

高等学校教材

固体火箭发动机

气体动力学

主 编 何 洪 庆

副主编 张 振 鹏

西北工业大学出版社

第一章 火箭发动机气体动力学的基本特征

§ 1.1 燃烧室与喷管计算的一体化

早年人们已经认识到, 气体动力学是固体火箭发动机设计计算的基础。当时进行的仅是燃烧室和喷管简单的估算。随着固体火箭发动机研究工作的深入, 对燃气流动计算的内容和方法以及气体动力学作用的认识, 都得到不断的发展。

在本世纪 50 年代以前, 固体火箭发动机的设计计算, 仅进行一维定常下的纯气相燃烧、内弹道和喷管流动估算。众所周知, 为了提高比冲和抑制高频振荡燃烧, 固体火箭发动机普遍采用添加铝粉的复合推进剂, 因此气流中含有 Al_2O_3 微粒。带有微粒的二相流动与纯气相流动有明显的甚至本质的差别, 因此在 60 年代初, 一维二相流动计算受到了重视。以上是气体动力学在固体火箭发动机应用中发展的第一时期。

人们对一维定常流动的估算是不能满足的。随着电子计算机的发展, 对火箭发动机进行轴对称流动计算已成为可能。从本世纪 60 年代到 70 年代, 乃至 80 年代, 日益完善的轴对称流动计算逐步代替了一维流动估算。轴对称流动计算也是发展的: 开始是纯气相的, 以后是二相流的, 也考虑到流体粘性和流动中进行化学反应, 最后是综合考虑化学反应、二相流及气流粘性的全耦合流动计算。早先, 人们比较重视喷管中的流动计算, 对喷管亚、跨超音速段分别取得了成果。但他们并不满足对已知型面的锥型或特型喷管进行流动参数和性能计算, 还寻求最大推力喷管的型面设计。随着塞式喷管、潜入喷管、摆动喷管和喷管中二次喷射推力向量控制方案的应用, 人们对它们的流动计算也逐步进行了研究。

在喷管计算臻于完善的同时, 人们注意到燃烧室的流动计算是喷管计算的先导。燃烧室出口参数(即喷管入口条件)的不精确, 将对喷管计算的精确性产生重大影响。因此, 人们已经认识到, 由于燃烧室气流马赫数低而不予重视, 甚至假设喷管入口处的气流是滞止的, 这些都是不妥当的; 何况在一定的条件下, 例如, 为了提高装填密度而进行的通道狭窄的装药设计, 以及无喷管发动机的应用等, 燃烧室的气流马赫数并不低。此外, 侵蚀燃烧、振荡燃烧等计算也需要燃烧室通道内确切的流动参数分布资料。因此, 必须把燃烧室与喷管统一起来考虑。问题还不止如此。喷管射流和多喷管射流相互间的作用, 以及在喷管后设置燃气舵, 它们的流场是在喷管流动基础上的延伸。这样, 固体火箭发动机燃烧室、喷管内和喷管外的流场应当构成一个一体化流动计算的整体。

从本世纪 60 年代到 80 年代(其中 70 年代发展最快), 包括燃烧室、喷管内外流场在内一体化的轴对称二相流计算代表了第二时期的发展水平。

尽管固体火箭发动机轴对称二相一体化流动计算的研究还不完善, 尤其是实验研究还远远不够, 研究专题中的二相流模型几乎是空白, 但是三维流动计算已感到迫切需要。这是因为装药早就采用三维的; 其它如旋转发动机、摆动喷管、喷管轴线的偏斜、有二次喷射的喷管流动等, 将使燃烧室、喷管以及喷管外的流动成为三维的流动, 轴对称流动已不再能描述其

流动的物理本质。

反应湍流附面层理论是一个新兴的边缘课题,它首先在弹头再入大气层热防护计算中得到应用;然后,在其它工程领域中也有越来越多的应用。从本世纪 80 年代起,这一理论已逐步应用到复合和双基推进剂侵蚀燃烧模型以及以热化学烧蚀为特点的碳基和硅基喷管的烧蚀模型。在这些模型中,反应湍流附面层理论能细致地描绘其机理并反应其物理本质,计算与实验的一致性证明了这种理论应用的正确性及其存在的生命力。因此,作者把它列入固体火箭发动机气体动力学范畴。反应湍流附面层理论,包括解其方程组的数值计算,开辟了固体火箭发动机气体动力学崭新的一页。

如前所述,固体火箭发动机中的气体流动问题是非常复杂的。现在,计算气体动力学已经有很大的发展;同时,近代计算机的发展已为可能进行如此复杂的气体动力学计算问题提供有力的工具。

固体火箭发动机气体动力学的计算课题一般可分三步完成:建立物理模型和控制方程,方程的数值计算,计算结果的图象显示。建立模型和方程必须以弄清机理抓住问题的物理本质为基础,物性参数对计算的准确度也有很大的影响,这些都要与实验相结合。数值计算方法已经有很大的发展,包括计算方法(差分法、有限元法等),网格生成技术,各类方程的解法和激波的截获等。计算机的立体动态图象显示结束了大批枯燥无味的、烦人的数据人工分析,而能形象地、动态地展示全部物理过程。三维、二相、计算气体动力学与固体火箭发动机一体化工作过程的计算机图象显示相结合,将成为本世纪 90 年代乃至 21 世纪初固体火箭发动机气体动力学第三阶段发展的新水平。

总之,计算越来越周密、精确,当然也越来越复杂。

§ 1.2 研究二相流的重要意义

二相流动在流体力学中具有广泛的概念。例如,弹头再入大气层时气体中夹杂雨、雪、冰;石油管道中含气团、杂质的石油粘流,锅炉中伴有汽团的水流,具有粉尘的煤粉燃烧气流……。我们这里所说的二相流动,是指固体火箭推进剂中添加铝粉之后,在燃气中含有 Al_2O_3 凝相(液相或固相)微粒这种特定的流动。

当前,除了一小部分固体火箭发动机使用双基或改性双基推进剂以外,添加铝粉的复合推进剂是其主要能源;因此,绝大多数宇航、战略、战术导弹用的固体火箭发动机的设计,都离不开带有 Al_2O_3 微粒的二相流计算。添加铝粉,一方面提高了推进剂能量,又能抑制高、中频振荡燃烧;但另一方面,导致二相流损失,使比冲降低。目前,在许多高能推进剂中常加入 10~20% 的铝粉。对于加 17% 铝粉的复合推进剂,燃烧产物中约含有 30% (按重量计)的 Al_2O_3 微粒。据统计,在喷管流动中,二相流损失常占总损失的 $\frac{1}{3} \sim \frac{1}{2}$, 可使比冲下降 1.5~2.5%。图 1.1 是用性能预估技术研究喷管最佳型面时得出的结果,它表示:在喷管长度和面积比给定的条件下,对于具有圆弧型扩张段的喷管,各项比冲损失随初始膨胀角 α_0 的变化。由图可见,二相流损失是固体火箭发动机流动中最大的损失。计算这种损失属于气体动力学的任务。

二相流对固体火箭发动机的影响,还远不止引起最大的流动损失的问题。首先,凝相

Al_2O_3 微粒与气相间的相互作用，一是阻力，二是传热；因此，它将影响燃烧室和喷管内、外主流诸如温度、压强等一切流动参数。其次，主流参数的不同，又将引起推进剂燃烧，流动中化学反应，传热，凝相在壁面的沉积，反应附面层参数，烧蚀，二次喷射状况等的变化。这些都是无可置疑的。更进一步，当凝相微粒本身参与上述过程的时候，对其机理和计算又将产生怎样的影响呢？对这一问题，目前还不很清楚，因而在建立上述过程的模型时常常加以回避；但它又是一个非常尖锐、非常重要、不容回避的问题，因而迫切需要人们去研究解决。

