

理科数学

欧维义 编

FU BIAN
HAN
SHU LUN

复 变 函 数 论

吉 林 大 学 出 版 社

复变函数论

欧维义 编

吉林大学出版社

内 容 提 要

本书是作者根据为数学物理方法课程编写的《复变函数论》讲义修改而成的。内容包括：复数和复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数表示、留数理论及其应用、保形映射等六章。

本书取材适当，思路清晰，文字简洁，重点突出，适用面广，便于自学和启发式教学。

本书可作为综合大学、师范院校以及理工科有关专业的教材或参考书；同时也可供广大科技工作者、从事理工科教学的青年教师与理工科的高年级学生和研究生参考。

复 变 函 数 论

欧 维 义 编

*

吉林大学出版社出版 吉林大学印刷厂印刷

吉林省新华书店发行

850×1168 大32开 9.75印张 239,000字

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数：1—3,600册

ISBN 7—5601—0037—6/0·6

统一书号：13323·25 定价：2.30元

出版说明

根据教学需要，我们出版了这套《吉林大学本科生教材》，这套教材适合高等学校本科生基础课或选修课的教学，由我社逐年陆续出版。

吉林大学出版社

序

本书是编者根据为吉林大学数学系力学专业、理科物理、化学各专业所开设的数学物理方法课程编写的〈复变函数论〉讲义修改而成。同属于数学物理方法课程的内容，还有数学物理方程和特殊函数及其应用。其中的数学物理方程，已于1985年由吉林科学技术出版社出版。

本书除讲授复变解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论和保形映射等常规内容外，还注重讲了非数学类复变函数论教材较少讲的，有关支点、支割线、多值函数单值化、黎曼面、多值函数的围道积分等有理论和实用价值的内容；在选材和习题的配备上，既注重计算技能的训练，又适当地强调了逻辑推理、分析证明能力的培养；在写法上，力求思想清晰，简明扼要，通俗易懂，以利于自学和启发式教学。

本书在编写过程中，得到江泽坚教授的指导和帮助，得到陈维钧、王毅、高玉环、卢喜观、金德俊等同志的帮助。在此，谨向他们致以谢意。

由于编者水平所限，错误和不妥之处，谨请读者指正。

编者

1987年3月于吉林大学

DAA40/10

目 录

第一章 复数和复变函数	(1)
§1 复数的代数运算和共轭运算	(1)
1.1 复数的概念	(1)
1.2 复数的代数运算	(1)
1.3 复数的共轭运算	(3)
§2 复数的几何表示法	(5)
2.1 复数的点表示法	(5)
2.2 复数的极坐标表示法	(6)
2.3 复数的向量表示法	(9)
2.4 无穷远点和复数的球面表示法	(11)
§3 方根和曲线的复数方程	(13)
3.1 模与幅角的运算	(13)
3.2 方根	(18)
3.3 曲线的复数方程	(19)
§4 复变函数	(24)
4.1 函数的定义	(24)
4.2 函数的表示法	(25)
4.3 函数的定义域	(25)
4.4 复变函数的几何表示——映射	(28)
4.5 反函数和逆映射的概念	(32)
§5 函数的极限与连续性	(37)
5.1 函数的极限	(37)
5.2 函数的连续性	(37)

5.3	连续函数的基本性质	(39)
第二章	解析函数	(42)
§1	可微函数	(42)
1.1	可微函数的定义及其判别定理	(42)
1.2	微商的运算法则	(48)
1.3	微商的几何意义	(48)
§2	解析函数	(52)
2.1	解析函数的定义	(52)
2.2	解析函数的运算法则	(55)
2.3	解析函数的判别定理	(56)
2.4	解析函数与调和函数	(59)
§3	初等函数	(63)
3.1	指数函数	(63)
3.2	三角函数	(64)
3.3	双曲函数	(66)
3.4	根式函数	(67)
3.5	对数函数	(77)
§4	平面场与解析函数	(81)
4.1	复变函数与平面场	(81)
4.2	流量与环量	(82)
4.3	无源无汇无旋的平面流速场	(84)
4.4	势函数和流函数	(84)
4.5	平面流速场的复势	(85)
第三章	复变函数的积分	(91)
§1	积分的定义和计算公式	(91)
1.1	一些规定	(91)
1.2	积分的定义	(92)
1.3	复积分与实函数的曲线积分	(93)

