College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

线性代数、概率论与数理统计习题解答

主编　干晓蓉

高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

线性代数、概率论与数理统计习题解答

Xianxing Daishu Gailülun yu Shuli Tongji Xiti Jieda

主编　干晓蓉

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是作者编写的大学数学系列教材之《线性代数》《概率论与数理统计》的配套习题解答。按照主教材的内容框架，线性代数分为行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型共六章；概率论与数理统计分为随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析共七章。每章又分（Ⅰ）内容摘要及（Ⅱ）习题解答两个模块。模块（Ⅰ）是对本章重要概念、定理、公式和方法作简要归纳；模块（Ⅱ）则是主教材中全部习题的详细解答。

本书除了作为主教材的配套用书之外，还可作为高等学校应用型本科各专业的线性代数、概率论与数理统计课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数、概率论与数理统计习题解答/干晓蓉主编. --北京:高等教育出版社,2016.5
ISBN 978-7-04-042409-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①干… Ⅲ.①线性代数-高等学校-题解②概率论-高等学校-题解③数理统计-高等学校-题解 Ⅳ.①O151.2-44②O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第067415号

策划编辑 张长虹　责任编辑 张长虹　特约编辑 张 卫　封面设计 姜 磊
版式设计 童 丹　插图绘制 郝 林　责任校对 杨凤玲　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市鑫霸印务有限公司
开　　本 787 mm×960 mm 1/16
印　　张 16
字　　数 290千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版　　次 2016年5月第1版
印　　次 2016年5月第1次印刷
定　　价 27.80元

物 料 号 42409-00

前　言

本书是干晓蓉主编的《线性代数》和《概率论与数理统计》(高等教育出版社)两书中所含全部习题的解答。考虑到教学安排和篇幅,我们将线性代数和概率论与数理统计两门课程的习题解答合并成一册出版,前部分是线性代数内容,后部分是概率论与数理统计内容,各章仍按原教材的目录展开。

为了方便学生在做练习时查阅原教材内容,我们在每章中增加内容摘要部分,即本书每章包含两个模块:(Ⅰ) 内容摘要;(Ⅱ) 习题解答。关于(Ⅰ) 内容摘要,这部分给出本章中的概念、定理及公式、方法的简要叙述,并指出在学习相应内容时应注意的问题,这些也是在解题时要具备的基础知识;关于(Ⅱ) 习题解答,这是本书的主体部分。书中每个习题的解法,我们均以原教材中所介绍的解法为标准,如有不同解法时,则选取较为简便的解法,有时也给出多种解法,以供读者学习和比较。

本书由干晓蓉教授任主编,并承担了全书的内容摘要以及部分习题解答的编写;梅月兰、任献花任副主编,并承担了线性代数第三章、第四章,以及概率论与数理统计第七章的编写。参加线性代数编写工作的还有:李艳红(第一章),孙曙敏(第二章),周旋(第五章、第六章);参加概率论与数理统计编写工作的还有:王晶晶(第一章),孙曙敏(第二章),李艳红(第三章),杨斌(第四章),舒江叶(第五章),张天伟(第六章)。全书由干晓蓉统稿定稿。

限于作者水平,书中难免会有不妥之处,敬请读者给予批评、指正。

编　者

2015 年 3 月

目　　录

线 性 代 数

概率论与数理统计

线性代数

第一章　行　列　式

（Ⅰ）　内容摘要

本章主要内容包含行列式的定义、性质，解线性方程组的克拉默法则三部分.学习重点是利用行列式的性质计算行列式.

一、行列式的定义

1. 预备知识：全排列的逆序数

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，如果一个大的数排在一个小的数之前，就说有一个**逆序**.所有逆序的总数称为排列的**逆序数**，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列.**

性质 1　交换排列中的两个数，排列的奇偶性改变.

性质 2　由 $1,2,\cdots,n(n>1)$ 所作的 $n!$ 个排列中，奇排列与偶排列各占一半.