关于固体火箭发动机中二相流动的研究，其现状大致如下：

对凝相微粒与气相之间互相作用的阻力与传热，以及对微粒平均直径的计算等，研究得比较多；许多经验公式已可应付一般的工程计算。关于流动过程中因微粒撞击而产生的凝聚与破碎，已有了初步的研究、应用和结论。关于燃烧室中二相流的研究，除少量较简单的一维二相流外，进行得并不充分。关于喷管中二相流的研究比较受到重视，研究的成果比较多。微粒尺寸分级情况下的轴对称喷管跨音速、超音速段的二相流动计算，微粒流线，二相流损失，以及最佳型面设计，代表了目前喷管理论计算的水平。潜入喷管进口附近流场和亚音速段的二相流计算尚需进一步研究。考虑有化学反应和气体粘性的二相流全耦合喷管，对其超音速段和射流的流场计算已经取得结果。对于燃烧室和喷管中的非定常纯气相流动，研究工作已逐步取得某些进展，而对非定常二相流动的研究尚处于初始阶段。关于微粒在喷管壁面上沉积的研究取得了初步成果。关于喷管烧蚀，虽取得了不少研究成果，但基本上未考虑 Al_2O_3 微粒的作用。在有微粒参与的二相流条件下，推进剂的各种燃烧模型，对流和辐射传热，点火起动过程，反应附面层理论，烧蚀和温度场模型，二次喷射流动等，基本上还是空白。其原因是，对微粒如何进入湍流附面层和热防护壁面，以及微粒与附面层、推进剂或壁表面之间的互相作用（质量、动量、热量传递）的机理还不太清楚，数学处理也更复杂。二相流理论研究的进展与实验研究是分不开的，许多经验或半经验公式直接来自实验测量，一些理论计算的结果也得到实验的证实。今后应特别重视运用各种先进手段来观测微粒运动的轨迹以及微粒在各种研究专题物理模型中的作用机理。

总之，对于含铝推进剂固体火箭发动机的各种计算，不考虑二相流是不合适的。关于二相流的理论和实验研究，还需要有志者去毕力从事和逐步完善。

研究二相流动，首先要了解 Al_2O_3 微粒的性质，以及凝相与气相间的相互作用，然后才能建立二相流动时的控制方程，研究其解，以及获得二相流动的规律。建立二相流动的控制方程是遍及本书二~四章的重要内容，它们都要用到有关微粒性质以及凝相与气相间相互作用的知识。为方便起见，我们把这些内容集中在本章叙述。

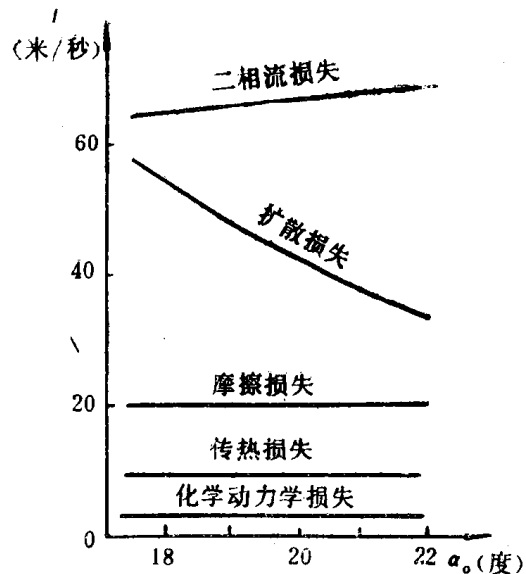


图 1.1 喷管流动中各项损失的典型图例

§ 1.3 Al_2O_3 微粒的一般性质

人们对含铝推进剂燃烧产物中的凝相微粒作了大量细致的收集和分析工作，结果证明，98%以上是 Al_2O_3 ，形状大体上是球形的。于是大家都认为，在喷管喉部附近的上游，微粒处于高温，是液相，凝聚力使之呈圆球状；下游则随着加速降温而凝固为固相圆球。

Al_2O_3 的熔点为 2318°K ，沸点为 3250°K 。

一、关于微粒直径

计算表明，微粒直径（或称微粒尺寸）对比冲效率的影响很大（见图 1.2）。由图 1.2 可见，微粒直径每变化一微米，约使比冲效率变化 1%。因此，人们对微粒的收集，微粒直径的测量、估算和在二相流计算中的处理非常重视。

从喷管出口收集到的微粒来看，其直径的大小都有一定的分布规律；但是，由于推进剂中铝粉粒度和发动机工作条件的不同，微粒直径的大小是很不相同的。一般说来，微粒直径为 $1\sim 40$ 微米，而且中等直径的居多，特大和特小的较少。表 1.1 表示在一定实验条件下测量得到的微粒直径分布；而图 1.3 表示在另一条件下测量得到的微粒直径的连续分布曲线（该曲线所表示的微粒粒度是比较小的一种），其中纵坐标表示喷管流中某一直径的微粒质量与微粒总质量之比。

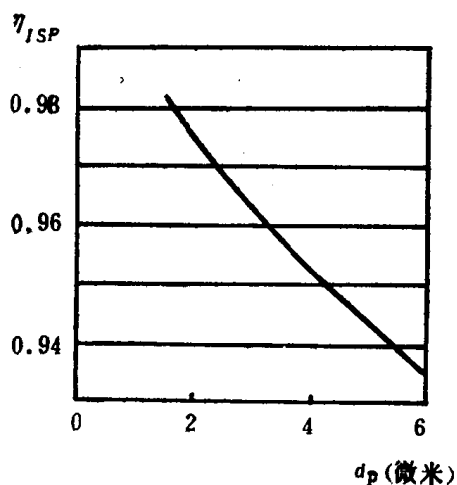


图 1.2 微粒直径对比冲效率的影响

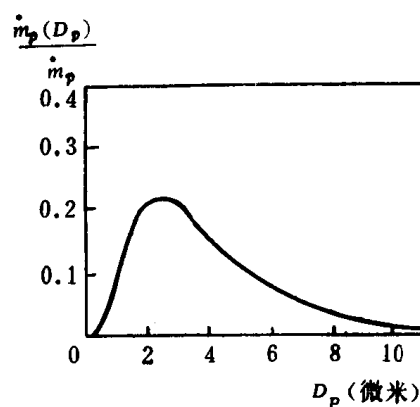


图 1.3 微粒直径的连续分布曲线

表 1.1 微粒直径分布表

微粒直径 (微米)	<2	2~39	>39
含量 (%)	29.8	63.8	6.9

用连续分布的微粒直径来进行二相流动计算是很麻烦的。比较精确而又可行的办法是将微粒直径分级进行计算。所谓“微粒直径分级”，就是用有限个不连续的微粒直径组来代替真实的连续微粒直径分布。具体做法是把连续分布直径曲线（图 1.3）下面的总面积按相等质量分成几个分面积，然后确定每一部分微粒的平均直径。表 1.2 表示一个这样的微粒直径

分级。表中用五种不连续平均直径代表连续的微粒直径分布，每一种的质量均为总质量的20%。

表 1.2 微粒直径分级表

D_p (微米)	1.58	2.56	3.52	4.88	7.90
$m_{p,j} / \sum_{j=1}^5 m_{p,j}$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

进行二相流计算时，假设微粒之间没有相互的作用，因此每一直径组的微粒都有它自己的控制微分方程，而所有微粒对气体总的阻力和热交换作用则为这些不连续微粒作用的总和。在固体火箭发动机含铝推进剂计算的工程应用中，用五个不连续的微粒直径组代替连续的微粒直径分布，可以得到合理近似的结果。