1.4	复积分的计算公式	(94)
1.5	复积分的基本性质	(95)
§2	柯西积分定理	(100)
2.1	单连通区域上的柯西积分定理	(100)
2.2	复积分的牛顿-莱布尼茨公式	(101)
2.3	复连通域上的柯西积分定理	(104)
§3	柯西积分公式和微商公式	(109)
3.1	解析函数的积分表达式	(109)
3.2	解析函数的无穷次可微性质	(113)
3.3	柯西型积分及其性质	(116)
§4	解析函数的一些重要性质	(120)
4.1	平均值定理与最大模原理	(120)
4.2	柯西不等式	(123)
4.3	刘维尔定理与代数基本定理	(124)
§5	解析函数的等价条件	(127)
5.1	柯西积分定理的推广	(127)
5.2	柯西积分定理的逆定理	(127)
5.3	解析函数的等价条件	(128)
第四章	解析函数的幂级数表示	(129)
§1	复数值级数	(129)
1.1	收敛、发散概念	(129)
1.2	收敛判别法	(130)
§2	复函数级数	(137)
2.1	收敛域的概念和逐点收敛准则	(137)
2.2	一致收敛的概念及其判别法	(139)
2.3	和函数的性质	(142)
§3	幂级数	(147)
3.1	幂级数的敛散性质	(147)
3.2	收敛域的结构和求法	(148)

3.3	和 数的性质	(149)
§4	解析函数的泰勒展开及其应用	(150)
4.1	泰勒展开定理	(150)
4.2	内部唯一性定理	(156)
4.3	解析函数在零点附近的性质	(159)
§5	解析函数的罗朗展开	(164)
5.1	罗朗级数和它的收敛域	(164)
5.2	环上解析函数的罗朗展开	(166)
§6	解析函数的孤立奇点	(174)
6.1	孤立奇点与非孤立奇点	(174)
6.2	孤立奇点的分类	(175)
6.3	孤立奇点的类型判别	(177)
6.4	无穷远孤立奇点	(182)
第五章 留数理论及其应用		(187)
§1	留数基本定理	(187)
1.1	留数的定义和留数基本定理	(187)
1.2	留数的计算方法	(188)
1.3	函数在无穷远点的留数	(192)
§2	留数定理在积分计算上的应用	(198)
2.1	在自变量变换下, 可化为围道积分的积 分	(198)
2.2	化定积分为围道积分的封闭化方法	(201)
2.3	在封闭化方法下, 可化为围道积分的积 分	(206)
§3	儒歇定理及其应用	(219)
3.1	对数留数定理和儒歇定理	(219)
3.2	幅角原理	(224)
3.3	解析映射的保域性质	(226)

第六章 保形映射	(230)
§1 解析映射的一般性质	(230)
1.1 映射的基本概念.....	(230)
1.2 解析映射的一般性质.....	(231)
§2 分式线性映射	(236)
2.1 特殊型的分式线性映射.....	(236)
2.2 分式线性映射的保形性.....	(239)
2.3 三对对应点唯一决定一分式线性映射.....	(242)
2.4 分式线性映射的保圆性.....	(244)
2.5 分式线性映射把对称点变为对称点.....	(244)
2.6 分式线性映射的应用例子.....	(246)
§3 初等函数构成的保形映射	(249)
3.1 角域到角域的映射.....	(249)
3.2 带域到角域的映射.....	(253)
§4 儒科夫斯基映射	(257)
4.1 儒科夫斯基映射.....	(257)
4.2 儒科夫斯基映射的逆映射.....	(261)
4.3 机翼剖面外部区域到圆外部的保形映射.....	(262)
4.4 圆柱绕流问题.....	(266)
答案与提示	(269)

