理科数学

欧维义 编

FU BIAN
HAN
SHU LUN

复变函数论

吉林大学出版社

复变函数论

欧维义 编

吉林大学出版社

内 容 提 要

本书是作者根据为数学物理方法课程编写的《复变函数论》讲义修改而成的。内容包括：复数和复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数表示、留数理论及其应用、保形映射等六章。

本书取材适当，思路清析，文字简洁，重点突出，适用面广，便于自学和启发式教学。

本书可作为综合大学、师范院校以及理工科有关专业的教材或参考书；同时也可供广大科技工作者、从事理工科教学的青年教师与理工科的高年级学生和研究生参考。

复变函数论

欧 维 义 编

*

吉林大学出版社出版 吉林大学印刷厂印刷
吉林省新华书店发行
850×1168 大32开 9.75印张 239,000字
1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷
印数：1—3,600册

ISBN 7—5601—0037—6/0·6
统一书号：13323·25 定价：2.30元

出 版 说 明

根据教学需要，我们出版了这套《吉林大学本科生教材》，这套教材适合高等学校本科生基础课或选修课的教学，由我社逐年陆续出版。

吉林大学出版社

序

本书是编者根据为吉林大学数学系力学专业、理科物理、化学各专业所开设的数学物理方法课程编写的〈复变函数论〉讲义修改而成。同属于数学物理方法课程的内容，还有数学物理方程和特殊函数及其应用。其中的数学物理方程，已于1985年由吉林科学技术出版社出版。

本书除讲授复变解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论和保形映射等常规内容外，还注重讲了非数学类复变函数论教材较少讲的，有关支点、支割线、多值函数单值化、黎曼面、多值函数的围道积分等有理论和实用价值的内容；在选材和习题的配备上，既注重计算技能的训练，又适当地强调了逻辑推理、分析证明能力的培养；在写法上，力求思想清晰，简明扼要，通俗易懂，以利于自学和启发式教学。

本书在编写过程中，得到江泽坚教授的指导和帮助，得到陈维钧、王　毅、高玉环、卢喜观、金德俊等同志的帮助。在此，谨向他们致以谢意。

由于编者水平所限，错误和不妥之处，谨请读者指正。

编　者

1987年3月于吉林大学

目　　录

第一章　复数和复变函数

§1　复数的代数运算和共轭运算

1.1　复数的概念

复数　由实数 x, y 和虚数单位 i 构成的数

$$z = x + iy (或 z = x + yi)$$

称为复数，x 称为复数 z 的实部，y 称为复数 z 的虚部，分别记为

$$x = \mathrm{Re} z, \qquad y = \mathrm{Im} z$$

Re是拉丁文Realis（实的）开首两个字母，Im 是 Imaginarius（虚的）开首两个字母。

虚部为零的复数就可看作实数，即

$$x + i \cdot 0 = x$$

因此，全体实数是全体复数的一部分。实部为零的复数称为纯虚数。

共轭复数　我们把实部相同而虚部为相反数的两个复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 称为共轭复数。与 $z=x+iy$ 共轭的复数记为 $\bar{z}$，即

$$\overline{x+iy} = x - iy$$

显然复数共轭的概念是相互的，即若 $\bar{z}_1 = z_2$，则有 $\bar{z}_2 = z_1$。

1.2　复数的代数运算

复数的相等　我们说两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相等，就是指它们的实部和虚部分别相等，即

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

当且仅当

$$x_1=x_2, \qquad y_1=y_2$$

复数的加(减)法 两个复数 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ 相加（减）是那样的一个复数，它的实部是 z_1，z_2 的实部与实部相加（减），它的虚部就是 z_1，z_2 的虚部与虚部相加（减），即

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

复数的乘法 两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相乘，可按分配律法则计算，并且将结果中的 i^2 换成 -1，即

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$$

复数的除法 两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相除(除数 $\neq 0$)，先将分子分母同乘以分母的共轭复数，再进行简化，即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \quad (z_2\neq 0)$$

依据代数运算的定义，不难证明，复数的加(减)法、乘法运算满足法则：

$$z_1+z_2=z_2+z_1, z_1z_2=z_2z_1 \qquad \text{(交换律)}$$

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3 \qquad \text{(结合律)}$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3 \qquad \text{(分配律)}$$

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3 \qquad \text{(结合律)}$$

例1.1 设

$$z=\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$$

求 $\mathrm{Re}z$，$\mathrm{Im}z$，$z\bar{z}$。

解 由

$$z=\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}=\frac{i^2+(1-i)^2}{(1-i)i}$$

$$=\frac{-1-2i}{1+i}=\frac{(-1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-3-i}{2}$$

得

$$\mathrm{Re}z=-\frac{3}{2},\quad \mathrm{Im}z=-\frac{1}{2}$$

$$z\bar{z}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

例1.2 设$z_1=3+4i, z_2=1-2i$，求$\frac{z_1}{z_2}$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 由

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+4i}{1-2i}=\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-5+10i}{5}=-1+2i$$

得

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-1-2i$$

1.3 复数的共轭运算

根据共轭复数的定义，不难证明共轭复数有如下性质（证明留作习题）：

1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，　$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$；

2) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$　$(z_2\neq 0)$；

3) $\bar{\bar{z}}=z$；

4) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}z]^2+[\mathrm{Im}z]^2=|z|^2$；

5) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$，$z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}z$.