有时为计算方便起见，认为微粒直径是均一的，并以其平均值作为全部微粒的代表直径。目前常用的微粒平均尺寸有两种。一种是体积-表面积平均半径 $\bar{r}_{P32}$ ，其定义是：

$$\bar{r}_{P32} = \int_{r_{P\min}}^{r_{P\max}} r_P^3 \bar{f}_N dr_P / \int_{r_{P\min}}^{r_{P\max}} r_P^2 \bar{f}_N dr_P \quad (1.3.1)$$

式中 $r_{P\max}$, $r_{P\min}$ 分别为最大，最小微粒半径；

$\bar{f}_N$ 是按相对微粒数计算的分布密度， $\int_{r_{P\min}}^{r_{P\max}} \bar{f}_N dr_P = 1$ 。另一种是质量加权平均半径 $\bar{r}_{P43}$ ，

其定义是：

$$\begin{aligned} \bar{r}_{P43} &= \int_{r_{P\min}}^{r_{P\max}} r_P^4 \bar{f}_N dr_P / \int_{r_{P\min}}^{r_{P\max}} r_P^3 \bar{f}_N dr_P \\ &= \int_{r_{P\min}}^{r_{P\max}} r_P \bar{f}_M dr_P / \int_{r_{P\min}}^{r_{P\max}} \bar{f}_M dr_P \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

式中 $\bar{f}_M$ 是按微粒相对质量计算的分布密度， $\int_{r_{P\min}}^{r_{P\max}} \bar{f}_M dr_P = 1$

用经验公式时，微粒的体积-表面积平均半径（微米）为：

$$\bar{r}_{P32} = 0.01193 p^{1/3} x_P^{1/3} [1 - \exp(-0.001575 L^*)] (1 + 0.01772 d_t) \quad (1.3.3)$$

式中 d_t ——喷管喉径，厘米；

p ——燃烧室平均工作压强，牛顿/米²；

x_P ——100克燃气中凝相的克分子数，莫尔/100克；

L^* ——发动机特征长度，等于燃烧室自由容积与喉部面积之比，厘米。

微粒的质量加权平均半径（微米）为：

$$\bar{r}_{P43} = 1.381 d_t^{0.2932} [1 - \exp(-0.833 \times 10^{-8} x_P p \tau)] \quad (1.3.4)$$

式中 τ 为微粒在燃烧室中的平均停留时间， $\tau \approx 100 L^* / \Gamma^2 C^*$ （毫秒）；其中 C^* 为特征速度，厘米/秒； Γ 为比热比 γ 的组合参数。

$\bar{r}_{P32}$ 和 $\bar{r}_{P43}$ 含意不同，数值也是不同的，一般前者比后者小一些。正确的平均尺寸选定，应以按平均尺寸算得的二相流损失与按尺寸分级算得的二相流损失相近为原则。有人通过一维二相流计算发现，按 $\bar{r}_{P32}$ 计算的损失偏小，按 $\bar{r}_{P43}$ 计算的损失偏大，而按 $\bar{r}_P = (\bar{r}_{P32} + \bar{r}_{P43})/2$

计算的二相流损失却与按微粒尺寸分级计算的相近。因此，在简化的二相流计算中，以 $\bar{r}_{P32}$ 和 $\bar{r}_{P43}$ 的平均值 $\bar{r}_P$ 作为微粒的代表尺寸比较合适。

二、关于微粒碰撞

在实际喷管流动中，不同直径的微粒，其运动速度是不同的。小直径微粒的阻力小，运动速度较大，在随气流的流动中能逐渐赶上大直径微粒，因而产生微粒碰撞。碰撞的结果，使微粒凝聚或破碎。关于微粒碰撞后的凝聚和破碎模型，以及考虑微粒凝聚和破碎后对比冲效率等性能参数影响的计算，国内外都有研究^{[5]~[13]}。虽然实验数据、经验公式和计算的处理尚未达到令人信服的程度，但定性的概念是可以建立的。

我们考虑微粒碰撞后发生两种情况，一种是既有凝聚，又有破碎，称之为**凝聚破碎**；另一种情况是只有单一的破碎，称之为**完全破碎**。一般来说，在喷管收敛段微粒碰撞后易发生凝聚破碎，而且凝聚效应较大，因此大直径微粒有较大的增加。微粒在收敛段中所达到的最大直径与喷管入口处的微粒直径密切相关。可以认为，当微粒间的碰撞力以及微粒与气相间的气动力之和大于液态微粒表面张力时，微粒被击碎。这是微粒发生完全破碎的临界条件。在喷管扩张段靠近喉部处容易达到微粒破碎的临界条件，因此在扩张段靠近喉部处大量微粒发生完全破碎。在这里，大直径微粒迅速减少。由于微粒直径变小，微粒速度会急剧增加，因而使气相速度突然减小（见图 1.4）。

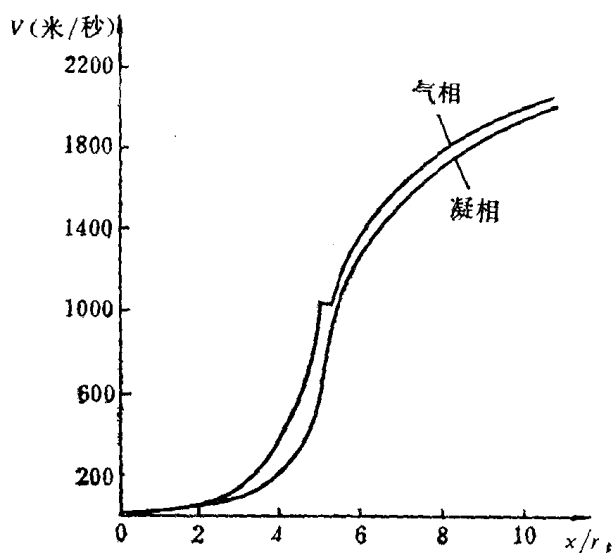


图 1.4 沿喷管长度气相和凝相的速度分布

实验和计算表明，尽管喷管入口处微粒直径可以在较大范围内变化，但由于在扩张段喉部附近发生完全破碎，而微粒在完全破碎后所达到的直径是比较接近的，而且随着向下游流动时不会再有太大的变化，因此，喷管出口处的微粒质量加权平均半径受喷管入口处初始尺寸的影响很小。这样，喷管入口处的微粒尺寸对发动机性能的影响也很小。所有上述关系，由表 1.3 所列的典型数据可以一目了然。

表 1.3 微粒尺寸变化及其对发动机性能的影响

喷管入口 $\bar{r}_{P43}$ (微米)	2.1	3.1	6.2	10.4	20.8	41.5
$\bar{r}_{P43max}$ (微米)	2.7	4.3	8.0	12.8	24.2	44.9
达到 $\bar{r}_{P43max}$ 的位置 x/y_t	3.3	3.7	2.6	2.5	2.2	1.8
喷管出口 $\bar{r}_{P43}$ (微米)	2.3	2.1	2.7	2.9	2.2	2.7
比冲效率 η_{ts}	0.953	0.957	0.951	0.952	0.957	0.951

