
應用數學

錢偉長 著

安徽科學技術出版社

51.9
C148

51.9
C148

錢偉長 著

應用數學

安徽科學技術出版社

446

(皖)新登字02号

责任编辑：王春阳

封面设计：王国亮

责任校对：杨小红

应 用 数 学

钱伟长 著

*

安徽科学技术出版社出版

(合肥市九州大厦八楼)

邮政编码：230068

安徽省新华书店发行 商务印书馆上海印刷厂排版

安徽新华印刷厂印装

*

开本：850×1168 1/32 印张：20.875 插页：2 650千字

1993年8月第1版 1993年8月第1次印刷

印数：2 000

ISBN 7-5337-0663-3/O·22 定价：28.00元

序 言

从长期审阅文稿、科技报告中看到，在目前科技工作中存在着运用数学工具的种种缺点。这并不是说，我国科学工作者的数学理论水平不够；恰好相反，根据过去和当前我国高等学校理工的课程设置和教学大纲看，数学理论学得不少，并有许多高等的和专用的数学课程，在这一方面甚至有时可能学得很深。问题的症结所在，是不把数学和物理问题或技术问题相结合，通俗些讲就是理论脱离实际。其中包括：不能正确处理物理量和数学量的关系；不会运用锐利的武器无量纲量来处理问题，从而比较其大小，决定取舍；有时不会正确建立物理方程，甚至有的方程各项之间量纲不等；不会处理坐标，不懂得在处理各项几何问题中运用张量分析；不会处理实际数据，有些很好的实验数据，如果处理不当，便可能导致错误的结论。在一些数值计算中，多数人不明白计算误差的积累，有一些计算机的计算结果，计算误差的积累业已超出允许的范围；在数值计算上，因为用计算机，常常把计算结果写成七八位数，其实原始的技

04403/57

2 应用数学

术参数,一般的只正确到三四位数,利用三四位数的原始数据竟然算出了七八位数的结论,这是毫无意义的;许多实验数据由于不正确的平均而造成了误差很大的结论,更不会正确分析实验诸因素的误差从而进一步改进实验;在用曲线匹配实际数据时,不知道用最小二乘方法,只是通过拼凑达到目的;不知道正确地建立物理方程的过程,所建方程往往是错误的;求根用拼凑的方法,很不正确,在有限元计算展开以后,矩阵计算问题更严重,尤其是接近于零的不良矩阵经常发生.所有这些问题,多得不胜枚举.

作者在50年代就注意到上述问题,它是我们教学上必须解决的问题.因此自1955年夏季起,为教师进修就在清华大学开讲《应用数学》这门课.每星期一次晚间讲两小时,当时听课的约400人;讲课一年半,写成第一种讲义.其后,为中国科学院(力学研究所)和高教部(由清华大学执行)合办的全国力学研究班,再次讲这门课,为此重写,补充了许多材料,写成第二种讲义,并由当时北京大学教师叶开源同志准备了习题;当时该班的班长是现任上海交大党委书记何友声同志,课代表是现在四川绵阳29基地的领导之一张涵信同志.这份讲义印了不少份分发给学员们.1957年春,科学出版社曾约稿出版,到1958年春业已排好版,校过清样,但因反右问题毁版停发.力学研究班的课也另由教师担任.我在班上原定克服数

学上的理论脱离实际的教学方针，也半途而废了。

1960年，学校为“落实政策”，组成一个力学教师培训班（有10位学员），使我重又在新的条件下再讲《应用数学》。当时，上述的各种弊端，在国内变本加厉，而且由于计算机开始传入国内，数值计算问题更为严重。为此，我针对时弊，基本仍按前两次讲课的方针，解决数学运用中的理论脱离实际问题，而加强实用性的方向。同时，为迎接计算机时代的来临，加强了计算数学的内容。当时国内对计算数学尚无现成材料，为此，我化费不少精力编写了第三种讲稿。在班上有两位学员是较为用心努力的，其中一位就是现任上海市应用数学和力学研究所副所长赵兴华教授。他是班长，每月必来一两次面谈，每次都要提出几十个问题以求探讨。他这样认真好学的态度，在当时那样荒漠般的学术环境中，实在是难得的。

其后，在文化大革命中，三种讲义丢失了一种。在文化大革命以后，我曾多次在昆明、重庆、武汉、无锡、绵阳、兰州、天津、贵阳等地讲学，有不少内容和应用数学有关。现在对第三稿又加增删，形成本书。至于有关变分法、有限元、奇异摄动理论等材料，由于份量太重，决定另写专集出版。

本书是根据这些实践基础，和30年来的教学心得体会写成，现在由安徽科学技术出版社约稿出版。当前出版这样一本“离经叛道”的应

4 应用数学

用数学书籍，还是有现实意义的。特此向出版社致谢。

钱伟长

(上海工业大学)

