数学模型简明教程

朱　婧　胡志兴　郑连存　编

科学出版社

数学模型简明教程

朱 婧 胡志兴 郑连存 编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书侧重于数学建模知识的了解和数学建模能力及意识的培养，案例丰富，由浅入深，便于学生自学和教师教学．本着简明和实用的两个原则，书中的内容主要以中等难度的数学建模问题为主，以求达到降低数学建模学习起点、实用和通俗易懂的目的．读者只要具备简单的微积分、线性代数和概率统计知识就可以学习本书．

本书可作为学校各专业的专科生、本科生、研究生及工程技术人员学习数学建模课程的教材和参考书，其中很多案例可以用于高等数学、常微分方程、概率统计等课程教学的应用案例．

图书在版编目（CIP）数据

数学模型简明教程/朱婧，胡志兴，郑连存编．—北京：科学出版社，2015.12
ISBN 978-7-03-046184-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①朱… ②胡… ③郑… Ⅲ.①数学模型-教材
Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 259282 号

责任编辑：张中兴 周金权／责任校对：钟 洋
责任印制：徐晓晨／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 12 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 12 月第一次印刷 印张：13 1/4
字数：314 000

定价：27.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

数学建模因其在科学技术发展中的重要作用越来越受到社会的普遍重视，并已经成为现代科学技术工作者必备的重要能力之一．数学模型是当前我国高等教育基础课程教学改革的前沿课程之一．数学建模教学的内容覆盖了工业工程、信息工程、生物工程、交通工程、管理工程、金融工程、航天工程等领域．这一课程的成功开设，对学生正确理解数学教育的重要性以及数学学科与其他诸多专业课之间的内在联系有着非常重要的作用，它是学生在学期间弥合基础理论与各应用学科之间鸿沟的一座桥梁．数学建模教学的目的是培养学生认识问题和解决问题的能力，同时，作为数学教育的一门重要的辅助课程，这门课程的开设也使整合大学数学教学过程中不同数学课程的知识成为可能．教材是知识的载体，需要编写一本难度不大的数学建模教材，让学生通过它能较早接触数学建模知识，了解数学建模的方法，可以使其在整个大学学习中有更多的时间锻炼自己．基于编者10多年来从事数学建模教学、组织和培训学生参加数学建模竞赛、开设数学实验和大学数学课程以及编写图书的经验，参考国内外数学建模和数学实验教材，编写了这本实用、学生更加易学、教师易教的教材《数学模型简明教程》.

本着简明、实用和有趣的原则，书中的内容还是以初、中等难度数学建模问题为主，以求达到降低数学建模学习起点、实用和通俗易懂的目的．读者只要具备简单的微积分、线性代数和概率统计知识就可以学习本书．全书共分为8章，胡志兴教授编写了数学模型简介、初等模型、量纲分析与无量纲化，朱婧老师编写了优化模型、微分方程模型、离散模型、数值方法模型和概率统计模型.郑连存教授对全书进行了统稿．还有多位老师为本书提出了丰富而宝贵的意见和建议，同时本书的编写和正式出版得到了“十二五”期间北京科技大学教材建设经费资助（项目编号:JC2014YB053），在此一并致谢．此外，为使学生了解和参加国际国内的数学建模竞赛，本书在附录1讲解了部分全国数学建模竞赛题，附录2给出近5年全国大学生数学建模竞赛赛题．

本书的建模问题是编者在开设数学建模选修课、必修课和辅导学生数学建模竞赛多次讲授的问题，实践表明它们都是初学数学建模的学生很感兴趣的建模问题．为正式出版本书，编者又将其进行了重新整理和编排，并借助数学软件求解了部分模型．

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，恳请广大读者指正．

编　者

2015年3月12日

目　录

第1章　数学模型简介

1.1　引　　言

数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直是和各种各样的应用问题紧密相关的.数学的特点不仅在于概念的抽象性、逻辑的严密性、结论的明确性和体系的完整性，而且在于它应用的广泛性.数学要解决实际问题就需要建立数学模型，从此意义上讲数学建模和数学一样有古老历史.例如，欧几里得几何就是一个古老的数学模型，牛顿万有引力定律也是数学建模的一个光辉典范.半个多世纪以来，随着计算机技术的迅速发展，数学的应用不仅在工程技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用，而且以空前的广度和深度向经济、管理、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通等领域渗透.特别是新技术、新工艺蓬勃兴起，计算机的普及和广泛应用，数学模型在高新技术上也起着十分关键的作用.因此数学模型被时代赋予更为重要的意义.