例1.3 设z_1, z_2为两个任意复数，证明：

$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

证 由共轭运算性质1)，3)，5)，推出

$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1\bar{\bar{z}}_2$$
$$=z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

习　题

1．将下列复数z表示成$x+iy$的形式，并求它的实部、虚部和共轭复数：

1）$\dfrac{1}{3+2i}$　　2）$\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$

3）$\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$　　4）$i^8-4i^{21}+i$

5）$\left(\dfrac{3+4i}{1-2i}\right)^2$　　6）$\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$

2．由等式

$$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$$

求x和y。

3．若$(x+iy)^2=a+ib$，证明

$$x+iy=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\,\mathrm{sgn}b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

其中

$$\mathrm{sgn}b=\begin{cases}1, & b>0\\ -1, & b<0\end{cases}$$

4．若x_n, y_n为实数，并且

$$x_n+iy_n=(1-i\sqrt{3})^n\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

则

$$x_ny_{n-1}-x_{n-1}y_n=4^{n-1}\sqrt{3}$$

5．设$z=x+iy, y\neq0$，$z\neq\pm i$，则当且仅当$x^2+y^2=1$时，$z/(1+z^2)$才是实数。

6．证明：

1）复数z为实数的充要条件是：$z=\bar{z}$；

2）设z_1, z_2是两个复数，若$z_1\cdot z_2$和z_1+z_2都是实

数，则z_1和z_2或者都是实数，或者是一对共轭复数。

7. 若多项式

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

的系数是实数，则

$$\overline{P(z)}=P(\bar{z})$$

8. 设z_1, z_2是两个复数，求证

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

9. 若$\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$是（复的或实的）常数，则

1) $$|\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2|^2=(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2)\times(|\beta_1|^2+|\beta_2|^2)-|\alpha_1\bar{\beta}_2-\alpha_2\bar{\beta}_1|^2$$

2) $$\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\right|^2=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2\cdot\sum_{j=1}^{n}|\beta_j|^2-\sum_{1\leq k<j\leq n}|\alpha_k\bar{\beta}_j-\alpha_j\bar{\beta}_k|^2$$

3) $$\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\right|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2\cdot\sum_{j=1}^{n}|\beta_j|^2$$

其中的2)是著名的拉格朗日(Lagrange)恒等式，3)是著名的施瓦兹(Schwarz)不等式。

§2 复数的几何表示法

无论从复变函数的应用，还是从运用形象方法来研究复变函数，讨论复数的几何表示法都是非常重要的。

2.1 复数的点表示法

在平面上取定直角坐标系Oxy后，对一复数$z=x+iy$，规定它和平面上的点$M=(x, y)$对应；反过来，对平面上的一点$M(x, y)$，规定它和复数$z=x+iy$对应（见图1.1）。

这样，我们就把复数$z=x+iy$和平面点$M(x, y)$建立了一一对应关系。在建立了平面上的一切点组成的集合与一切复

数构成的集合的一一对应之后，我们就可把复数$z=x+iy$和点$M(x,y)$当作同意语。

今后，我们把实现这种对应关系的桥梁——直角坐标系Oxy的x轴称为实轴，y轴称为虚轴。把和复数建立了一一对应关系的平面称为复数平面或z平面。

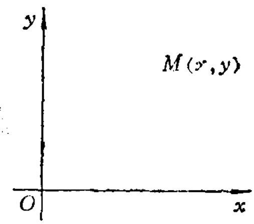

图1.1

2.2 复数的极坐标表示法

习惯上，把表示式

$$z=x+iy$$

称为复数的**直角坐标表示**。利用直角坐标与极坐标间的关系式

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

和欧拉（Euler）公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，便可将$z=x+iy$写成

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=re^{i\theta}$$

复数的这种表示称为**极坐标表示**，亦称为**三角函数表示**和**指数函数表示**（见图1.2）。式中$r=\sqrt{x^2+y^2}$与θ分别叫做z的模（或绝对值）与幅角，记为

$$r=|z|,\quad \theta=\operatorname{Arg} z$$

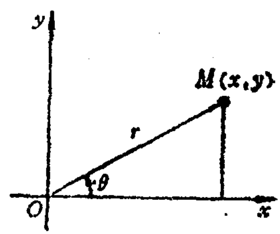

图1.2

关于复数的模、幅角，应当指出下面几点：

1） 复数的模 关于复数的模，显然有

$$|\operatorname{Re}z|\leqslant|z|,\quad |\operatorname{Im}z|\leqslant|z|$$

由$z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$，又有

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}$$

2） 复数的幅角 任一不为0的复数z，有无穷多个幅角。实际上，若θ_0是z的一个幅角，则

$$\theta=\theta_0+2k\pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

都是 z 的幅角。以后我们把 $z(\neq 0)$ 的满足条件

$$-\pi<\theta_0\leqslant\pi$$

的幅角 θ_0 称为Arg$z$的主值（亦称主幅角），记为$\theta_0=\arg z$。因此

$$\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

复数幅角的主值概念和反三角函数的主值概念是类似的。

复数 $z=0$ 的幅角是不定的，所以 $z=0$ 是唯一没有定义幅角的复数。

3） 主幅角的求法 给定一个复数 $z=x+iy\neq 0$，我们如何求它的主幅角呢？

鉴于

$$\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi, \qquad -\pi<\arg z\leqslant\pi$$

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{x}=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+n\pi, \quad -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$$

及图1.3