三、关于微粒轨迹

微粒运动轨迹与气体微团运动轨迹是不重合的。微粒的惯性比气体微团的惯性大，大直径微粒的惯性更大，与气流相比，它们在流动中不易改变方向。因此，在喷管收敛段，微粒越大越易靠近壁面，而轴线附近则小微粒的浓度较大；相反，在扩张段，越靠近喷管中心，大微粒浓度越大。关于微粒运动的轨迹，可参见图 1.5、图 3.24 和图 4.16(a)。计算表明，从喷管喉部到扩张段上游一段存在“无微粒区”（见图 4.15）。实际的观察表明，“无微粒区”也存在微粒沉积或微粒冲刷。这些微粒，有人认为可能是上游的沉积物熔化后流下来的，这只能解释有微粒沉积时的现象；也有人认为“无微粒区”的微粒是直接“打进去”的，理论计算的无微粒区是不真实的。孰是孰非，尚需通过进一步的研究和观测来鉴别。

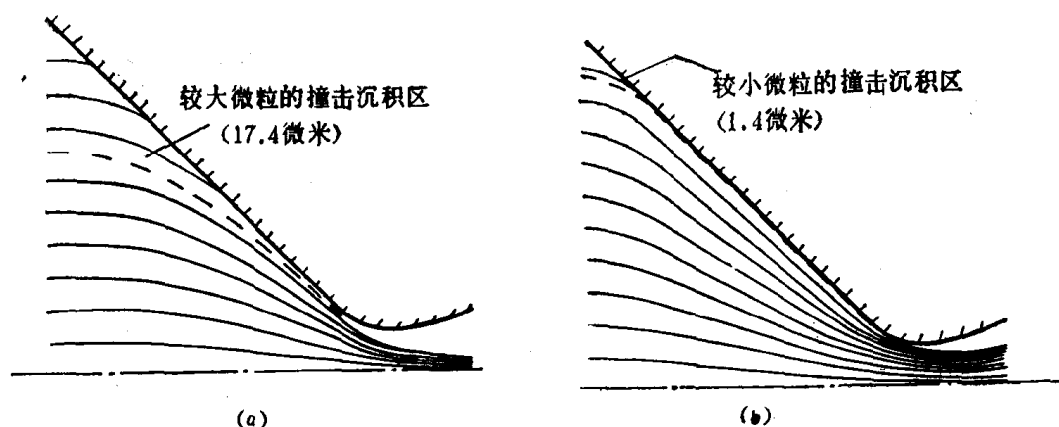


图 1.5 较大和较小微粒的流线

四、关于微粒的沉积或冲刷

Al_2O_3 微粒在喷管壁面上发生沉积或冲刷，是固体火箭发动机含铝推进剂燃气流动中特有的现象。要了解这种现象，必须研究其机理。

微粒在喷管壁面上是沉积还是冲刷，是与喷管壁温和热防护内衬的烧蚀率密切相关的。如果在发动机开始工作时喷管壁温上升较慢，壁面材料的烧蚀率又非常低，则当高温的 Al_2O_3 液相微粒与壁面撞击时，就可能迅速冷却凝固并粘结在壁面上，形成沉积层。这种沉积过程可能经历一段时间，只要喷管壁温相对于微粒的熔点仍然较低，撞击到壁面上的微粒就会继续冷却凝固而沉积。随着时间的推移，含沉积层的喷管壁温终究会不断升高，当沉积层表面达到熔化温度时，在高温气流的冲刷下，微粒已无法继续粘结在处于熔融状态的沉积表层上，甚至还有可能把熔化了了的沉积层“吹”向下游。

如果在发动机开始工作的阶段，喷管壁温能较快地上升到与 Al_2O_3 熔点相当的温度则液相微粒就较难在壁面上冷却凝固而沉积；再加上喷管的热防护内衬总有一定的烧蚀率，随着温度的升高，内衬材料的强度下降，抗气流冲刷的能力降低， Al_2O_3 微粒便加强了气流的烧蚀冲刷作用。

总之，究竟易发生沉积还是冲刷，关键是发动机工作开始阶段喷管壁温的高低（相对于 Al_2O_3 微粒的熔点而言）；而发动机工作开始阶段喷管壁温的高低，主要决定于热防护内衬的材料特性（主要是导热系数、烧蚀率、高温强度等）、喷管结构和燃气温度等。如果内衬

材料的导热性好，内衬的厚度大(热容量大)，燃气温度又不很高，则喷管壁温在开始阶段就比较低；反之，喷管壁温就很快升高。

在喷管收敛段，粒度较大和较小的微粒，其流线如图 1.5(a)、(b)所示。图中虚线表示所计算的那一种尺寸的微粒，最外一条不与壁面撞击的微粒流线。因此，此线以外的区域为微粒与壁面的撞击和沉积区。可见，由于运动的惯性，较大微粒在喷管收敛段有广泛的撞击沉积区，而小微粒能很快转向，撞击沉积区较小。因此，收敛段的沉积层主要是大微粒沉积形成的，小微粒在收敛段的沉积较少。直观地观察，收敛段沉积层中间一段比较粗糙，上下游，尤其是下游比较光滑(见图1.6)，这是沉积层熔化程度不同造成的结果。燃烧室压强和推进剂铝粉含量对沉积速率和沉积层厚度分布的影响见图 1.7(a)、(b)、(c)、(d)。由图可见，压强越高，沉积速率越高，但最后的沉积层厚度越薄；铝粉含量越大，沉积速率越高，沉积层厚度越厚。

喉部区的沉积或冲刷会引起喉径变化，因而引起燃烧室压强和推力变化。这种现象对长时间工作的小发动机更为敏感，甚至，在沉积严重时将引起发动机爆炸；冲刷严重时，当燃烧室压强降低到低于推进剂稳定燃烧的临界压强时易引起熄火。因此，喉部的沉积或冲刷更加受到重视。

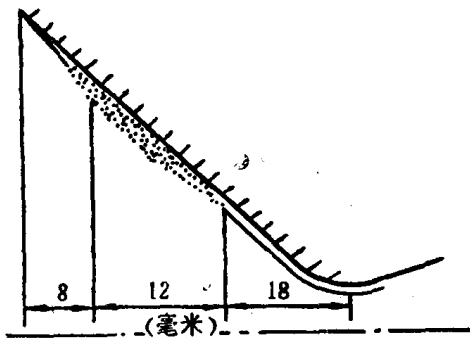
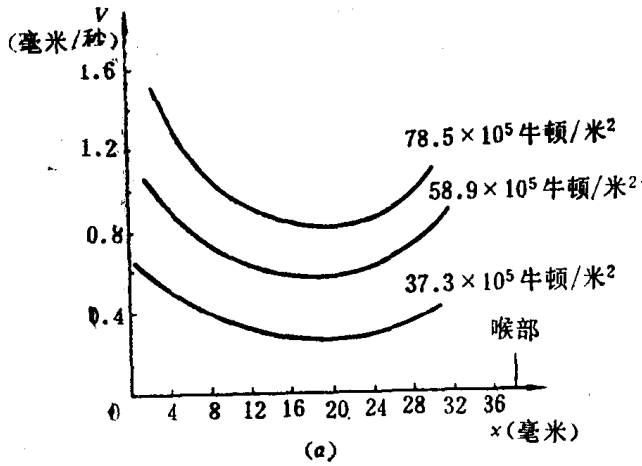
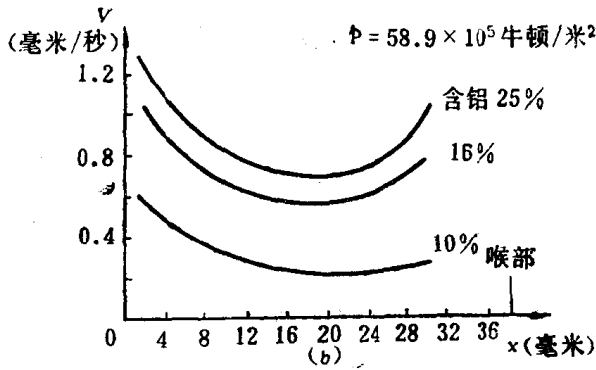


