廣義相對論

——給學數學的人

原著者 R. K. Sachs · H. Wu

譯著者 蕭 欣 忠

曉園出版社

世界圖書出版公司

廣義相對論

——給學數學的人

原著者　R. K. Sachs · H. Wu
譯著者　蕭　欣　忠

曉園出版社
世界图书出版公司
北京 · 广州 · 上海 · 西安

内 容 简 介

本书是为学数学的人写的一本广义相对论，以近乎纯粹数学的方式介绍广义相对论的基本数学结构。

广义相对论—— 给学数学的人

R.K.萨克斯、吴宏熙 著

萧欣忠 译

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司 重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京通州印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

1993 年 6 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1993 年 6 月第一次印刷　　印张：14.125

印数：0001－800　　字数：40 万字

ISBN: 7－5062－1616－7/O・73

定价：13.40 元 (W$_{2}$9303/18)

譯 序

當我們快完成劇變論譯叢的時候，我有機會來到柏克來進行一些研究工作。在一些湊巧的機緣裏認識沙克斯教授以及他跟吳宏熙教授所合寫的一本非常有趣的書：就是目前這本專為學數學的人所寫的廣義相對論。沙教授對於我們推動整套譯叢的工作很感興趣，他認為這樣的譯叢一定能夠對於中國的現代化運動產生正面的貢獻。我就邀請他給我適當的建議與指導，或許也能逐漸發展出第二套有關廣義相對論方面的譯叢。

現在這本書就是這新譯叢裏的頭一本書，先把廣義相對論的基本數學結構以一個近乎純粹數學的方式開宗明義的介紹出來。由於所假設的基本讀者已經具有近代微分幾何的基本知識，我們擔心讀這譯本的中文讀者或許有點銜接不上，因此在譯完這本書時我們已計畫好要同時也把這書在數學上所假設的唯一數學教材：Bishop及Goldberg所寫的「流形上的張量分析」也譯出來，而取名為：廣義相對論的數學基礎：流形上的張量分析。讀者在本書裏所遇到的數學預備全可在這第二本裏找到，隨時澄清不太瞭解的數學論述。

另外我們也計畫推出Thorne Misner及Wheeler的G raoitation 重力論，作為譯叢的第三本書，是廣義相對論的入門書，非常實際的從物理及數學的觀點來講全廣義相對論，這就把第一本比較高深又陷於空洞的純數學講法補全了。比較一般性的概述這理論的各項有趣問題。當然所有這些進一步發展都要看我們人力的調度以及國立編譯館的協助配合而定。沙教授已經擬定了一系列的精彩好書可以考慮擺進我們這套譯叢裏。我們盼望不需太久的時間，這套叢書就能逐漸成形。而且如同劇變論譯叢一樣對於中國的現代化

努力貢獻我們的一份心力與祝福。

沙教授在讀者指南裏已經指出，本書在每一節後面所列的許多習題都非常要緊，應該看如與正文合成一整體。他特別還空出第八章及第九章來給出更多的額外習題。如果沒有人指導而想要把全部習題做完全，而且能夠明確的肯定所做的完全沒有差錯，這是必須付上足夠的努力的。我們現在不太曉得有沒有必要為這些習題預備一本解答與指導。等以後真的很有需要時再設法安排吧！

感謝沙教授的熱心指導，以及國立編譯館的贊助，曉園出版社有限公司高水準的排版及詳盡負責的校對工作，使這書得以順利出版，讓我們有機會發展起這新的工作。願這書能帶給你一段充滿鼓舞、啓發的時間。

譯者：蕭　欣　忠
于加州柏克來大學

原　　序

這是一本有關物理的書，然而卻是特別爲學數學的人寫的。我們心裏所預期的標準讀者是合乎下列幾項情況的：

第一，他們或許是主修數學的研究生，因此對於大域的微分幾何有些認識。

第二，他們也懂得大一物理的基本課程，同時對於通俗的天文物理或宇宙論之文章或書籍感到興趣。

第三，他們懂得數學簡潔明晰論證之妙趣，但是他們更喜歡接受這些數學論述背後所潛藏的物理動機。

第四，他們樂意付上代價，投入時間與精力來掌握並充分的熟練某些技巧性的細節，如同第 1.1 節所需面對的。

我們知道每一本書都會使某些讀者感到失望。本書當然也不可能例外。下面所要列舉的五種讀者很可能就會對本書感到失望：

第一，一個學物理的人如果想要使用這本書來當做學習微分幾何的入門書，那麼他一定會感到失望。

第二，一個學數學的人如果以爲勞倫茲流形（Lorentzian manifolds）只不過與通常他所熟悉的黎曼流形（Riemannian manifolds）大同小異；換言之，如果他以爲單憑著他所具有的良好數學基礎，他就可以不需投下任何對於煩瑣細節的苦功而就輕而易舉的學會所有宇宙論中的精粹，那麼他一定也會對本書感到失望。