1990年1月20日于北京

本书的相当一部分在出版中，承兰州大学力学系主任叶开源教授协助整理，特此致谢。

钱伟长附志

1990年冬于上海

目 录

序言

第一章 无穷级数及其应用	1
§ 1.1 应用数学的范围	1
§ 1.2 无穷级数	2
§ 1.3 关于无穷级数的定义及基本概念	2
§ 1.4 常量级数的收敛及发散	5
§ 1.5 交错级数及正负项杂处的级数	11
§ 1.6 级数的代数运算	14
§ 1.7 函数级数的连续及一致连续, 收敛及一致收敛	16
§ 1.8 幂级数及其性质	28
§ 1.9 泰勒级数	32
§ 1.10 有关幂级数运算的补充定理	36
§ 1.11 幂级数的简单应用	39
§ 1.12 利用幂级数所得的近似公式	48
§ 1.13 在材料力学方面的应用举例	49
习题一	55
第二章 傅里叶级数及傅里叶积分	58
§ 2.1 正交函数集	58
§ 2.2 傅里叶级数	63
§ 2.3 最小二乘近似函数	79
§ 2.4 用傅里叶级数展开求解横向载荷梁问题	82
§ 2.5 用傅里叶级数展开解弹性基础上梁的弯曲问题及 级数收敛性的改进	87
§ 2.6 用傅里叶积分求解无限大跨度梁	89
习题二	92

第三章 复数及基本超越函数	95
§ 3.1 复数及复数的运算	95
§ 3.2 复数的乘方及开方	98
§ 3.3 指数函数及三角函数	100
§ 3.4 双曲函数	101
§ 3.5 对数函数	102
§ 3.6 反圆函数和反双曲函数	103
§ 3.7 自重载荷下的悬索	105
§ 3.8 圆函数及双曲函数的有用公式	110
习题三	112
第四章 误差理论及简单数值计算	115
§ 4.1 绝对误差和最大绝对误差	115
§ 4.2 相对误差和最大相对误差	117
§ 4.3 有效位数	119
§ 4.4 工程技术运算的误差问题	122
§ 4.5 和与差的最大绝对误差与最大相对误差	123
§ 4.6 乘积和商的最大相对误差	126
§ 4.7 幂的误差	129
§ 4.8 函数的最大绝对误差和最大相对误差	131
§ 4.9 复杂计算的误差问题	134
§ 4.10 算术平均数是最好的平均数	136
§ 4.11 权的概念及带权平均值的误差	140
习题四	143
第五章 物理量及量纲分析	145
§ 5.1 引论	145
§ 5.2 物理量的量纲	146
§ 5.3 物理量纲的应用	154
§ 5.4 量纲分析的普遍理论—— π 定理	161
§ 5.5 量纲分析在粘滞液体一面流动一面传热的定常 状态中的应用	169
§ 5.6 进一步改进量纲分析的新建议	177
习题五	186

第六章 相似论	189
§ 6.1 相似论的概念, 相似论第一定律	189
§ 6.2 相似模数, 相似论第二定律及第三定律	196
§ 6.3 相似论在流体力学中的应用	203
§ 6.4 相似论和水力模型试验	208
§ 6.5 相似变量问题	209
§ 6.6 相似论在材料力学问题中的应用	213
§ 6.7 结构试验的模型规律	226
习题六	239
第七章 实验数据的整理	245
§ 7.1 引论	245
§ 7.2 实验数据的获得过程中应注意之点	245
§ 7.3 实验数据的性质及作图表示法	247
§ 7.4 实验数据的整理及数学方程的表示法	256
§ 7.5 根据曲线的性质选配合适的简单经验公式	265
§ 7.6 根据曲线选配经验公式的验证方法	271
§ 7.7 待定常数的决定法之一·直线图解法或定点法	277
§ 7.8 待定常数的决定法之二·平均法	289
§ 7.9 求得经验公式的逐步渐近法	291
习题七	293
第八章 最小二乘法	298
§ 8.1 最小二乘法	298
§ 8.2 非线性相关问题的最小二乘法	302
§ 8.3 正则方程的解法	305
§ 8.4 有权数据的最小二乘法	307
§ 8.5 由性质不同的实验所测定的同一数量的平均值	309
习题八	314
第九章 插值法	317
§ 9.1 插值法的应用范围	317
§ 9.2 差分法及多项式的差分	318
§ 9.3 葛利格莱-牛顿插值法	322