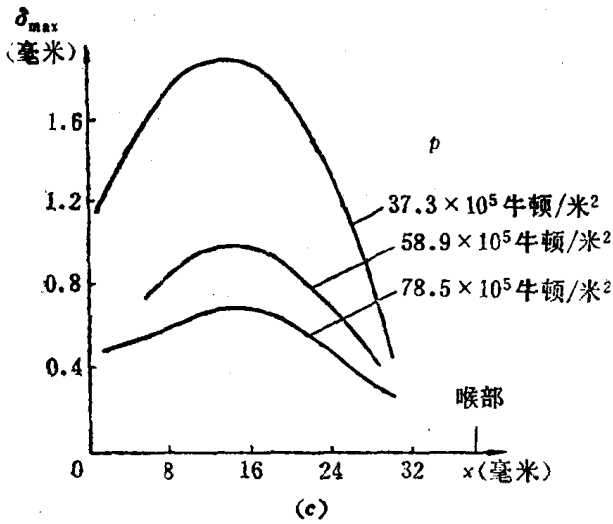
图 1.6 收敛段沉积的观察描绘



(a) 压强对收敛段沉积速率的影响



(b) 铝粉含量对收敛段沉积速率的影响



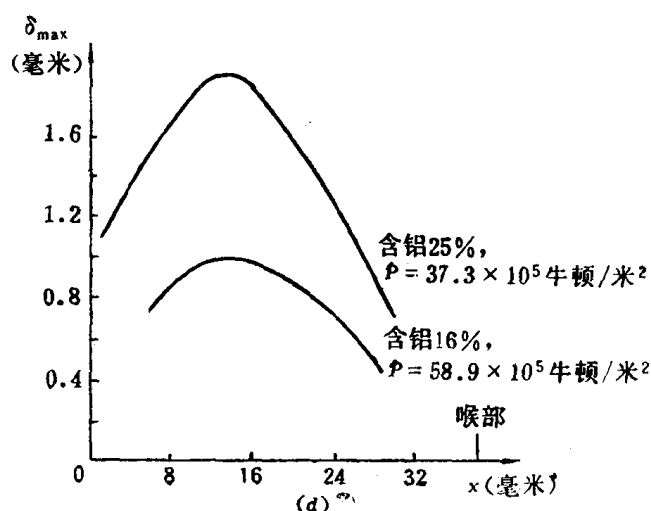
(c) 压强对收敛段沉积厚度的影响

图 1.7

图 1.8 (a)、(b) 是根据热试车换算得到的喉部沉积速率的变化曲线。影响喉部沉积速率的因素是多方面的, 如推进剂性能, 铝粉含量和粒度, 喉衬的材料特性和加工光洁度, 喉部的型面和结构设计等。文献[20]对喷管喉部的沉积和温度场提供了预估方法。

关于微粒在喷管扩张段的沉积或冲刷规律, 研究得还比较少。

根据理论计算的微粒轨迹, 在喷管喉部和扩张段上游存在无微粒区。按理说, 在无微粒区是不会发生微粒沉积或冲刷的。但是, 实际的解剖观察表明, 微粒的沉积或冲刷在二相流流过的喷管表面都会发生。这种矛盾现象, 如前所述, 需进一步研究解释。



(d) 铝粉含量对收敛段沉积厚度的影响

图 1.7

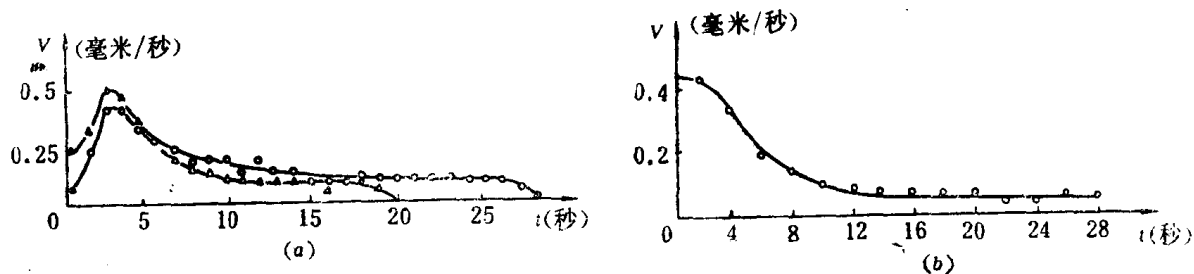


图 1.8 喉部沉积速率的变化曲线

关于喷管烧蚀的问题, 大多数以热化学烧蚀为基础, 其研究现状见文献[23], 本书第五章第 5.9 节对喷管烧蚀有部分论述。

五、微粒相变

在喷管流动中气流的温度变化是很剧烈的, 因此也需要考虑微粒材料密度随温度的变化以及微粒的相变模型。

微粒材料密度随温度的变化采用线性经验公式:

$$\rho_{mP} = \rho_{mP0} [1 - \alpha_p (T_P - T_0)] \quad (1.3.5)$$

式中各参数可取表 1.4 中之值。

表 1.4 材料密度经验公式中的参数值

相 态	参 数 值	ρ_{mP0} (公斤/米 ³)	α_p (1/°K)	T_0 (°K)
固态 Al_2O_3		3964.5	29.16×10^{-6}	294.4
液态 Al_2O_3		3013.0	373.14×10^{-6}	2327.0

在喷管二相流动过程中 Al_2O_3 微粒会发生相变, 即随着气流的加速降温, 微粒向气流放

热降温, 致使微粒由液相逐渐凝固而变为固相。

物质的熔化是在不变的熔化温度下进行的, 这一温度称为**平衡熔化温度** (T_M)。物质的凝固 (固化、结晶或熔合) 过程不是熔化过程的简单逆转, 而是一个较为复杂的动力过程。在凝固过程中, 物质由单一的液相, 经液、固异相, 逐渐转化为单一的固相。液滴的凝固过程, 开始时在单一的液相中由于降温、分子聚合而自然形成结晶核心, 然后在液相和已经形成的晶体固相之间的界面上形成新的核心, 凝固逐渐推进, 直至全部完成。

凝固温度 T_F 并不等于平衡熔化温度 T_M 。由实验得知, 对广泛的不同材料, $T_F = 0.8T_M$ 。当熔化了了的物质的温度 T_P 下降至低于凝固温度 T_F 时, 凝固结晶核心以很高的速率形成。在 T_F 以上, 结晶核心也缓慢地形成, 但并不具有实际的重要性。

根据单一的液相的凝固理论, 新核心的形成速率与温度呈指数关系。希利格 (Hillig) 和特恩伯尔 (Turnbull) 导得了液、固异相中凝固结晶核形成速率的表达式:

$$V = A(T_P - T_M)^n \quad (1.3.6)$$

实验指出, n 通常为 $1.7 \sim 1.8$ 。

在液滴的凝固过程中, 可以看到其亮度突然增加的现象。这是因为, 一旦结晶开始, 液相就释放凝固热, 使微滴的表面温度升高, 全部凝固时达到高峰; 微滴温度迅速升高的过程使其亮度突然增加。这种再炽现象证明了结晶速度概念的存在和液固异相结晶核心模型的合理性。

亨徒生 (Henderson) 用单相和异相晶核模型对某些喷管的微粒凝固作了计算和对比; 结果说明, 它们可以用于火箭发动机喷管, 并且因为微粒很小, 可以认为微粒温度 T_P 是均匀的。