第三，一個人如果相信那些大而化之的，含混而不精確的哲學論辯除了歷史性的以及直觀引證性的價值之外還有更大的重要性。同時他也相信廣義相對論必須設法加以證明，或者必須對廣義相對論全然的加以合理化，那麼這種人也可能對本書感到失望。

第四，一個人如果以爲本書是有關廣義相對論的百科全書，能夠在本書中找到所有涉及這理論的任何論題，那麼他也會失望。事實上這時他應

該參考下面這幾本我們列於書末的文獻：Hawking-Ellis[1], Penrose [1], Weinberg[1], and Misner-Thorne-Wheeler[1], Sachs-Wu [1]。

第五，一個數學家如果他想特別學量子物理學或統一場論的話，那麼本書也會讓他感到失望。不幸的是一直到目前爲止好像還沒有任何一本量子物理的書是特別爲數學家所寫的，他們書中若有用到數學，也只不過是形式上的數學，而非眞的從數學觀念與立場所出發的數學。

我們曾經使用這本書在課堂上當做教材，我們發現我們的標準讀者能很快的學會非量子物理。事實上由於這些學生具有直觀的幾何概念，同時也熟悉抽象的論證，因此他們很容易直接處理目前在相對論中大家所接受的一般性的模型。他們不會被一些成見所拖累，而這些成見正是每個受過幾年牛頓式的標準物理課程訓練的學生所難免的。可是這條捷徑還是有其短處，由於沒能投入足夠多的時間閱覽物理的典籍，因此我們的學生無法眞正的看清隱藏在這簡潔的廣義相對論之數學理論背後各種特殊情形的多樣性與深入的物理意義。

長久以來我們就一直覺得物理學家們應該認眞的設法來跟數學家們溝通，使用像本書所採用的方法或管道來讓數學家們較易於掌握各種物理學的概念與理論。我們開始寫這書的時候曾訂下一個目標：要實實在在的講物理，也要實實在在的講數學，同時劃淸兩者在邏輯上的差別。可是當我們逐步把這本書發展起來的時候，我們發現了許多的困難，特別關於第三個目標更是難於貫徹。幸好我們得到許多朋友和同事的鼓勵跟幫助，特別受到陳省身教授還有B. O'Neill教授不時的指教才僥倖的能寫完這本書而仍能大體上始終貫徹這些目標。我們現在倒是覺得，若有人想如同我們一樣單單以數學家所能瞭解的語言來向他們解釋更深入的、眞正的物理理論，那麼他們一定必須付上極大的代價，因爲這樣的書寫起來眞的好難。

許多人相信目前物理與數學的平衡發展能對人類有尊嚴的存活於世上具有正面的大貢獻。我們並不見得同意這種看法。可是我們卻認爲要是人類眞的能夠勝過核子戰爭的威脅與浩劫，而得以繼續存活下去，那麼當他們於晴朗的夜晚仰首穹蒼而數點繁星時，他們會覺得他們的繼續存在並非了無意義。

透過幾次課堂上當做教材使用，我們曾多次修改本書的原稿。感謝 Joy Kono，Nora Lee，以及Marnie McElhiney 等人辛苦爲我們準備這些稿件。陳省身教授所給我們的一些哲學上的指點讓我們重新編排整本書的章節及寫法。此外J. Arms, J. Beem, K. Sklower 以及T. Langer 等人的寶貴意見也使我們對這本書做了一些或大或小的改進。謝謝劍橋大學的DAMTP對我們熱切的接待，還有Kuniko Weltin教授在最困難情況之下所給我們大力的支持使得本書的最後一段終於能如期完成。最後也感謝國家科學基金會對我們準備這書所給予的資助。對於所有上面提到的這些幫助，我們再一次表達我們由衷的謝忱。

讀者指南

一、本書中所有以〔註〕標示出來的部分都是額外而可以加以省略的。讀者可以略而不讀而不影響整體的數學連貫性。這種段落的開頭用〔註〕標出，而結尾用#標示。這些註中有些是定理的證明，對於定理的充分理解與運用並不那麼重要。可是大部分的註卻涉及一些補充的說明，是假設了某些物理方面或者數學方面的知識而對本題做進一步的發揮。這些所假設的物理知識會超過通常所可以假設的程度，因此我們只好把這些進一步的發揮列在補充的資料當中。儘管上面已經說明，省略這些註並不影響整本書的數學連貫性，可是我們希望讀者對這些註多多少少瀏覽一下，特別那些牽涉到物理的註。由於這些補充資料都已一再的被修改過，因此讀者儘管放心，其中大概不至於有什麼對物理歪曲解釋的地方了。