数学模型这个词已广泛出现在现代生产、日常生活和工作中.气象工作者为了得到精确的天气预报，时时刻刻根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量和风速等数据建立数学模型.药物学专家根据药物浓度在人体内随时间和空间的变化来建立数学模型，可以分析药物的疗效，有效地指导临床用药.不论是用数学方法在科技和生产领域解决哪类实际问题，还是与其他学科相结合形成交叉学科，关键的一步都是建立研究对象的数学模型，并加以计算求解.

那么什么是数学模型？我们在学习初等代数时就已经遇到过数学模型了.如“航行问题”：

甲乙两地相距 1200 km，船从甲到乙顺水航行需要 40 h，从乙到甲逆水航行需要 60 h，问船速、水速各多少？

用 x，y 分别表示船速和水速，根据物理知识列出方程

$$\begin{cases}(x+y)40=1200,\\(x-y)60=1200,\end{cases}$$

这个方程组就是上述航行问题的数学模型，原问题转化为纯数学问题.方程组的解为 $x=25$，$y=5$，故上述航行问题的答案是船速为 25 km/h，水速为 5 km/h.

上述建立数学模型时，对问题的背景进行必要的简化假设(航行中设船速和水速均为常数)；用字母 x，y 表示所求得未知量；利用相应的物理规律(匀速运动的路程等于速度乘以时间)；列出数学式子(二元一次方程组)；求出方程组的解答；

用这个答案来解释原问题.

目前,数学模型(mathematical model)还没有一个统一的准确定义,因为站在不同的角度可以有不同的定义.但是可以给出如下定义:“数学模型是对于现实世界的一个特定对象,为了某种特定目的,根据特有的内在规律,作出一些必要的简化假设,运用适当的数学工具得到一个数学结构.”具体来说,数学模型就是为了某种目的,用字母、数学及其他数学符号建立起来的等式或不等式以及图表、图像、框图等描述事物的特征及其内在联系的数学结构表达式.数学模型或能解释某些客观现象,或能预测未来的发展规律,或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略.数学模型一般并非现实问题的直接翻版,它的建立常常既需要人们对现实问题深入细微地观察和分析,又需要人们灵活巧妙地利用各种数学知识.

这种应用知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程就称为数学建模(mathematical modeling),即用数学的语言——公式、符号、图表等刻画和描述一个实际问题,然后经过数学的处理——计算、编程等得到定量结果,以供人们分析、预报、决策和控制.数学建模是运用数学的语言和工具,对部分现实世界的信息加以翻译、归纳的产物.数学模型经过演绎、求解以及推断,给出数学上的分析、预测、决策或控制,再经过翻译和解释,回到现实世界中.最后,这些推论或结果必须经受实际的检验,完成实践——理论——实践这一循环,如果检验的结果是正确或基本正确的,即可用来指导实践,否则,要重新考虑翻译、归纳的过程,修改数学模型.

数学模型的分类方法有多种,下面介绍常用的几种分类.

(1) 按照建模所用数学方法的不同,可分为几何模型、运筹学模型、微分方程模型、概率统计模型、控制论模型、图论模型、规划论模型、马氏链模型等.

(2) 按照数学模型应用领域的不同,可分为人口模型、交通模型、体育模型、经济预测模型、金融模型、环境模型、生理模型、生态模型、企业管理模型等.

(3) 按照模型的表现特性,考虑模型的变化,可分为静态模型与动态模型.

(4) 按照模型的表现特性,考虑模型的连续性,可分为离散模型与连续模型.

(5) 按照模型的表现特性,考虑模型随机因素,可分为确定性模型和随机性模型.

(6) 按照模型的表现特性,考虑模型的线性,可分为线性模型与非线性模型.

(7) 按照人们对建模机理了解程度的不同,有所谓的白箱模型、灰箱模型、黑箱模型.这是把研究对象比喻为一只箱子里的机关,要通过建模过程来揭示它的奥妙.白箱主要指物理、力学等一些机理比较清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题,这些方面的数学模型大多已经建立起来,还需深入研究的主要是针对具体问题的特定目的进行修正与完善,或者是进行优化设计与控制等.灰箱主要指生态、经济等领域中遇到的模型,人们对其机理虽有所了解,但还不很清楚,故称为灰

箱模型.在建立和改进模型方面还有不少工作要做.黑箱主要指生命科学、社会科学等领域中遇到的模型,人们对其机理知之甚少,甚至完全不清楚,故称为黑箱模型.在工程技术和现代化管理中,有时会遇到这样一类问题:由于因素众多、关系复杂以及观测困难等,人们也常常将它作为灰箱或黑箱模型问题来处理.应该指出的是,这三者之间并没有严格的界限,而且随着科学技术的发展,情况也是不断变化的.