2. 行列式的定义

n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 $n!$ 个排列求和.

3. 可用定义直接计算的行列式

（1）一、二、三阶行列式

一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

三阶行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.
\end{aligned}
$$

（2）上、下三角形行列式及对角行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

二、行列式的性质

性质1 行列式与其转置行列式相等.

以三阶为例，即

$$
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.
$$

性质2 交换行列式的两行（列），行列式变号.

以三阶为例，交换第1,2两行，有

$$
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.
$$

性质3 行列式某一行（列）中所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘此行列式（或者说，行列式某一行（列）的公因子可提出与此行列式相乘.）

性质4 行列式中如有两行（列）成比例，则此行列式等于零.

性质5 若行列式的某行（列）的元素都是两数之和，则可拆成两个行列式的和. 以三阶为例，即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
$$

性质 6 将行列式的某行(列)乘以数 k,再加到另一行(列)上,行列式的值不变. 以三阶为例,第 1 行乘以数 k 加到第 2 行,得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

余子式及代数余子式概念 在 n 阶行列式中,划去元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列剩下的 $n-1$ 阶行列式记作 M_{ij},称为元素 a_{ij}的余子式,而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij}的代数余子式.

例如三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

则 1 行 1 列元素 a_1 的余子式 M_{11}及代数余子式 A_{11}分别为

$$M_{11}=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2 行 3 列元素 b_3 的余子式 M_{23}及代数余子式 A_{23}分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

当元素所在的行数与列数之和为偶数时,代数余子式等于余子式;为奇数时,代数余子式和余子式相差一个负号.

性质 7 (按行(列)展开式)行列式等于某行(列)元素与该行(列)代数余子式乘积之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n). \end{aligned}$$

以三阶为例,设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

则按第一行展开的展开式为

$$
\begin{aligned}
D &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

性质 8　行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$
a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),
$$

$$
a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).
$$

计算行列式的两种基本方法:

第一种,利用行列式性质(特别是性质 6)将行列式化成上三角形行列式;

第二种,利用行列式性质 7 的展开式,将行列式按某行或某列展开,使行列式降阶.

一般是交替使用两种方法. 要通过多看例题和多做习题,才能掌握计算行列式的技巧.

n 阶($n \geqslant 2$)范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$
V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j),
$$

n 阶范德蒙德行列式是由 $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 个形如 $x_i - x_j$ ($n \geqslant i > j \geqslant 1$)的因子的连乘积. 在数学的许多场合会遇到范德蒙德行列式,因此,应当记住它的值的表达式.

三、解线性方程组的克拉默(Cramer)法则

定理(克拉默法则) 设有 n 个方程 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
$$

若系数行列式

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,
$$

则线性方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 D_j 是用常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换 D 中第 j 列所得的行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

解线性方程组的克拉默法则在数学中常用到,要记住法则中用行列式表示方程组的解的公式. 它仅适用于方程个数等于未知量个数且系数行列式不等于零的方程组,一般方程组的讨论在本书第四章.

(Ⅱ) 习题解答

习题 1

1. 设四阶行列式的 i 行 j 列元素为 a_{ij},则在此行列式中,下列各项应冠以什么符号?

(1) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$; (2) $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

解 (1) 因为 $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$的列标排列 3214 的逆序数 $\tau(3214)=3$ 为奇数,所以 $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$项前应冠以"$-$"号.

(2) 因为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$的列标排列 4321 的逆序数 $\tau(4321)=6$ 为偶数,所以 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$项前应冠以"$+$"号.

2. 试用行列式定义说明

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

解 根据行列式定义,

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2p_3p_4p_5}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4p_5)}a_{p_1}b_{p_2}c_{p_3}d_{p_4}e_{p_5},\qquad (1)$$

其中当 p_3,p_4,p_5 等于 3,4,5 时,$c_{p_3}=d_{p_4}=e_{p_5}=0$. 因为 p_3,p_4,p_5 互不相等,且只能取 1,2,3,4,5 这五个数,故 p_3,p_4,p_5 中至少有一个要取 3,4,5 中的数,因而 c_{p_3}, d_{p_4}, e_{p_5} 至少有一个等于零,故(1)式右边和式中每一项都等于零,因此 $D=0$.

