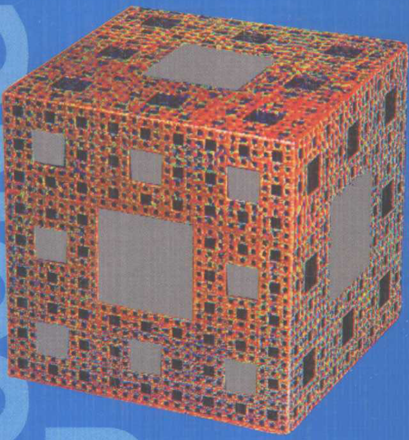
数学奥林匹克小丛书 高中卷9

Shuxue Aolinpike

XIAOCONG SHU



几何不等式

冷岗松 著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书 9

高中卷

几何不等式

olinpike Xiao Congshu

冷岗松 著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．几何不等式／冷岗松著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4163-4

I.数...　II.冷...　III.数学课-高中-教学参考资料　IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019480号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

几何不等式

著　　者　冷岗松
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　陈信漪
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　787x960 16开
印　　张　7
字　　数　116千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年6月第二次
印　　数　11 001－16 100
书　　号　ISBN 7-5617-4163-4/G·2388
定　　价　9.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系）

数学奥林匹克小丛书

冯志刚	第44届IMO中国队副领队 上海中学特级教师
葛　军	中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任 南京师范大学副教授
冷岗松	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 上海大学教授、博士生导师
李胜宏	第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 浙江大学教授、博士生导师
李伟固	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 北京大学教授、博士生导师
刘诗雄	中国数学奥林匹克委员会委员 武钢三中校长、特级教师
倪　明	数学奥林匹克小丛书总策划 华东师范大学出版社副总编辑
单　墫	第30、31届IMO中国队领队 南京师范大学教授、博士生导师
吴建平	中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席 第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编
熊　斌	第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 华东师范大学副教授
余红兵	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 苏州大学教授、博士生导师
朱华伟	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 广州大学软件所常务副所长、研究员

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue A

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺 (J.W.Milnor)、芒福德 (D.B.Mumford)、奎伦 (D.Quillen) 等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔 (A.Schinzel) 学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔 (L.Fejér)、里斯 (M.Riesz)、舍贵 (G.Szegö)、哈尔 (A.Haar)、拉多 (T.Radó) 等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂"，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

前　言

“上帝总是在做几何”(God is always doing geometry — Plato). 但几何不等式作为数学中一个独立的方向被深入研究和广泛关注却是现代的事情.

不少几何不等式既是数学审美的典范,又是应用的工具. 著名的 Brunn-Minkowski 不等式就是一个典型的例子,“它像一只大章鱼,它的触角几乎伸及数学的各领域,它不但与代数几何的 Hodge 指标定理等高深的数学相关联,也在一些应用学科如体视学、统计力学和信息理论中扮演着重要的角色”.

迄今,以几何不等式为主题的著作多达数十种. 其中 Yu. D. Burago 和 V. A. Zalgaller 的“Geometric Inequalities”(Springer-Verlag 出版社,1988)是国际上被广泛引用的专著. 国内单墫先生的《几何不等式》(上海教育出版社,1980)却是一本十分优秀的入门书.

本人写作的这本小册子,主要是向参加数学奥林匹克的中学生和中学教师介绍几何不等式,选材是初等的. 在写作过程中,力求做到：第一,精选近年来研究中出现的新成果、新方法和新技巧;第二,介绍的范例应有简单而不平凡的结论、有趣而深刻的背景;第三,尽量展现学生的优秀解法. 当然,书中也融入了作者自己的一些研究成果和体会. 现惶恐着将它呈现在读者面前,祈望批评指正.

谨以此书奉献给裘宗沪先生,祝贺他的七十寿辰,并纪念他为中国数学奥林匹克事业作出的巨大贡献.

最后,我要感谢倪明先生,他的信任和耐心促成了本书的出版. 我还要感谢我的博士研究生司林,他热心地帮我打字、绘图.

作者最大的心愿就是读者喜欢他的作品.

冷岗松

2004 年 12 月于上海

目　录

1 距离不等式中的化直法

在几何量(长度、角度、面积、体积等)的大小比较中,线段长度的比较是最基本的. 我们把仅涉及到线段长度的几何不等式叫做距离不等式.

欧氏几何中一些简单的不等公理和定理常常是解决距离不等式的出发点,其中最常用的工具有:

命题 1 连接 A、B 两点的最短线是线段 AB.

这个命题的一个直接推论就是

命题 2 (三角不等式)如果 A、B、C 为任意三点,则 $AB \leqslant AC + CB$,当且仅当 C 位于线段 AB 上时等号成立.

由这个命题还可产生下面一些常用的推论.

命题 3 三角形中大边对大角,大角对大边.

