方程称为**微分方程**. 这类方程的例子如下:

1. $\dfrac{dy}{dx}+y=0,$ 2. $(xy-y^2)dx+x^2dy=0,$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+\sin y=0,$ 4. $x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2y\dfrac{dy}{dx}+4x=0,$

5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x.$

我們把常微分方程与偏微分方程來区别一下. **常微分方程**是一个自变量,一个因变量,以及因变量对自变量的一个或几个導数之間的关系. 因而在上面方程中的1—4式为常微分方程. **偏微分方程**是表达二个或二个以上的自变量,一个因变量,以及因变量对几个自变量的一个或几个偏導数之間的关系. 上面的方程(5)就是一个例子.

一个微分方程的**階**就是在該方程中所包含的最高階導数的階数. 因而方程1, 2, 4都是一階的,而3和5乃是二階的.

当一个微分方程中对其所包含的一切導数來說都是有理的同时是整数次冪时,其最高階導数的冪数称为微分方程的**次数**. 所以方程1, 2, 3, 5都是一次方程,而4是二次方程. 如果在一个微分方程中,因变量及其導数只有一次的,且并不存在更高的

1-2. 微分方程的应用

在研究許多純数学及应用数学的問題时，都会遇到微分方程．在物理学，天文学，化学以及工程科学中，微分方程都占着極重要的地位．卽使在生物学与社会科学的范圍內，微分方程的应用也愈來愈頻繁了．在以后各章中，將比較詳尽地討論从种种不同的范圍內所提出的大量微分方程，而这里的一些簡單例子僅作为这方面的例証．

1-3. 單擺

一个在垂直平面上运动的質点，其質量为 m，用一根長度为 l 的無重量無展性的綫把它栓在 O 点上，設該質点僅受重力的作用(圖 1-1)．設 $\theta=\theta(t)$ 为綫的瞬間位置与垂綫所成的角度，以反时針的方向为正．按照力的平行四边形法則可以看出，作用在 PQ 方向的力为 $-mg\sin\theta$，其中 g 是重力加速度，而沿着运动途徑的加速度是 $l\,d^2\theta/dt^2$．应用牛頓第二定律：質量与加速度的相乘積等于在加速度方向上的力，由此得微分方程

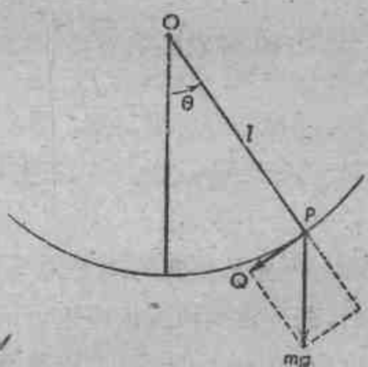

圖 1-1

$$ml\theta''=-mg\sin\theta,$$

或

$$\theta''=-\frac{g}{l}\sin\theta.$$

个不包含 c 的关系式．这說明一个顯著的事实：卽所有的直綫群有着同样的斜率 1．在同心圓族中，我們仍可用微分法得出 $x+yy'=0$．这个微分方程表明了圓的基本性質，卽圓周上任何一点的切綫在該点垂直于半徑．

在方程(3)的一般情形中，根据我們所取用的方程，应用微分法可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0 \text{ 或 } y'=\frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{5}$$

通常，(5)中的每一个方程將仍包含 c，但如果有可能从方程(3)及(5)之間消去 c，卽得一个不再包含 c 的关系式，其形式將为

$$F(x, y, y')=0.$$

这是一个一階微分方程，它表示出曲綫族(3)中所有曲綫不依賴于 c 的共同几何性質．这样，一个單参数族(有时称之为原始方程)，導引出一个一階微分方程；同时从我們推出这个微分方程的方式中可以很清楚看出，用 $f(x, y, c)=0$ 或 $y=\phi(x, c)$ 所定义的每一函数都滿足这个微分方程．

現在我們考慮双参数曲綫族，其方程为

$$y=f(x, c_1, c_2). \tag{6}$$

对 x 微分二次，我們得到另外两个方程

$$y'=\frac{\partial f}{\partial x} \text{ 和 } y''=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \tag{7}$$

如果常数 c_1 和 c_2 不相等，就不可能用方程(6)与方程(7)中的一个來消去它們；但可能在(6)和(7)的所有三个方程之間把它們消去．其結果形式为

$$F(x, y, y', y'')=0.$$

这是一个不再包含 c_1 及 c_2 的二階微分方程．这个微分方程表

現出它的原始方程的几何特征，并且每一个这样的函数 $y=f(x, c_1, c_2)$ 滿足这个微分方程.