3. (填空题)计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$____;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$____;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$____.

分析　(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(321)}1\times1\times1=(-1)^3=-1$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(4321)}1\times1\times1\times1=(-1)^6=1$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(654321)}1\times1\times1\times1\times1\times1=(-1)^{15}=-1$.

4. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$;　　　　(2) $\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

解　(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\times 3-2\times(-1)=5$;

(2) $\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot(x^2+x+1)-x^3=-1$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix} = 1-\log_a b\cdot\log_b a=1-1=0$;

(4) $$\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\left(-\frac{2t}{1+t^2}\right)=\frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$=\frac{t^4+2t^2+1}{(1+t^2)^2}=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1.$$

5. 利用教材第一章图 1.1,计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & d \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix}$.

解　(1) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\times4\times1+(-1)\times(-2)\times1+0\times3\times3$$

$$-2\times3\times(-2)-(-1)\times3\times1-0\times4\times1$$

$$=8+2+12+3=25;$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times3\times2+2\times1\times3+3\times1\times2-1\times1\times1-2\times2\times2-3\times3\times3$$

$$=6+6+6-1-8-27=-18;$$

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

$=a\times c\times b+b\times a\times c+c\times a\times b-a\times a\times a-b\times b\times b-c\times c\times c$

$=3abc-a^3-b^3-c^3$；

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & d \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix}$

$=0\times 0\times 0+a\times d\times 0+0\times c\times b-0\times c\times d-a\times b\times 0-0\times 0\times 0=0.$

6. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1\,014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$　（设 $a_1a_2a_3\neq 0$）；

(6) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

解　(1) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1\,014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 1\,000 & 427 & 327 \\ 2\,000 & 543 & 443 \\ 1\,000 & 721 & 621 \end{vmatrix} =1\,000 \begin{vmatrix} 1 & 427 & 327 \\ 2 & 543 & 443 \\ 1 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_2-c_3} 1\,000 \begin{vmatrix} 1 & 100 & 327 \\ 2 & 100 & 443 \\ 1 & 100 & 621 \end{vmatrix} =10^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 327 \\ 2 & 1 & 443 \\ 1 & 1 & 621 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} 10^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 327 \\ 1 & 0 & 116 \\ 0 & 0 & 294 \end{vmatrix}$

$=10^5\times(-294)=-294\times 10^5$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+2r_1]{r_2-3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4+r_2]{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1&2&1&3\\0&-4&-1&-4\\0&0&4&3\\0&0&0&2\end{vmatrix}=1\times(-4)\times4\times2=-32;$$

(3) $$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{c_1+c_3\\c_1+c_4}]{c_1+c_2}\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}$$

$$=6\times1\times2\times2\times2=48;$$

(4) $$\begin{vmatrix}1+a&b&c\\a&1+b&c\\a&b&1+c\end{vmatrix}\xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2}\begin{vmatrix}1+a+b+c&b&c\\1+a+b+c&1+b&c\\1+a+b+c&b&1+c\end{vmatrix}$$

$$=(1+a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\1&1+b&c\\1&b&1+c\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}(1+a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1+a+b+c;$$

(5) $$\begin{vmatrix}a_0&1&1&1\\1&a_1&0&0\\1&0&a_2&0\\1&0&0&a_3\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-\frac{1}{a_1}c_2-\frac{1}{a_2}c_3-\frac{1}{a_3}c_4}\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i}&1&1&1\\0&a_1&0&0\\0&0&a_2&0\\0&0&0&a_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(a_0-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)a_1a_2a_3=a_0a_1a_2a_3-a_2a_3-a_1a_3-a_1a_2;$$

(6) $$\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_2\\r_2-r_1}]{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}$$