第一章 复数和复变函数

§1 复数的代数运算和共轭运算

1.1 复数的概念

复数 由实数 x, y 和虚数单位 i 构成的数

$$z = x + iy \text{ (或 } z = x + yi \text{)}$$

称为复数, x 称为复数 z 的实部, y 称为复数 z 的虚部, 分别记为

$$x = \operatorname{Re}z, \quad y = \operatorname{Im}z$$

Re 是拉丁文 *Realis* (实的) 开首两个字母, Im 是 *Imaginaris* (虚的) 开首两个字母。

虚部为零的复数就可看作实数, 即

$$x + i \cdot 0 = x$$

因此, 全体实数是全体复数的一部分。实部为零的复数称为纯虚数。

共轭复数 我们把实部相同而虚部为相反数的两个复数 $x + iy$ 和 $x - iy$ 称为共轭复数。与 $z = x + iy$ 共轭的复数记为 \bar{z} , 即

$$\overline{x + iy} = x - iy$$

显然复数共轭的概念是相互的, 即若 $\bar{z}_1 = z_2$, 则有 $\bar{z}_2 = z_1$ 。

2 复数的代数运算

复数的相等 我们说两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相等, 就是指它们的实部和虚部分别相等, 即

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

当且仅当

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

复数的加(减)法 两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 相加(减)是那样的一个复数, 它的实部是 z_1, z_2 的实部与实部相加(减), 它的虚部就是 z_1, z_2 的虚部与虚部相加(减), 即

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

复数的乘法 两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 及 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相乘, 可按分配律法则计算, 并且将结果中的 i^2 换成 -1 , 即

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

复数的除法 两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 及 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相除(除数 $\neq 0$), 先将分子分母同乘以分母的共轭复数, 再进行简化, 即

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0) \end{aligned}$$

依据代数运算的定义, 不难证明, 复数的加(减)法、乘法运算满足法则,

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad (\text{交换律})$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad (\text{结合律})$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (\text{分配律})$$

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \quad (\text{结合律})$$

例1.1 设

$$z = \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$$

求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, z \bar{z}$.

解 由

$$z = \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i} = \frac{i^2 + (1-i)^2}{(1-i)i}$$

$$= \frac{-1-2i}{1+i} = \frac{(-1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-3-i}{2}$$

得

$$\operatorname{Re}z = -\frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im}z = -\frac{1}{2}$$

$$z\bar{z} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

例1.2 设 $z_1 = 3+4i, z_2 = 1-2i$, 求 $\frac{z_1}{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 由

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

得

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -1-2i$$

1.3 复数的共轭运算

根据共轭复数的定义, 不难证明共轭复数有如下性质 (证明留作习题):

$$1) \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2;$$

$$2) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0);$$

$$3) \quad \bar{\bar{z}} = z;$$

$$4) \quad z\bar{z} = [\operatorname{Re}z]^2 + [\operatorname{Im}z]^2 = |z|^2;$$

$$5) \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}z, \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}z.$$

例1.3 设 z_1, z_2 为两个任意复数, 证明:

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

证 由共轭运算性质1), 3), 5), 推出

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 &= z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \bar{\bar{z}}_2 \\ &= z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \end{aligned}$$

习 题

1. 将下列复数 z 表示成 $x+iy$ 的形式, 并求它的实部、虚部和共轭复数:

$$1) \frac{1}{3+2i} \qquad 2) \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$$

$$3) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i} \qquad 4) i^8 - 4i^{21} + i$$

$$5) \left(\frac{3+4i}{1-2i} \right)^2 \qquad 6) \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^8$$

2. 由等式

$$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$$

求 x 和 y .

3. 若 $(x+iy)^2 = a+ib$, 证明

$$x+iy = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right)$$

其中

$$\operatorname{sgn} b = \begin{cases} 1, & b > 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases}$$

4. 若 x_n, y_n 为实数, 并且

$$x_n + iy_n = (1 - i\sqrt{3})^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

则

$$x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = 4^{n-1} \sqrt{3}$$

5. 设 $z = x+iy, y \neq 0, z \neq \pm i$, 则当且仅当 $x^2 + y^2 = 1$ 时, $z/(1+z^2)$ 才是实数.