液滴的凝固过程, 只有在其局部温度 T_P 冷却降低至低于平衡溶化温度, 达到 $0.8T_M$ 值以下时才开始。异相凝固模型认为, 液滴由外向里凝固。设结晶内表面到待凝固微滴中心的半径为 r_1 , 凝固时微滴释放的焓为 H_F 。微滴中的热量平衡可叙述为: 微滴中净积累的热量等于凝固释放的热量与气流、微粒间传递热量之和, 数学上表达为:

$$\frac{dT_P}{dt} = \frac{3r_1^2 \bar{\rho}_1 H_F}{r_P^3 \bar{\rho}_P c_P} \frac{dr_1}{dt} - \frac{3\dot{q}_p}{r_P \bar{\rho}_P c_P} \quad (1.3.7)$$

式中 $\frac{dr_1}{dt}$ 为晶核形成速率,

$$\frac{dr_1}{dt} = A(T_P - T_M)^n \quad (1.3.8)$$

式中, 常数取 $A = 0.72 \times 10^{-4}$ 厘米/秒 $\cdot ^\circ K^{1.8}$, $n = 1.8$ 。它们是对氧化锆测得的, 对氧化铝缺乏数据; 可以认为, 两种氧化物具有相同量级的值。

§ 1.4 凝相拟流体概念的引入

我们已经讨论了凝相微粒的一般性质, 这给我们研究二相流动提供了必不可少的条件。但是在着手研究二相流动时, 还有一个问题没有解决, 即: 我们如何处理无数凝相微粒与气体分子共存并相互作用而且一起流动这样一个混合体。气体是一种流体, 我们在研究气体流动时, 只要**克努生**准则满足, 一般都假设它为连续介质。那么对于凝相微粒群, 我们是否也可以假设它为“连续介质”呢?

对于火箭发动机中的燃气来说,一般把其中的凝相微粒群看成是一种“拟流体”,把燃气处理为气相流体和凝相微粒拟流体的一种混合流体。在这个混合流体中,气相流体相当于混合流体的一个组元,凝相微粒拟流体也可看成是混合流体的一个组元(或者按微粒的尺度大小分成若干组元)。对凝相微粒赋以拟流体的概念,实际上就是对凝相施用了连续介质的假设。这样,我们可以假想微粒充满整个容积,在空间的任意点上也存在着凝相微粒。也就是说,在空间同时存在着气相和凝相两种连续介质。对凝相引入“拟流体”和“连续介质”的概念之后,我们就可以避免研究无数微粒的运动状态和它们之间的相互作用,只需要掌握大量微粒的平均特性。

在气体动力学中曾经讨论过把气体假设为连续介质的问题。我们已经知道,只要所研究问题的特征尺寸比气体分子的平均自由行程大得多,就完全可以把气体作为连续介质来处理。对于散布在气体中的凝相微粒群来说,只要微粒尺度不很大,微粒质量分数不很低,所研究问题的特征尺寸不很小,一般来说,连续性假设也是可以满足的。当然,如果情况不是这样,就要考虑连续性假设是否合理。

有了拟流体的概念后,根据连续介质的理论,就有流场中某一空间点微粒密度(确切地讲,是微粒拟流体的密度)、微粒速度、微粒压强等概念。这里顺便提一下,当凝相容积比 $\phi \ll 1$ 时,微粒压强和气相压强相比是一个小量,为计算简单起见,常常略去不计。

如空间有一点 M , M 点处微粒拟流体的密度我们可参照一点处气体的密度定义为:

$$\rho_P = \lim_{\Delta\tau \rightarrow \Delta\tau'} \frac{\Delta m_P}{\Delta\tau} \quad (1.4.1)$$

式中 $\Delta\tau$ ——包围 M 点的一个小空间体积;

$\Delta\tau'$ —— M 点处微粒拟流体平均特性趋于某稳定值(不受微粒不规则运动的影响)所对应的最小 $\Delta\tau$ 值;

Δm_P —— $\Delta\tau$ 体积中的微粒质量。

这里再强调一下,流场中微粒的分密度与微粒的材料密度是两个概念。一点处所定义的微粒拟流体密度(简称**微粒密度**) ρ_P , 实际上就是满足连续介质条件下的微粒分密度的概念。

(1.4.1)式在计算实际流场中的微粒密度时是没有用的,仅仅是一个定义。

如果微粒大小均匀(半径为 r_P), M 点附近单位容积混合燃气中微粒数为 n_P , 每个微粒的质量为 m_P , 微粒的材料密度为 ρ_{mP} , 则 M 点处微粒密度可按下式计算:

$$\rho_P = n_P m_P = \frac{4}{3} \pi r_P^3 \rho_{mP} n_P \quad (1.4.2)$$

如果微粒大小是不均匀的,最小微粒直径是 $r_{P\min}$, 最大微粒直径是 $r_{P\max}$, M 点附近单位容积混合燃气中的微粒质量分布密度为 $f_M(r_P)$, 则该点处的微粒密度按下式计算:

$$\rho_P = \int_{r_{P\min}}^{r_{P\max}} f_M(r_P) dr_P \quad (1.4.3)$$

空间中某点 M 处微粒拟流体的速度,可以认为是容积 $\Delta\tau'$ 中微粒速度对质量的平均,即:

$$\bar{V}_P = \lim_{\Delta\tau \rightarrow \Delta\tau'} \frac{\sum_{i=1}^{n_P} V_{Pi} m_{Pi}}{\sum_{i=1}^{n_P} m_{Pi}}$$

如果微粒大小不均匀,不同尺寸的微粒具有不同的速度,已知单位体积中微粒的质量分

布密度为 $f_M(r_P)$ ，则 M 点处微粒拟流体的速度按下列平均速度计算：

$$\bar{V}_P = \frac{1}{\rho_P} \int_{r_{P\min}}^{r_{P\max}} V_P(r_P) f_M(r_P) dr_P \quad (1.4.4)$$

如果微粒大小均匀，各微粒有同一速度，则一点处微粒拟流体的速度就是实际微粒的宏观运动速度。

与一点处速度的平均值计算式 (1.4.4) 类似，可以引出微粒尺寸不均匀分布时其它物理参量在一点处的平均值。设 $\Phi(r_P)$ 是一个随微粒半径 r_P 变化的标量或矢量，则对全部分布的微粒尺寸来说， $\Phi(r_P)$ 的平均值为：

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\rho_P} \int_{r_{P\min}}^{r_{P\max}} \Phi(r_P) f_M(r_P) dr_P \quad (1.4.5)$$

引进了拟流体概念之后，在空间任意点上不仅充满着真实气体，同时还存在着拟流体；不仅有真实气体的流动参数和热力特性，同时还存在着微粒拟流体的流动参数和热力特性。二相混合物就象是二种气体的混合物一样，许多有关混合气体的热力特性，都可相应地针对二相混合物来写。例如，二相混合物的压强、密度、比热、比热比、内能、热焓等可分别写成如第 1.6 节中表达式 (1.6.14)、(1.6.16)、(1.6.29)、(1.6.30)、(1.6.25) 和 (1.6.26) 的形式。

由于引进了拟流体的概念，我们可以象研究气体一样，用参数场的方法来研究凝相微粒群的运动；从这一点讲，它给研究工作带来很大的方便。但是要建立控制这种混合气体运动的基本方程，还不能简单地用混合气体代替真实气体而采用类似纯气相的控制方程。其原因很简单：在一般情况下，微粒与气相之间存在着相互作用，使凝相微粒相对于气相产生速度滞后和温度滞后；这种相互作用与两种纯气体混合时气体分子之间的相互作用性质是不同的，因为凝相微粒尽管很细，一般也具有微米的量级，但这个尺寸远远大于分子的尺寸。如果说，气体分子的运动从气体分子运动论的角度看取决于分子周围的力势，那么，凝相微粒的运动特性就要由流体绕流物体时的一般流体动力学来决定。总而言之，凝相微粒与气相分子之间的质量传递、动量传递和能量传递，是与两种气体混合时分子之间的这类传递作用完全不同的。这样，就决定了在研究二相流动时，不仅要把二相分开来处理，而且还要从微观上考察单个微粒与气流（并非气体分子）之间的相互作用。从这个意义上说，我们把凝相还只能看成是一种“拟”流体，而不能看成是一般意义上的真正的流体。