1.2　建立数学模型的步骤

现实世界中的实际问题是多种多样的,而且大多比较复杂,所以建立数学模型需要哪些步骤并没有固定的模式,但是建立数学模型的步骤有一些共性的东西,掌握这些共同的规律,将有助于数学模型的建立.

(1) 模型准备.

在对实际问题建立数学模型时,需要解决的问题往往涉及众多因素,这就要求了解问题的实际背景,明确建模目的,搜集必需的各种信息,尽量弄清对象的特征.分清问题的主要因素和次要因素,抓住主要因素,抛弃部分次要因素.

(2) 模型假设.

根据对象的特征和建模目的,对问题进行必要的、合理的简化,用精确的语言做出假设.如果对问题的所有因素一概考虑,无疑是一种有勇气但方法欠佳的行为,所以一个高超的建模者能充分发挥想象力、洞察力和判断力,善于辨别主次,而且为了使处理方法简单,应尽量使问题线性化、均匀化.

(3) 模型构成.

根据所做的假设分析对象的因果关系,利用对象的内在规律和适当的数学工具,构造各个量间的等式关系或其他数学结构.不过应当牢记,建立数学模型是为了让更多的人明了并能加以应用,因此工具越简单越有价值.

(4) 模型求解.

可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值运算等各种传统的和近代的数学方法,特别是充分利用计算机技术软件.实际问题的解决往往需要复杂的计算,许多时候还得将系统结果用计算机模拟出来,因此编程和熟悉数学软件是模型求解必不可少的重要工具.

(5) 模型分析.

对模型解答进行数学上的分析.能否对模型结果做出细致的分析,决定了你的模型能否达到更高的档次.不论哪种情况都需进行误差分析、数据稳定性分析和灵敏度分析.

(6) 模型检验.

将所得到的结果与实际问题做比较,如果所得结果与实际问题相符,问题就得到解决;如果与实际问题不相符,则找出存在的差距与原因,对问题做进一步的分析,提出新的假设,逐步修改完善模型,使问题得到更好的解决.有些模型需要经过多次反复,不断完善,直到检验结果获得某种程度上的满意.

(7) 模型的应用.

模型的应用与问题的性质、建模目的和最终结果有关.

上述数学建模的全过程可以用流程图表示,如图 1-1 所示.

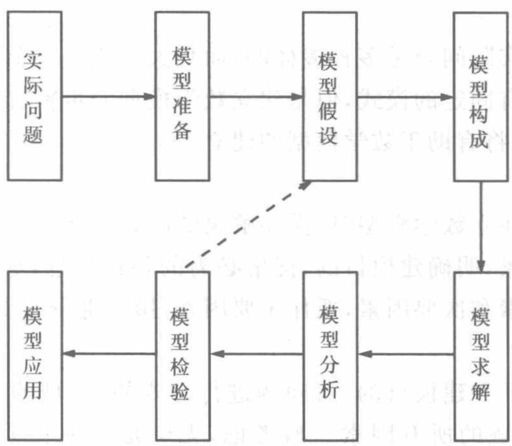

图 1-1　数学建模全过程流程图

1.3　数学建模实例 1

人口问题是当前世界人们非常关注的问题,尤其是进入 21 世纪,科学技术的飞速发展,各国都在研究人口增长与预测,有效控制人口增长.

1. 问题提出

表 1-1 给出近 200 年的美国人口统计数据,根据数据建立数学模型,对模型进行检验并预测 2000 年和 2010 年美国人口.

表 1-1　美国数据人口统计

年份	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
人口/百万	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2
年份	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920
人口/百万	31.4	38.6	50.2	62.9	76.0	92.0	106.5

续表

年份	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口/百万	123.2	131.7	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4

2. 指数增长模型(马尔萨斯人口模型)

此模型是由英国神父马尔萨斯(Malthus,1766－1834)于 1798 年提出的.

1) 假设

人口增长率 r 是常数,即单位时间内人口的增长量与当时的人口数量成正比.