6. 证明:

1) 复数 z 为实数的充要条件是: $z = \bar{z}$;

2) 设 z_1, z_2 是两个复数, 若 $z_1 \cdot z_2$ 和 $z_1 + z_2$ 都是实

数, 则 z_1 和 z_2 或者都是实数, 或者是一对共轭复数.

7. 若多项式

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

的系数是实数, 则

$$\overline{P(z)} = P(\bar{z})$$

8. 设 z_1, z_2 是两个复数, 求证

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

9. 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ 是 (复的或实的) 常数, 则

$$1) \quad |\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2|^2 = (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2) \times (|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2) - |\alpha_1 \bar{\beta}_2 - \alpha_2 \bar{\beta}_1|^2$$

$$2) \quad \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 - \sum_{1 < k < j < n} |\alpha_k \bar{\beta}_j - \alpha_j \bar{\beta}_k|^2$$

$$3) \quad \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |\beta_j|^2$$

其中的2)是著名的拉格朗日(Lagrange)恒等式, 3)是著名的施瓦兹(Schwarz)不等式.

§2 复数的几何表示法

无论从复变函数的应用, 还是从运用形象方法来研究复变函数, 讨论复数的几何表示法都是非常重要的.

2.1 复数的点表示法

在平面上取定直角坐标系 Oxy 后, 对一复数 $z = x + iy$, 规定它和平面上的点 $M = (x, y)$ 对应; 反过来, 对平面上的一点 $M(x, y)$, 规定它和复数 $z = x + iy$ 对应 (见图1.1).

这样, 我们就把复数 $z = x + iy$ 和平面点 $M(x, y)$ 建立了一一对应关系. 在建立了平面上的一切点组成的集合与一切复

数构成的集合的一一对应之后，我们就可把复数 $z = x + iy$ 和点 $M(x, y)$ 当作同意语。

今后，我们把实现这种对应关系的桥梁——直角坐标系 Oxy 的 x 轴称为实轴， y 轴称为虚轴。把和复数建立了一一对应关系的平面称为复数平面或 z 平面。

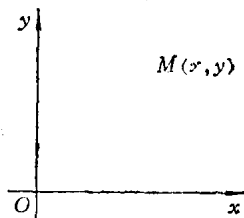


图1.1

2.2 复数的极坐标表示法

习惯上，把表示式

$$z = x + iy$$

称为复数的直角坐标表示。利用直角坐标与极坐标间的关系式

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

和欧拉 (Euler) 公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ，便可将 $z = x + iy$ 写成

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = re^{i\theta}$$

复数的这种表示称为极坐标表示，亦称为三角函数表示和指数函数表示 (见图 1.2)。式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 θ 分别叫做 z 的模 (或绝对值) 与幅角，记为

$$r = |z|, \quad \theta = \text{Arg } z$$

关于复数的模、幅角，应当指出下面几点：

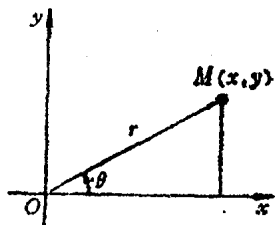


图1.2

1) 复数的模 关于复数的模，显然有

$$|\text{Re}z| \leq |z|, \quad |\text{Im}z| \leq |z|$$

由 $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ ，又有

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

2) 复数的幅角 任一不为 0 的复数 z ，有无穷多个幅角。实际上，若 θ_0 是 z 的一个幅角，则

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

都是 z 的幅角。以后我们把 $z (\neq 0)$ 的满足条件

$$-\pi < \theta_0 \leq \pi$$

的幅角 θ_0 称为 $\text{Arg}z$ 的主值 (亦称主幅角), 记为 $\theta_0 = \arg z$ 。因此

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

复数幅角的主值概念和反三角函数的主值概念是类似的。

复数 $z = 0$ 的幅角是不定的, 所以 $z = 0$ 是唯一没有定义幅角的复数。

3) 主幅角的求法 给定一个复数 $z = x + iy \neq 0$, 我们如何求它的主幅角呢?

鉴于

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \quad -\pi < \arg z \leq \pi$$

$$\text{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + n\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$$

及图 1.3