在下面一节里，我们就具体分析凝相微粒与气相之间的相互作用。

§ 1.5 凝相与气相间的相互作用

含铝推进剂燃烧产物中含有 Al_2O_3 的凝相微粒，因此燃气的流动为二相混合物的流动。二相流动的直接结果，表现为产生相当大的流动损失。二相流动损失的原因是：

1. 气体燃烧产物在流动中加速时带动着微粒加速，但微粒并不加速到与气体燃烧产物相同的速度（速度滞后）。这说明气相对凝相有推动力，或者说凝相对气相有阻力。
2. 气体燃烧产物在加速流动中降温，温度较高的凝相微粒向气相传热，但微粒的温度没有流动燃气降低得那样快（温度滞后）。微粒带走了更多的热，使热损失增加。

3. 微粒对压强没有作出贡献, 微粒在流动中不会膨胀做功。

前两点也说明了凝相与气相之间作用着力和存在热交换。我们可通过单个微粒的动量和能量方程来详细讨论凝相与气相间的这两种相互作用。为简单起见, 假设流动是一维的。

一、单个微粒与气流间的作用力

设气流中的微粒是半径为 r_p 的小球, 材料密度为 ρ_{mp} , 则单个微粒的质量

$$(\text{质量})_p = \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_{mp} \quad (1.5.1)$$

如果离散的微粒间相互没有作用, 则单个球形微粒的动量传输方程可写成下面的形式:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_{mp} \frac{dV_p}{dt} = & \delta F_D - \frac{4}{3}\pi r_p^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\pi r_p^3 \cdot \frac{1}{2}\rho \left(\frac{dV}{dt} - \frac{dV_p}{dt} \right) \\ & + \delta \left\{ 6r_p^2 \sqrt{\pi \rho \mu} \int_0^t \left[\left(\frac{dV}{dt'} - \frac{dV_p}{dt'} \right) / \sqrt{t-t'} \right] dt' \right\} \\ & + \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_{mp} \delta B \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

式中 δ 表示不精确的微分, B 是单位质量的彻体力。

方程(1.5.2)是考虑各种力时单个微粒在气流中运动的牛顿第二定律表达式。等式左边是微粒质量和加速度的乘积, 等式右边是气流中单个小球所受的各种力。等式右边第一项为气流对单个微粒作用的粘性阻力; 第二项是由气流压强梯度引起的轴向浮力; 第三项称为**表观质量力**, 是微粒相对于气流加速或减速时表现出来的平均附加质量力; 第四项是贝塞特(Basset)力, 它是由非稳态粘性流场的影响产生的, 这种力是全部运动历程的函数; 第五项是彻体力, 只考虑重力时为 $\frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_{mp} g$ 。在固体火箭发动机中, 最重要的是粘性力, 其它各力与之相比都是可以忽略的小量。这样, 动量方程(1.5.2)就具有最简单的形式, 即:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_{mp} \frac{dV_p}{dt} &= \delta F_D \\ \text{或} \quad (\text{质量})_p V_p \frac{dV_p}{dx} &= \delta F_D \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

由于微粒对气流的压强没有贡献, 因此动量方程中是没有压力项的。动量方程中, 微粒在气流中运动的粘性力 δF_D 常表示为阻力系数 C_D 、迎风面积和相对运动动压头之乘积, 即

$$\delta F_D = C_D (\pi r_p^2) \frac{1}{2} \rho (V - V_p) |V - V_p| \quad (1.5.4)$$

将(1.5.4)式代入(1.5.3)式, 得:

$$V_p \frac{dV_p}{dx} = \frac{3}{8} \frac{\rho C_D}{\rho_{mp} r_p} (V - V_p) |V - V_p| \quad (a)$$

斯托克斯(Stokes)流动区($Re < 0.1$)的阻力系数 $C_{D,s}$ 为

$$C_{D,s} = \frac{24}{Re} = \frac{24\mu}{2r_p \rho |V - V_p|} \quad (b)$$

将(b)式代入(a)式, 得:

$$V_p \frac{dV_p}{dx} = \frac{9}{2} \frac{\mu C_D}{\rho_{mp} r_p^2 C_{D,s}} (V - V_p) \quad (c)$$

$$\text{令} \quad A_D = \frac{9}{2} \frac{\mu C_D}{\rho_{mP} r_P^2 C_{D,s}} \quad (1.5.5)$$

因此, 单个微粒的动量方程为:

$$V_P \frac{dV_P}{dx} = A_D (V - V_P) \quad (1.5.6)$$

在计算中, 需要事先确定二相流的阻力系数 C_D 。

二、单个微粒与气流间的热交换

假设每一个微粒都是不可压缩的, 则微粒与气体间的热交换仅改变微粒的焓, 因此有:

$$\frac{4}{3} \pi r_P^3 \rho_{mP} \frac{dh_P}{dt} = \delta \dot{Q}_P$$

或

$$(\text{质量})_P V_P \frac{dh_P}{dx} = \delta \dot{Q}_P \quad (1.5.7)$$

这一热交换形式也就是微粒的能量方程。

设微粒与气流间的热交换为对流传热, 对流传热系数为 h , 则

$$\delta \dot{Q}_P = h(4\pi r_P^2)(T - T_P) \quad (1.5.8)$$

对流传热系数可以通过努赛尔 (Nusselt) 数 Nu 来确定:

$$h = \frac{Nu \lambda}{2r_P} \quad (1.5.9)$$

式中 λ 是气体的导热系数, 由普朗特 (Prandtl) 数 Pr 确定:

$$\lambda = \frac{c_P \mu}{Pr} \quad (1.5.10)$$

将(1.5.8)式代入(1.5.7)式, 得:

$$V_P \frac{dh_P}{dx} = \frac{3h}{\rho_{mP} r_P} (T - T_P) \quad (a)$$

将(1.5.9)式、(1.5.10)式代入(a)式得:

$$V_P \frac{dh_P}{dx} = \frac{3}{2} \frac{\mu c_P Nu}{\rho_{mP} r_P^2 Pr} (T - T_P) \quad (b)$$

令

$$B_D = \frac{3}{2} \frac{\mu c_P Nu}{\rho_{mP} r_P^2 Pr} \quad (1.5.11)$$

得单个微粒的能量方程为:

$$V_P \frac{dh_P}{dx} = B_D (T - T_P) \quad (1.5.12)$$

在计算中需要事先确定二相流的努赛尔数 Nu 。

三、阻力系数 C_D 和努赛尔数 Nu

早期认为, 喷管中的二相流动是斯托克斯流动, 且不考虑气流的可压缩性和稀薄效应等因素的影响。这时, 圆球的阻力系数为:

$$C_{D,s} = \frac{24}{Re} \quad (1.5.13)$$

努赛尔数为:

$$Nu_s = 2 \quad (1.5.14)$$

实际上，喷管中的流动并不是斯托克斯流动，影响 C_D 和 Nu 的因素也很多。为了确定确切的 C_D 和 Nu 值，需要对固体火箭发动机喷管流动的特点作更深入的分析。