2) 模型建立

记时刻 $t=0$ 时的人口数为 x_0,时刻 t 时的人口数为 $x(t)$,由于人口数量较大,可以视 $x(t)$ 为连续、可微函数.在时刻 t 与 $t+\Delta t$ 时间段内人口的增长率为

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=rx(t),$$

令 $\Delta t \to 0$,得微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx,\\ x(0)=x_0.\end{cases} \tag{1.1}$$

3)模型求解

微分方程(1.1)的解为

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{rt}. \tag{1.2}$$

特别地,取时间 t 为正整数 n ,得第 n 年人口数量为

$$x(n)=x_0\mathrm{e}^{rn}=x_0\,(\mathrm{e}^r)^n\ ,$$

式(1.2)表明:人口按几何数列增长,公比为 $\mathrm{e}^r(\mathrm{e}^r>1)$,当 $n\to\infty$ 时, $x(n)\to\infty$.

4) 模型的参数估计

要用模型(1.2)来预测人口,必须对其中的参数 r 进行估计.用表 1-1 中的数据来估计.(1.2)式两边取对数,得 $\ln x=rt+\ln x_0$,记 $y=\ln x$, $a=\ln x_0$,则

$$y=rt+a, \tag{1.3}$$

如果以 1790－1900 年数据拟合,按 10 年为单位,用数学软件或最小二乘法计算,可得: $a=1.43233$, $r=0.274324$,从而 $x_0=4.18845$.

如果以 1790－1990 年数据拟合,按 10 年为单位,用数学软件或最小二乘法计算,可得: $a=1.76061$, $r=0.207986$,从而 $x_0=5.81598$.

5) 模型检验与分析

将 $r=0.274324$, $x_0=4.18845$ 代入模型(1.2),求出 1790～1900 年人口数量为 x_1,将 $r=0.207986$, $x_0=5.81598$ 代入模型(1.2),求出 1790～1990 年人口数量为 x_2,与实际数据进行比较,如表 1-2 所示.图 1-2 和图 1-3 是它们的图形表示(圆点•

表示实际数据，曲线表示按指数模型计算数据图形横坐标表示时间，纵坐标表示人口数）.从表 1-2、图 1-2 和图 1-3 可以看出：这个模型基本能描述 19 世纪以前美国人口的增长，但进入 20 世纪后，预测人口数与实际人口数相差较大，这个模型就不再适合了.

表 1-2　指数增长模型拟合美国人口数据结果

年份	实际人口/百万	指数增长模型	
		计算人口 x_1/百万	计算人口 x_2/百万
1790	3.9	4.2	5.82
1800	5.3	5.5	7.2
1810	7.2	7.2	8.8
1820	9.6	9.5	10.9
1830	12.9	12.5	13.4
1840	17.1	16.5	16.5
1850	23.2	21.7	20.3
1860	31.4	28.6	24.9
1870	38.6	37.6	30.7
1880	50.2	49.5	37.8
1890	62.9	65.1	46.5
1900	76.0	85.6	57.3
1910	92.0		70.6
1920	106.5		86.9
1930	123.2		107.0
1940	131.7		131.7
1950	150.7		162.1
1960	179.3		199.6
1970	204.0		245.8
1980	226.5		302.6
1990	251.4		372.5

分析原因，该模型的结果说明：人口以指数规律将无限增长.事实上，任何地区的人口都不可能无限增长，指数模型不能描述和预测较长时期的人口演变过程.这是因为，随着人口的增长，自然资源和环境条件等因素对人口增长的限制作用越来越显著.如果人口较少，自然资源丰富，人口增长较快，人口的自然增长率可以看作

常数，当人口增加到一定数量时，这个增长率就要随着人口增长而减少，于是应该对指数增长模型关于人口增长率的假设进行修改.