命题 4 三角形中线的长度小于夹它的两边长度之和的一半.

命题 5 如果一个凸多边形位于另一个凸多边形的内部,则外面的凸多边形的周长大于里面凸多边形的周长.

命题 6 凸多边形内的线段长度,或者不超过凸多边形的最大边长,或者不超过凸多边形的最大对角线长.

下面看一些例题.

例 1 设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的边长,求证:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$$

证明 由三角不等式 $a<b+c$ 可得

$$\frac{a}{b+c}=\frac{2a}{2(b+c)}<\frac{2a}{a+b+c}.$$

同理

$$\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c},$$

$$\frac{c}{b+a}<\frac{2c}{a+b+c}.$$

将上面三个不等式相加即得所求证的不等式. □

例 2 在$\triangle ABC$中,AB是最长边,P是三角形内一点,证明:

$$PA+PB>PC.$$

证明 如图 1-1,延长CP交AB于点D,则$\angle ADC$和$\angle BDC$有一个不是锐角,不妨设$\angle ADC$不是锐角,则在$\triangle ADC$中,由命题 3 得

$$AC>CD,$$

因此

$$AB\geqslant AC>CD\geqslant PC, \quad ①$$

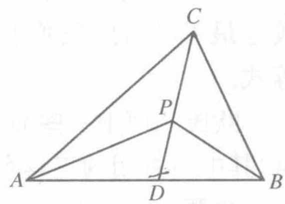


图 1-1

又在$\triangle PAB$中,由三角不等式

$$PA+PB>AB, \quad ②$$

由①、②即得求证的不等式. □

注 (1) 若去掉条件"AB是最长边",则结论不一定成立.

(2) 当P是正三角形ABC所在平面上一点,且P不在这个正三角形的外接圆上,则PA、PB、PC中任意两个之和大于第三个,即它们构成某个三角形的三边.

例 3 设一条平面闭折线的周长为 1,证明:可以用一个半径是$\frac{1}{4}$的圆完全盖住这条折线.

分析 解决问题的关键是确定一个点(圆心),使得折线上的每一点到这个点的距离不超过$\frac{1}{4}$.

证明 如图 1-2,设A为闭折线上任意取定的一点,在闭折线上取点B,使折线AB(不论哪一段)的长恰为$\frac{1}{2}$. 连接AB,取AB的中点O,则折线上任一点到O的距离不超过$\frac{1}{4}$.

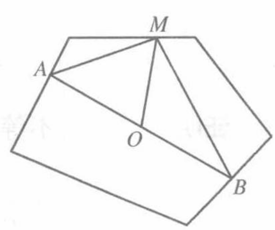


图 1-2

事实上，设 M 为折线上任一点，则由命题 4 可得

$$OM<\frac{1}{2}(AM+MB)\leqslant\frac{1}{2}(\text{折线}AM+\text{折线}BM)=\frac{1}{2}\text{折线}AB=\frac{1}{4}.$$

现以 O 为圆心，$\frac{1}{4}$ 为半径作圆，则这个圆完全盖住了这条闭折线，证毕. □

上面几个例题的证明方法实际上都体现了一种“化直”的思想，我们称其为“化直法”. 具体地说，化直法是以命题 1 或它的推论为理论依据，采用把曲线段化为折线段，再把折线段化为直线段来处理的方法. 化直法是证明几何不等式，特别是距离不等式最为常用的方法之一.

下面再看几个例子.

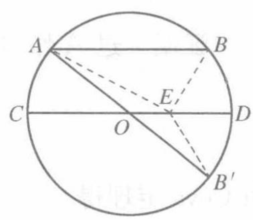
首先，我们介绍经典的 Pólya 问题.

例 4 求证：两端点在一圆周上且将此圆分成等面积的两部分的所有曲线中，以此圆的直径具有最短的长度.

证明 设 $\widehat{AB}$ 是一条满足题设条件的曲线.

如果 A、B 两点正好是某一条直径的两个端点，那么显然 $\widehat{AB}$ 的长度不会小于圆的直径.

如果弦 AB 不是直径，如图 1-3，那么令与弦 AB 平行的直径为 CD，曲线 $\widehat{AB}$ 至少与 CD 交于不同的两点，设不是圆心的那个交点为 E，则



$$\begin{aligned}\text{曲线}\widehat{AB}\text{ 的长}&=\text{曲线}\widehat{AE}\text{ 的长}+\text{曲线}\widehat{EB}\text{ 的长}\\&\geqslant AE+EB.\text{(这样将曲线化为了折线)}\end{aligned}$$

图 1-3

下面再证折线 $(AE+EB)>$ 圆的直径. 为此，作 B 关于 CD 的对称点 B'，则易证 AB' 是圆的直径. 于是

$$AE+EB=AE+EB'>AB'=\text{圆的直径}.$$

综上便知所证结论成立. □

下面的例题源于我们对垂足三角形极值性质的研究.