我们来研究雷诺数、马赫数和克努生 (Knudsen) 数沿长度的变化。它们分别由下列各式来计算：

$$Re = \frac{2r_p \rho |V - V_p|}{\mu} \quad (1.5.15)$$

$$Mr = \frac{|V - V_p|}{a} \quad (1.5.16)$$

$$Kn = \frac{\lambda}{2r_p} = 1.256 \sqrt{\gamma} \frac{Mr}{Re} \quad (1.5.17)$$

式中， λ 为气体分子间的平均自由程。

根据计算，典型喷管中 Re 、 Mr 、 Kn 沿喷管长度的变化如图 1.9 所示。

由图 1.9 可看到：(1) Re 在亚音速区由于微粒速度滞后迅速增加而增大；在超音速区由于气体密度减小而减小；在 $Mr=1$ 附近有一极大值。整个喷管流动，除进口截面附近外，都是 $Re \gg 0.1$ 的非斯托克斯流动，因此惯性力对阻力系数和传热的影响必须考虑。(2) Mr 沿喷管长度是逐渐增大的，在 $Mr=1$ 附近增加得最快。在喷管大部分长度的流动中 $Mr > 0.4$ ，因此气流可压缩性的影响也必须考虑。(3) Kn 也沿喷管长度渐增，在喷管出口附近增加得较快。在喷管绝大部分长度的流动中， $Kn > 0.01$ 。由图 1.10 可见，喷管中的二相流动大多处于滑移流和过渡流状态，因此必须考虑稀薄效应的影响。

此外，下列诸因素也影响 C_D 和 Nu ：微粒的转动将产生一个升力，形状不同于圆球的微粒转动时将产生一个力矩；气流的湍流度将对微粒阻力和传热产生影响，尤其是在雷诺数接近临界值时；微粒表面的粗糙度对阻力和传热也有影响，特别是微粒尺寸不是太小，以及雷诺数接近临界值时。这些众多的复杂因素很难一一量地确定。

我们以斯托克斯流动时的 $C_{D,s}$ 和 Nu_s 为基础，考虑 Re 、 Mr 、 Kn 的修正，用经验公式表示实际流动中的 C_D 和 Nu 。修正的形式表示为：

$$C_D = C_{D,s} \cdot f(Re) \cdot f(Mr) \cdot f(Kn) = C_{D,s} \cdot f \quad (1.5.18)$$

$$Nu = Nu_s \cdot g(Re) \cdot g(Kn) = Nu_s \cdot g \quad (1.5.19)$$

式中 $f(Re)$ 、 $g(Re)$ ——考虑惯性项影响的修正因子；

$f(Mr)$ ——考虑可压缩性的修正因子；

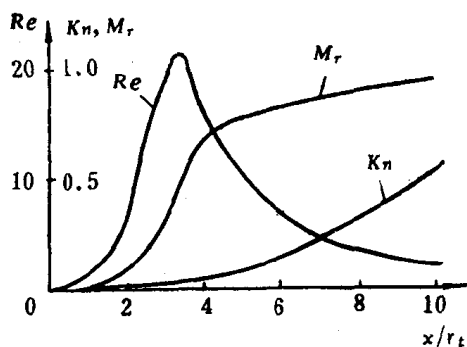


图 1.9 典型喷管中 Re 、 Mr 、 Kn 沿喷管长度的变化

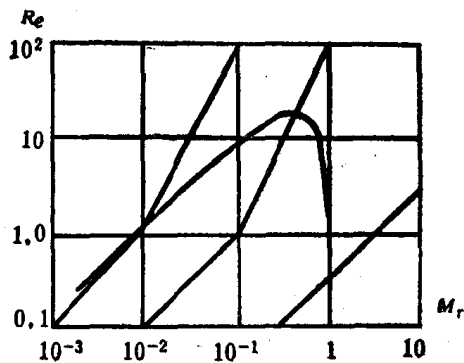


图 1.10 典型喷管中的二相流动状态

$f(Kn)$ 、 $g(Kn)$ ——考虑稀薄效应影响的修正因子；

f 、 g ——综合修正因子。

图 1.11 描绘了阻力系数各修正因子沿喷管长度的变化。由图 1.11 对照图 1.9 可见： $f(Re)$ 沿喷管长度的变化几乎与雷诺数的变化成正比。 $f(Kn)$ 则与稀薄效应有关，其值由于稀薄效应沿喷管长度越来越强而越来越小。至于 $f(M_r)$ ，当 $M_r < 0.4$ ，可压缩性的影响不明显时， $f(M_r) = 1$ ；而马赫数较大时， $f(M_r) > 1$ ，且因稀薄效应有减弱可压缩性影响的作用，故随稀薄效应的加强而呈缓慢减小。三者相比， $f(Re)$ 影响最大， $f(M_r)$ 影响最小。在整个喷管中，修正因子 $f(Re)$ 、 $f(M_r)$ 大于 1，说明惯性和可压缩性的影响使阻力系数增大； $f(Kn)$ 小于 1，即稀薄效应使阻力系数减小。三者综合的影响由 f 表明，它在稀薄效应不很显著时大于 1，而当稀薄效应显著时小于 1。

传热努赛尔数 Nu 的修正因子，由图 1.12 可见， $g(Re)$ 、 $g(Kn)$ 、 g 与 $f(Re)$ 、 $f(Kn)$ 、 f 有类似的变化规律。 $g(Re)$ 大于 1， $g(Kn)$ 小于 1，这说明：考虑二相间的相对运动时增加二相间的传热，而稀薄效应则减小二相间的传热。表明综合影响的 g ，在稀薄效应不显著时大于 1，稀薄效应显著时小于 1。

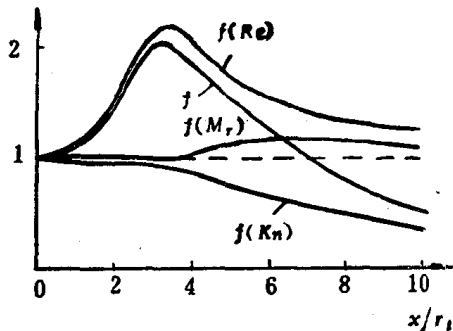


图 1.11 典型喷管中阻力系数修正因子沿喷管长度的变化

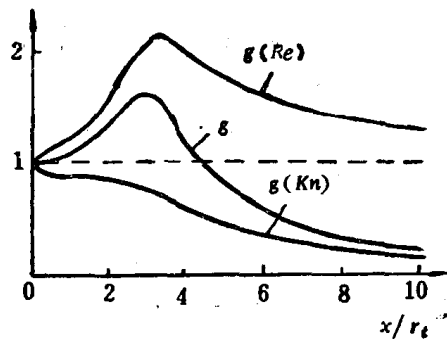


图 1.12 典型喷管中 Nu 的修正因子沿喷管长度的变化

事实上，阻力系数 C_D 和努赛尔数 Nu 都用经验公式表示。这些公式因试验条件，考虑因素多寡，综合时所用数学方法和应用范围的不同而有种类繁多的形式。在此推荐适合实际工程计算又比较精确的公式如下：

当 $Re < 0.1$ 时，

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (1.5.20)$$

当 $0.1 < Re < 1$ 时，

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3Re}{16} \right) \quad (1.5.21)$$

当 $Re > 1$ 时，

$$C_D = (C_{D0} - 2) \exp \left[-3.07 \sqrt{\gamma} \frac{M_r}{Re} G(Re) \right] + \frac{h(M_r)}{\sqrt{\gamma} M_r} \exp \left(-\frac{Re}{2M_r} \right) + 2 \quad (1.5.22)$$

式中

$$C_{D0} = \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687})$$

$$Re = \frac{2\rho r_P |V - V_P|}{\mu} \cdot \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}}$$