二、除了這些註以外所剩下的本文應該被當做數學來讀。但是下列的特色應該銘記在心：我們並沒有發展出一套包含所有題材的抽象的數學。我們在書中所提供並強調的卻是一些很簡單的定義與定理，而且從這些定義與定理所能引伸而得的一大堆物理結論。

在物理中人們嘗試著使用數學來描述大自然的某些方面。可是我們的大自然本身其實並非一種純數學的易於抽象化的客體，當然大自然更不是一個數學的定理。因此不可能存在什麼獨一無二的數學結構來涵蓋所有的物理現象。由於本書的主題是物理，因此讀者在這書中所能讀到的並不是一個有關一般勞倫茲流形的深入透徹的數學理論而引向一個主要定理做其高潮。事實上我們在這書中所提供的只不過是有關一類特殊的四維勞倫茲流形的一系列的定理而已。因此數學只是扮演配角而非主角，在本書中我們是把數學當作工具而非主要興趣的本身。譬如說，在第三章裏我們的重點並非擺在 Stokes 定理不使用座標的講法。我們真正的重點乃是使用這個定理來定義並分析許多的物理概念：例如電荷的保守、物質之創造與消滅、有關磁單極(magnetic monopoles)不存在的假設、有關電子流(

electric flux）之高斯定律的相對論講法、磁感應（magnetic induction）的法拉第定律、馬氏的位移電流（displacement current）假設，有關能量、動量及角動量保守的特殊相對論定律等等。而這一大堆的物理概念就可以被運用到許許多多已知的現象之上。我們討論Stokes定理的唯一目的只在於藉此指明這定理可以如此精簡的被用來說明這世界中這麼多的現象，因此這定理可以認爲是一種瞭解大自然最經濟的方法。我們所重視的就是這樣特別的經濟簡明性，我們不太在乎這些數學工具的數學一般性或普遍性。

如果有讀者願意追求有關相對論的更深入的數學定理，那麼他應該參考Hawking - Ellis [1]。

三、我們採用純粹數學的格調來書寫這本書。所有的概念都清楚明白的加以定義，而所有的敍述或定理也都嚴格的經過證明。這種處理方法是跟通常物理課本的做法大爲不同的，因爲在物理課本中基本的物理量幾乎都不曾清楚而明確的被定義過。因爲這些基本的定義在物理中常是實際藉著顯示圖片，或者藉著指向窗外，或者藉著操作實驗室中的儀器而來直接給出的。就這種意義來講如果有某個定義是數學上清楚明確的，它卻有可能在物理上並不能非常精確。因此我們在這兒預先提醒讀者，本書爲了滿足數學家對於每個概念，每個術語皆有清楚定義的基本要求，我們可能在這些對最基本物理量的處理上跟物理學家所慣用的做法有大的差別。

四、在本書每一節後面所列的習題原則上應該看如與本書正文合成一整體。我們很仔細的選改這些習題，我們非常盼望讀者肯認眞花時間及精神來做。只要投入足量的心力，總能夠把這些習題做清楚，而更深的體會正文的涵義。

五、從第零章到第五章是要一章連一章接續著讀。至於其他幾章卻是獨立的。

目　　錄

第四章　愛因斯坦場方程式　173

第五章　光　子　1[illegible]

第零章

預備知識

本章寫在這兒的目的在於預備好讀者以便開始進入正題。如果一個讀者已經具有充分的預備知識，那麼他可以很快的瀏覽過去。在第 0.0 節我們複習所需用的一些微分幾何的知識，在第 0.1 節我們給出所需用的一些物理知識。在第 0.2 節則敍述人們如何從牛頓物理漸漸的轉換到相對論的物理。當然這兒的討論都僅限於直觀的講法。如果有人從來都沒有學過相對論，那麼他最好把列在第 0.2 節後面的那些習題全都仔細做一次。

0.0 複習與符號

在本節我們先定下一些符號。在這兒若有任何定義是沒被清楚明確敍述的，或者有任何定理是沒有清楚明確加以證明的，讀者全都可以在 Bishop - Goldberg [1] 這本教科書裏頭找得到。他們這本書名叫「流形上的張量分析」，我們的符號會儘量採用他們的符號。由於以後常常會引用這本書，所以當我們提到這書時就簡單的說成Bishop -Goldberg 的書。

0.0.1 集合、映射與拓樸

假設A與B為集合，而$i: A \to B$為從前者到後者的映射 (map)，我們把任何$a \in A$的影像 (image) 記為ia或$i(a)$。例如，假設C也是一個集合，而$k: B \to C$是一個映射，則：

$$(k \circ i)(a) = (k \circ i)a = k(ia) = kia$$

其中$k(ia)$這種寫法比較好。現在假設D是A的子集合 (subset)，那麼我們就記為$D \subset A$。另方面這時的餘集可記為：

$$A - D = \{a \in A \mid a \notin D\};$$

把映射i的定義範圍侷限於D時所得的映射記為$i|_D$。假設$E \subset B$，則

$i^{-1}E \subset A$ 代表 E 在 i 下之完全的逆像(complete inverse image)。再假設上面的集合 A 是個拓樸空間，則 D^- 與 ∂D 分別代表 D 的閉包(closure)與邊界(boundary)。