例 5 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，P 在三边 BC、CA、AB 上的射影分别为 A'、B'、C'，直线 AP、BP、CP 与三条对边的交点分别为 A''、B''、C''. 已知 $\triangle A''B''C''$ 的周长 $=1$，求证：

$$\text{折线}A'B''C'A''+\text{折线}A'C''B'A''\leqslant 2.$$

证明 所求证的不等式等价于

$$A'B''+B''C'+C'A''+A'C''+C''B'+B'A''\leqslant 2. \quad ①$$

要证①,只需证明局部不等式

$$A''B''+A''C''\geqslant A'B''+A'C''. \quad ②$$

事实上,把②和类似的两个不等式

$$B''A''+B''C''\geqslant B'A''+B'C'',$$
$$C''A''+C''B''\geqslant C'A''+C'B'',$$

相加便得①.

下面是②的证明.

为证②,我们需要下面的引理.

引理 如图 1-4,设 P 是 $\triangle ABC$ 的高 AD 上的一点,直线 BP 交 AC 于 E,直线 CP 交 AB 于 F,则

$$\angle FDA=\angle EDA.$$

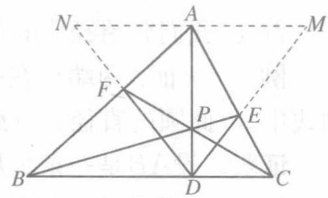


图 1-4

证明 过 A 作 BC 的平行线,与直线 DE、DF 交于 M、N,则

$$\frac{AF}{BF}=\frac{AN}{BD},\quad \frac{CE}{AE}=\frac{CD}{AM}.$$

由 Ceva 定理得

$$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

即 $$AM=AN.$$

又由 $$AD\perp MN,$$

所以 $$DM=DN,$$

故 $$\angle EDA=\angle ADM=\angle ADN=\angle FDA.$$

下面回转来证明②:

(1) 若 P 位于 $\triangle ABC$ 的高 AD 上,则 $A'=A''$,②显然成立.

(2) 若 P 不位于 $\triangle ABC$ 的高 AD 上,如图1-5,不妨设 P、B 位于 AD 同侧,连接并延长 $A'P$ 交 AB 于 M,连接 MC 交 BB'' 于 M',则由引理知

$\angle B''A'P > \angle M'A'P = \angle C''A'P$. ③

作 B'' 关于 BC 的对称点 N,则

$$\angle NA'C = \angle CA'B'',$$

又由③可得

$$\begin{aligned}&\angle NA'C + \angle C''A'C\\&= \angle NA'C + \angle C''A'P + \angle PA'C\\&< \angle PA'B'' + \angle PA'N\\&= \pi,\end{aligned}$$

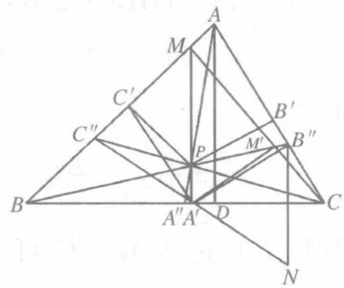


图 1-5

所以 A'、A'' 在 $C''N$ 同侧,即 A' 在 $\triangle C''A''N$ 内,因此由命题 5 有

$$A''C'' + A''N > A'C'' + A'N.$$

注意到 $A''B'' = A''N$, $A'B'' = A'N$. 上式即是

$$A''B'' + A''C'' > A'B'' + A'C''.$$

②得证. □

注 (1) 本例所用的反射对称方法是一种常用的化直手段.

(2) 利用不等式②,袁俊博士证明了刘健先生提出的一个猜想:

$$\triangle A'B'C' \text{ 的周长} \leqslant \triangle A''B''C'' \text{ 的周长}.$$

下面的例题是一个很有难度的问题.

例 6 设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点,证明:

$$\sqrt{PA} + \sqrt{PB} + \sqrt{PC} < \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{BC} + \sqrt{CA} + \sqrt{AB}). \quad ①$$

证明 下面的引理可由命题 5 直接得到.

引理 设 P 是凸四边形 $ABCD$ 的一个内点,则

$$PB + PC < BA + AD + DC.$$

下面证明①.

为简单计,设 $BC = a$, $AC = b$, $BA = c$, $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$.