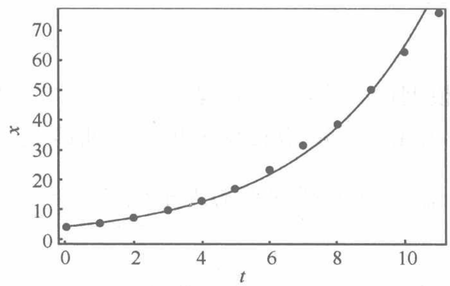

图 1-2　指数增长模型拟合图形（1790～1900 年）

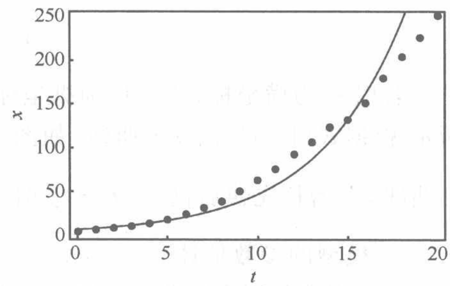

图 1-3　指数增长模型拟合图形（1790～1990 年）

3. 阻滞增长模型

由于自然资源、环境条件等因素对人口的增长起着阻滞作用，并且随着人口的增加，阻滞作用越来越大.阻滞增长模型（Logistic 模型）就是考虑到这个因素，对指数增长模型的基本假设进行修改如下.

1）假设

人口增长率 r 为当时人口数量 $x(t)$ 的减函数，最简单地假定：$r(x)=r-sx$（r,s 为正常数），r 称为固有增长率；自然资源和环境条件年容纳的最大人口数量为 x_m.

2）模型建立

当 $x=x_m$ 时，增长率为 0，即 $r(x_m)=r-sx_m=0$，得 $s=\frac{r}{x_m}$，故

$$r(x)=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right). \tag{1.4}$$

将式(1.4)代入式(1.1)，得 Logistic 增长模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=rx\left(1-\dfrac{x}{x_m}\right),\\ x(0)=x_0.\end{cases} \tag{1.5}$$

3）模型求解

由模型(1.5)，分离变量得

$$\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x_m-x}=r\,dt,$$

两边积分，得

$$\ln\frac{x}{x_m-x}-\ln\frac{x_0}{x_m-x_0}=rt, \tag{1.6}$$

于是模型(1.5)的解为

$$x(t)=\frac{x_{\mathrm{m}}}{1+\left(\frac{x_{\mathrm{m}}}{x_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}}. \tag{1.7}$$

若以 x 为横坐标，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 为纵坐标作出模型(1.5)第一个方程的图形，如图 1-4 所示.根据式(1.7)作出 x-t 曲线，如图 1-5 所示.Logistic 增长模型的 x-t 曲线是 S 形曲线，x 增长先快后慢，当 $t\to\infty$ 时，$x\to x_{\mathrm{m}}$，x-t 曲线拐点的纵坐标是 $x=\frac{x_{\mathrm{m}}}{2}$.

4) 模型的参数估计

根据现实数据来检验模型(1.5).用表 1-1 中 1790～1990 年数据拟合，按 10 年为单位数据来检验这个模型.根据式(1.7)，用数学软件求得 $r=0.225493$，$x_{\mathrm{m}}=397.214$ 和 $x_0=7.11009$.

5) 模型检验

用式(1.7)计算美国人口数据结果如表 1-3 所示.

表 1-3　Logistic 增长模型拟合美国人口数据结果

年份	实际人口/百万	Logistic 增长模型	
		计算人口/百万	相对误差
1790	3.9	7.11009	0.8231
1800	5.3	8.86836	0.673275
1810	7.2	11.0491	0.534597
1820	9.6	13.7472	0.432
1830	12.9	17.0749	0.323636
1840	17.1	21.1637	0.237643
1850	23.2	26.1642	0.127767
1860	31.4	32.245	0.026911
1870	38.6	39.5881	0.025598
1880	50.2	48.3818	−0.03622
1890	62.9	58.8077	−0.06506
1900	76.0	71.0228	−0.06549
1910	92.0	85.1367	−0.0746
1920	106.5	101.185	−0.04991
1930	123.2	119.105	−0.03324
1940	131.7	138.71	0.053227
1950	150.7	159.69	0.059655
1960	179.3	181.613	0.0129

续表

年份	实际人口/百万	Logistic 增长模型	
		计算人口/百万	相对误差
1970	204.0	203.962	−0.00019
1980	226.5	226.175	−0.00143
1990	251.4	247.707	−0.01469

图 1-6 是原数据图形和 Logistic 模型计算数据的图形表示(圆点•表示实际数据,曲线表示按式(1.7)计算的数据).