令 $\mathbb{Z}$ 代表整數而 $\mathbb{R}$ 代表所有的實數。如果 $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$ 是個連通的開子集，我們就可以將其寫成 $\mathscr{E} = (a, b)$，其中 $a = -\infty$ 或者 $b = \infty$ 的情況是容許發生的。一個映射 $f: \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ 如果可以寫成：

$$fu = cu + d, \text{ 其中 } c > 0 \text{ 且 } d \in \mathbb{R}.$$

則說這映射是個正號仿射(positive affine)。

0.0.2 張量代數

設 V 為向量空間(我們全都只考慮實向量空間)，則 V^* 代表其對偶空間。在 $\omega \in V^*$ 之下 $v \in V$ 的影像就記為 $\omega(v)$ 或 ωv。所謂 V 的子空間都意指 V 的向量子空間。假設 $V_1, \cdots\cdots, V_N$ 為有限維的向量空間，則 $V_1 \oplus \cdots\cdots \oplus V_N$ 代表這些空間的直和(direct sum)。至於 $V_1^* \otimes \cdots\cdots \otimes V_N^*$ 則代表由所有的多重線性(multilinear)映射：

$$V_1 \times \cdots \times V_N \to \mathbb{R}.$$

所構成的向量空間。設 V_1 為向量空間，則其上所有的屬於 (r, s) 型的張量空間為：

$$T_s^r(V_1) = V_1 \otimes \cdots \otimes V_1 \otimes V_1^* \otimes \cdots \otimes V_1^*$$

其中包含了 r 個沒有星號以及 s 個具有星號的因子。假設 $S \in T_s^r(V_1)$ 又 $T \in T_q^p(V_1)$，則 $T \otimes S \in T_{s+q}^{r+p}(V_1)$ 代表這兩個張量的張量積。

【註】 對於 $T_s^r(V_1)$ 中的每一個張量，我們按照Bishop-Goldberg書中的慣用法而把逆變的(contravariant)變數全都擺放在順變的(covariant)變數之前。以後我們都按照此法來使用張量，而不另外再加以說明。

0.0.3 內　積

設 V 是一個有限維的向量空間。V 上的一個非退化的對稱、雙線性形式（nondegenerate symmetric bilinear form）g 就稱爲 V 上的一個內積（inner product）（Bishop-Goldberg 2.21）。設集合

$$S=\{W \mid W\text{爲}V\text{之子空間，而且}g|_W\text{是負定的（negative definite）}\}$$

則內積 g 的指數（index）就定義爲整數：

$$I=\max_{W\in S}\ (W\text{的維數})。$$

定義 $v\in V$ 的範數（norm）爲：$|v|=[\,|g(v,v)|\,]^{1/2}$。則 $v\in V$ 叫做單位向量，當且唯當 $|v|=1$，而 $v,w\in V$ 彼此垂直，當且唯當 $g(v,w)=0$。

令向量空間之維數記爲 $N=\dim V$，而令 $B=(e_1,\cdots\cdots,e_N)$ 代表 V 中一組有序基，而 $(\varepsilon^1,\cdots\cdots,\varepsilon^N)$ 爲相應的在 V^* 中的對偶基。B 稱爲（有序）正交單位基或單正基（ordered orthonormal basis）當且唯當：

$$g=\sum_{A=1}^{N-I}\varepsilon^A\otimes\varepsilon^A-\sum_{A=N-I+1}^{N}\varepsilon^A\otimes\varepsilon^A$$

其中，當指數 $I=0$ 或 $I=N$ 時，兩個和中有一個爲零。換言之，B 爲正交單元基的充要條件可寫爲：

$$\begin{aligned}
&\text{當 } 1\le A\le N-I \text{ 時 } && g(e_A,e_A)=1\\
&\text{當 } N-I+1\le A\le N \text{ 時 } && g(e_A,e_A)=-1\\
&\text{當 } A\ne B \text{ 時 } && g(e_A,e_B)=0
\end{aligned}$$

任意給定一組基，如果其中每個向量皆爲單位向量而且任意兩個向量彼此互相正交，則只需適當排列其秩序就能得出一組有秩序的正交單元基。設 $e\in V$ 是個單位向量，總存在一組正交單元基會包含 e 爲其中的基向量。

如果 $\dim V\geq 2$ 而且 $I=1$，則說 (V,g) 構成一個 Lorentz 向量空間，這時的 g 稱爲一個 Lorentz 內積。