如图 1-6,作出 $\triangle ABC$ 三边的中点 A'、B'、C',则 P 必位于平行四边形 $A'B'AC'$、$C'B'CA'$、$B'A'BC'$ 某一个之中. 不妨设 P 位于平行四边形

$A'B'AC'$内，则对凸四边形 $ABA'B'$ 应用引理有

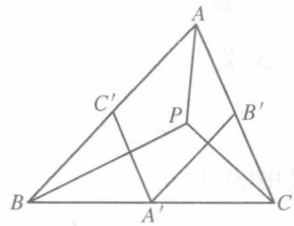


图 1-6

$$PA+PB<BA'+A'B'+B'A,$$

即

$$x+y<\frac{1}{2}(a+b+c). \qquad ②$$

同理由凸四边形 $ACA'C'$ 可得

$$PA+PC<AC'+C'A'+A'C,$$

即

$$x+z<\frac{1}{2}(a+b+c). \qquad ③$$

将②、③两式相加可得

$$2x+y+z<a+b+c. \qquad ④$$

现注意到原不等式等价于

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2<\frac{5}{4}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2,$$

即

$$x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$$

$$<\frac{5}{4}(a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}). \qquad ⑤$$

因此我们仅需证明⑤.

由平均值不等式可得

$$2\sqrt{xy}\leqslant 2x+\frac{1}{2}y,$$

$$2\sqrt{xz}\leqslant 2x+\frac{1}{2}z,$$

$$2\sqrt{yz}\leqslant y+z.$$

利用这三个不等式和不等式④可得

$$⑤\text{ 的左边}\leqslant x+y+z+2x+\frac{1}{2}y+2x+\frac{1}{2}z+y+z$$

$$=\frac{5}{2}(2x+y+z)<\frac{5}{2}(a+b+c).$$

因此要证⑤,只需证明

$$\frac{5}{2}(a+b+c)\leqslant\frac{5}{4}(a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}). \qquad ⑥$$

而式⑥化简后等价于

$$a+b+c\leqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}), \qquad ⑦$$

这是一个简单的不等式.事实上,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则

$$⑦\text{ 的右端}\geqslant 2(b+c+c)>2\left(\frac{a}{2}+\frac{b+c}{2}+c\right)>a+b+c=⑦\text{ 的左端}.$$

综上,①被证明. □

注 (1) 不等式①右边的常数$\frac{\sqrt{5}}{2}$是最优的,这留给读者考虑.

(2) 上面漂亮的证法由朱庆三同学(原华南师大附中学生,曾获 2004 年第 45 届 IMO 金牌)给出,巧妙的划分点 P 的位置和处理好变量的非完全对称性是这个解法的关键.

当然,上面的例 6 还可用等高线方法来证明.所谓等高线就是在讨论极值问题时引进的特殊平面曲线,如圆、椭圆等.这里用的等高线是椭圆.

例 6 的另证

设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,且不妨设 $a\leqslant b$, c.

现过 P 点作一个以 B、C 为焦点的椭圆,与 AB、AC 分别交于 E 和 F,如图 1-7,则

$$PA\leqslant\max(EA, FA).$$

不妨设 $EA\geqslant FA$,则 $PA\leqslant EA$.

又

$$\sqrt{PB}+\sqrt{PC}\leqslant\sqrt{2(PB+PC)}=\sqrt{2(EB+EC)},$$

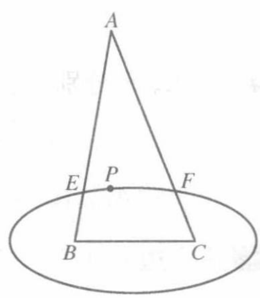


图 1-7

因此

$$\begin{aligned}&\sqrt{PA}+\sqrt{PB}+\sqrt{PC}\\&<\sqrt{EA}+\sqrt{2(EB+EC)}\\&\leqslant\left[5EA+\frac{5}{2}(EB+EC)\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$=\left[5(EA+EB)+\frac{5}{2}(EC-EB)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$<\sqrt{5}\left(c+\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$<\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right),$$

得证. □

习 题 1

1 设 A' 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线 AT 上的任意一点,试证:

$$A'B+A'C\geqslant AB+AC.$$

2 给定边长为 $a>b>c$ 的 $\triangle ABC$ 及其任意内点 O. 设直线 AO、BO、CO 与 $\triangle ABC$ 的边交于点 P、Q、R. 证明:

$$OP+OQ+OR<a.$$

3 设点 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上的点,Δ、R 分别为 $\triangle ABC$ 的面积和外接圆半径. 求证:

$$DE+EF+FD\geqslant\frac{2\Delta}{R}.$$

4 设 E、F 分别是 $\triangle ABC$ 中以 A 为端点的射线 AC、AB 上的点,则

$$|AB-AC|+|AE-AF|\geqslant|BE-CF|,$$

当且仅当 $AB=AC$ 且 $AE=AF$ 时等号成立.

5 在六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 内存在一点 O,使得 $\angle A_iOA_{i+1}=\frac{\pi}{3}(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$(约定 $A_7=A_1$). 如果 $OA_1>OA_3>OA_5$, $OA_2>OA_4>OA_6$,则

$$A_1A_2+A_3A_4+A_5A_6<A_2A_3+A_4A_5+A_6A_1.$$