最后考慮一般情况:

$$y=f(x, c_1, c_2, \cdots, c_n),$$

用同样的微分法及消去法，就可以引導出一个 n 階的微分方程:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0.$$

例 1. 有一拋物綫族，其对称軸为 y 軸，而其公共焦点为 $(0, 0)$，它具有方程

$$y=\frac{x^2}{2c}-\frac{c}{2}.$$

因 $y'=x/c$ 或 $c=x/y'$；消去 c 后得出微分方程为:

$$2yy'-x(y'^2-1)=0.$$

例 2. 方程

$$y=\frac{ax+b}{x+c}$$

代表一个三参数曲綫族，因此它的微分方程应該是三階的. 事实上在三次微分后，我們得到

$$y'=\frac{ac-b}{(x+c)^2}, \quad y''=-\frac{2(ac-b)}{(x+c)^3}, \quad y'''=\frac{6(ac-b)}{(x+c)^4}$$

現在很容易消去常数，我們立刻得出

$$y'''y'=\frac{3}{2}(y'')^2.$$

習題 2

对下列各原始方程求出相应的微分方程來. 并繪出曲綫群.

1. $\frac{x^2}{1+c}+\frac{y^2}{4+c}=1.$
2. $x^2+y^2-2c(x+y)+c^2=0.$
3. $y=c(x-c)^2.$
4. $y=e^x(a+bx)$，一个双参数族
5. $(x-a)^2+(y-b)^2=1$，一个双参数族.

在習題 5 中，其微分方程的几何特征是什么?

1-6. 常微分方程的解

所謂一个常微分方程 $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0$ 的解，是指任一函数 $y=f(x)$，它对 x 恒能满足該微分方程．亦即，如果 $y=f(x)$ 是微分方程 $\phi(x, y, y', y'')=0$ 的解，則对每一个 x 值，或者至少是对某一区間或一組区間內的每一 x 值，適合

$$\phi[x, f(x), f'(x), f''(x)]=0.$$

一个解可以是隱函数的形式，$F(x, y)=0$，或者是参数方程的形式，$x=g(t), y=h(t)$．在微分方程理論中，一个微分方程的解通常称为該微分方程的**積分**，而解微分方程的过程也就称为求微分方程的**積分**．这一称呼法不能与積分学中大家所熟知的積分相混淆．

可以設想，只要把从原始方程建立微分方程的过程倒逆过來，就可得出所需要的解．可惜情况并不如此．例如，一个單参数族既導出一階微分方程，反过來，我們可以推測这个微分方程的積分將会引入一个任意常数．同样的，一个 n 階的微分方程的積分將包含 n 个任意常数，这看起來是合理的．

常微分方程的任一解，如其所包含的任意常数的数目恰好与方程的階数相等，則称这种解为方程的**通解**或**一般積分**．从任何通解中，对任意常数中的一个或数个給以确定的值，所得到的解称为**方程的特解**或**特殊積分**．如果有不同于以上这些解存在，也卽有非从通解中能得到的解存在，这种解就称为**奇異解**．

正象在代数中一样，我們需要代数的基本定理來保証任一形如

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \quad (n\text{ 为正整数})$$

的方程必有一个根，同样在微分方程的理論中我們需要一个**存在定理**來保証在一些極一般的条件下可以存在着微分方程的解．至于这些存在定理的研究已越出本書范圍之外．因此我們这里將僅作为一个事实來敘述：在某些一定的条件下，一个 n-階常微分方程具有一个恰好包含 n 个不同的任意常数的通解．至于那些条件是什么，我們將在以后的几章中討論．

1-7. 常微分方程的几何意义

考慮一階方程

$$y'=f(x, y). \tag{8}$$

我們假定 $f(x, y)$ 是一个在 x, y 平面的某域內單值而連續的函数．則量

$$\tan\alpha=f(x, y)$$

是該域內每一点 (x_0, y_0) 的确定的斜率，譬如說 $p_0=\tan\alpha_0$．x_0，y_0，p_0 三个数定义了所謂从 x_0，y_0 出發的**綫素**，同时微分方程本身定义了一个綫素的場，也即一个**方向場**（圖 1-2）．微分方程的解是任一函数 $y=f(x)$，它的圖形表示应符合这方向場．这就是說，一条曲綫在每一点上都有它適合这方向場的切綫，只要曲綫上任何一点的切綫方向与方向場所規定的該点的方向相同．这样一条曲綫称为**積分曲綫**．因为曲綫的斜率 $f(x, y)$ 是單值的，在区域的每一內点上都有一条唯一的積分曲綫通过，因此，正如所預測的一样，我們就有一个完全蓋滿該区域的單参数積分曲綫族．因而也可以說：一个一階微分方程的積分就相当于把它的方向場排列成为一些曲綫，即積分曲綫．在 $f(x, y)$ 为單値連續的区域之外的点上，積分曲綫的样子可以是不規則的，

或者就不存在有積分曲綫.