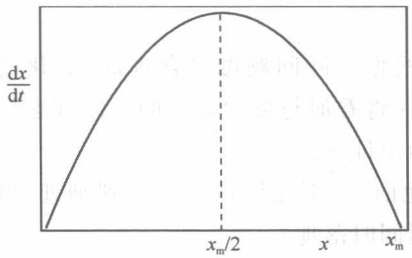

图 1-4　Logistic 模型 dx/dt-x 曲线

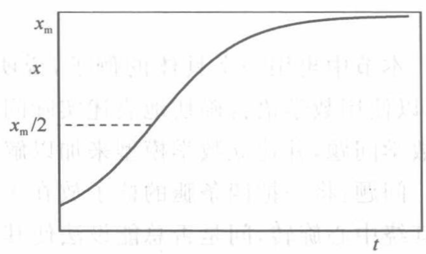

图 1-5　Logistic 模型 x-t 曲线

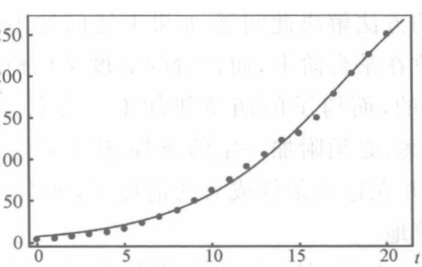

图 1-6　Logistic 模型拟合图形

6) 模型应用

用式(1.7)及上面的参数 $r=0.225493$, $x_m=397.214$ 和 $x_0=7.11009$,可进行预测,2000 年美国人口为

$$x(21)=268.082,$$

这与已知美国 2000 年实际人口数(281.4 百万)进行比较,其相对误差为 4.73%,可以认为该模型是比较满意的.

如果按指数增长模型计算,由式(1.2)及 $x_0=3.9$, $r=0.307$, 2000 年美国人口应为

$$x(21)=458.663,$$

这与已知美国 2000 年实际人口数(281.4 百万)相差较大.Logistic 模型更好地描述

了 21 世纪初美国的人口.

7）人口预报

将 2000 年美国的实际人口数（281.4 百万）加进去重新估计参数，可得 $r=0.2154729$，$x_m=446.5732$ 和 $x_0=7.698119$.由式(1.7)，预测 2010 年美国人口数为

$$x(22)=298.114,$$

而美国 2010 年人口普查结果是美国人口数为 310.232 百万，其相对误差为 3.906%.

1.4 数学建模实例 2

本节中再用一个具体的例子，说明如何根据实际问题做出合理的、简化的假设，以便用数学语言确切地表述实际问题，如何将看似与数学无关的实际问题转化为数学问题，并建立数学模型来加以解释或给出证明.

问题：将一把四条腿的椅子放在不平的地面上，不允许将椅子移到别处，但允许其绕中心旋转，问是否总能设法使其四条腿同时落地？

分析：将椅子往不平的地面上一放，在通常情况下只能做到三只脚着地、放不平稳，然而只需稍微转动一下，就可以使四只脚同时着地.

下面用数学建模的方法解决此问题.如果上述问题不附加任何条件，答案应当是否定的，例如，椅子放在某台阶上，而台阶的宽度又比椅子的边长小，自然无法将其放平；又如地面是平的，而椅子的四条腿却不一样长，自然也无法放平.由此可见，要想给出肯定的答案，必须附加一定的条件.基于对这些无法放平情况的分析，提出以下条件（假设），并在这些条件成立的前提下，证明通过旋转适当的角度必可使椅子的四条腿同时着地.

(1) 椅子的四条腿一样长，椅子脚与地面接触可以视为一个点，四脚连线是正方形（对椅子的假设）.

(2) 地面高度是连续变化的，沿任何方向都不出现间断（对地面的假设）.

(3) 椅子放在地面上至少有三只脚同时着地（对椅子和地面之间关系的假设）.

仔细分析本问题的实质，发现本问题与椅子腿、地面及椅子腿和地面是否接触有关.如果把椅子腿看成平面上的点，并引入椅子腿和地面距离的函数关系就可以将问题与平面几何和连续函数联系起来，从而可以用几何知识和连续函数知识来进行数学建模.根据上述假设做本问题的模型，用变量表示椅子的位置，引入平面图形及坐标系如图 1-7 所示.图中 A，B，C，D 为椅子的四只脚，坐标系原点选为椅子中心，坐标轴选为椅子四只脚对角线.于是由假设 2，椅子的移动位置可以由正方形沿坐标原点旋转的角度 θ 来唯一表示，而且椅子脚与地面的垂直距离就成为 θ 的函数.注意到正方形的中心对称性，可以用椅子的相对两个脚与地面的距离之和