圖 1-2

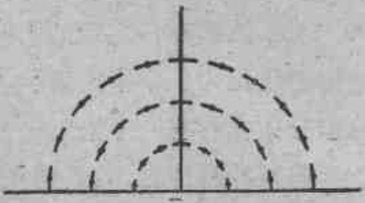

圖 1-3

一条積分曲綫可用下面的方法作出:从該区域内的任一点 $P_0(x_0, y_0)$ 出發,画一条与該点的綫素相合的小綫段. 通过这綫段的右端点,譬如說 $P_1(x_1, y_1)$,另外画一条与 P_1 点的綫素相合的小綫段. 如此对更多的点(全部在区域内部)進行下去,就得到一条折綫,这綫可以看作近似于通过点 P_0 的積分曲綫. 可以設想,当綫段取得愈短,則折綫就愈接近于積分曲綫. 这一点与事实是相符的,并可以嚴格証明. 圖 1-3 所示就是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

的几条積分曲綫. 在这場合下,因 y 必須 $\neq 0$,我們可以取上半面 $y>0$ 作为一个区域,在該区域内 x/y 是單値而連續的. 不难看出,这些近似的折綫是很容易連成積分曲綫的,这些曲綫卽为半圓.

習題 3

对每一題作出一条通过原点的近似的積分曲綫. x 的負値也包括在内.

1. $y' = x + y/2$.

2. $y' = \sqrt{x^2+y^2}$.

除非在前面加上符号 ±,否則在一个量上所加的根号总表示正根.

3. $y' = \frac{xy}{16} + 1$.

二階的微分方程

$$y''=f(x,y,y')$$

可以寫成两个一階微分方程組．設 $y'=z$，則我們有等价方程組

$$y'=z,$$

$$z'=f(x,y,z).$$

从几何观点來看，这些方程表示一个三維的方向場．方程組的積分就相当于找出所有在某一定区域內的空間曲綫，在曲綫上的每一点 x_0, y_0, z_0 的切綫方向符合方向場在該点所規定的方向．在这場合下，綫素將由 $x_0, y_0, z_0, y_0', z_0'$ 五个数給定．旣然对一个已知的 x_0，我們可以任意的定出 y_0 和 z_0，則我們就可以得出一个双参数的積分曲綫族，这又与我們以前所得的結果相符合．

作为一个例子，我們考慮一下方程

$$\frac{y''}{[1+y'^2]^{3/2}}=1,$$

这是一个双参数的圓族

$$(x-a)^2+(y-b)^2=1$$

的微分方程．其等价的微分方程組是

$$y'=z,$$

$$\frac{z'}{[1+z^2]^{3/2}}=1.$$

今 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ 在三維空間中的解釋是代表一个母綫平行于 z 軸的正圓柱．將方程二边微分，因为 $y'=z$，我們就得到

$$(x-a)+(y-b)z=0.$$

移第二項到右边去，两边再平方，卽得出一个新的方程，卽

$$(x-a)^2(1+z^2)=z^2.$$

这是一个四次柱面．这二个柱面的交綫定义了積分曲綫与方向場．

对較高階的微分方程就不能用几何意义來說明了，但是这个結論可以推廣到任何階的微分方程．

1-8. 可積的微分方程

讀者也許很熟悉这个事实，即指数为正整数的每一个代数方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 都有 n 个根；这样的一般方程，当 $n>4$ 时，就無法用代数方法來解．我們也無疑的知道一些初等函数的積分一般是不能用有限个初等函数來表达的，例如 e^{-x^2} 和 e^x/x 的積分．因此一个微分方程的解，僅只在比較少的情况下方有可能表达成一个所謂閉合形式，即初等函数的有限組合或即这种函数的積分．幸而有一些最重要的微分方程是屬于所謂**可積的微分方程**之类的．在下一章，我們將要考慮一些一階微分方程，这些方程可以進行初等運算，或者換一句話，按上述的意义來講，它們是可積的．