4 应用数学

§ 9.4 比例插值法	325
§ 9.5 均差法和牛顿插值公式	326
§ 9.6 拉格朗日(Lagrange)插值公式	333
§ 9.7 牛顿-高斯(Newton-Gauss)后退插值公式	335
§ 9.8 牛顿-司蒂尔林(Newton-Stirling)插值公式	338
§ 9.9 牛顿-贝塞尔(Newton-Bessel)插值公式	339
§ 9.10 插值公式的误差	340
习题九	344
第十章 代数方程的求根法	349
§ 10.1 代数方程的解法	349
§ 10.2 方程的根的估值法	350
§ 10.3 重演求根法的基本原理	353
§ 10.4 重演法之一·比例求根法	359
§ 10.5 重演法之二·牛顿法	361
§ 10.6 隔离法之一·贾宪增乘开方法	365
§ 10.7 隔离法之二·谈德林(Dandelin), 罗巴契夫斯基 (Лобачевский), 葛拉叶飞(Graeffe)方根法	372
§ 10.8 代数多项式的复根·赵访熊-林士铎法	376
§ 10.9 代数多项式的复根·方根法	382
§ 10.10 无穷级数求根法	386
§ 10.11 方程求根的定性理论, 三次方程或四次方程 的根全部为负值的条件	391
习题十	396
第十一章 多元一次联立方程的解法	399
§ 11.1 引论	399
§ 11.2 行列式的基本运算规则	400
§ 11.3 行列式展开法之四	409
§ 11.4 多元一次联立方程直接法之一·行列式解法	412
§ 11.5 多元一次联立方程直接法之二·统除消去法	419
§ 11.6 多元一次联立方程直接法之三·高斯消去法	421
§ 11.7 多元一次联立方程直接法之四·标兵消去法	423
§ 11.8 多元一次联立方程直接法之五·赵访熊列表	

计算法	424
§ 11.9 难解的联立方程	430
§ 11.10 塔形一次联立方程的解法	433
§ 11.11 多元一次联立方程间接解法之一·重演法	434
§ 11.12 多元一次联立方程间接解法之二·松弛法	443
§ 11.13 高次联立方程的重演解法	448
习题十一	449
第十二章 矩阵及其应用(一)	452
§ 12.1 矩阵及其主要符号记法	452
§ 12.2 矩阵的代数运算	456
§ 12.3 矩阵乘法的计算	461
§ 12.4 矩阵方程	468
§ 12.5 逆矩阵及线性联立方程的求解	471
§ 12.6 逆矩阵的计算法之一·克劳脱法	475
§ 12.7 逆矩阵的计算法之二·三角矩阵法	486
§ 12.8 矩阵在结构计算上的应用·影响系数矩阵	496
§ 12.9 影响系数及影响函数的计算例题·悬臂梁的弯曲	502
§ 12.10 几个常用的数值积分公式及其权值矩阵	509
§ 12.11 不均匀悬臂梁的影响函数矩阵	517
习题十二	521
第十三章 矩阵及其应用(二)	523
§ 13.1 本征方程、本征值及本征矢量	523
§ 13.2 本征行列式的展开之一·主子行列式法	539
§ 13.3 本征行列式的展开之二·克雷洛夫 (Крылов, А. Н.)有限次重演法	544
§ 13.4 本征行列式的展开之三·但尼尔夫斯基 (Данилевский, А.)法	551
§ 13.5 重演法求本征值及本征矢量	561
§ 13.6 重演法求解多元一次联立方程的证明	575
习题十三	580
第十四章 概率论及其应用	581

6 应用数学

§ 14.1	概率论的基本概念	581
§ 14.2	独立事件	584
§ 14.3	互相排斥的事件	585
§ 14.4	彩值	587
§ 14.5	重复而独立的尝试	588
§ 14.6	二项式分布曲线	589
§ 14.7	偶发事件的分布律·泊松(Poisson)分布曲线	592
§ 14.8	大量事件的正则分布律·高斯(Gauss)分布曲线	597
§ 14.9	与正则分布律有关的几个名词	599
§ 14.10	实验数据的统计处理	603
§ 14.11	司蒂尔林渐近式的证明	608
习题十四		616
第十五章 物理方程的建立		619
§ 15.1	工程数学的基本问题	619
§ 15.2	物理方程建立的过程	621
§ 15.3	建立物理方程的几种常用方法	630
§ 15.4	几种常见的物理方程	636
§ 15.5	物理方程的条件	639
习题十五		640
第十六章 坐标变换和张量分析		644
§ 16.1	坐标变换	644
§ 16.2	平面面积元素的坐标变换	648
§ 16.3	体积元素的坐标变换	651
§ 16.4	曲线正交坐标的变换	654
§ 16.5	空间曲面上的积分	658
§ 16.6	用空间正交曲线坐标表示的曲面积分	660
§ 16.7	雅可比行列式的关系	662
§ 16.8	雅可比行列式的另一形式	665
§ 16.9	曲线坐标表示的弧元素	666
§ 16.10	用张量符号表示的曲线坐标弧元素	669
§ 16.11	纯量、逆变矢量、协变矢量	674
§ 16.12	高阶张量	676

§ 16.13 张量的代数运算	678
§ 16.14 尺度张量和它的共轭张量	679
§ 16.15 卡氏张量	681
§ 16.16 矢量的协变微分	683
§ 16.17 张量的协变微分	689
§ 16.18 黎曼-克立斯托费尔张量 (Riemann-Christoffel tensor)	691
§ 16.19 置换张量及矢量积	695
§ 16.20 正交曲线坐标系	697
§ 16.21 几种常用坐标系的性质	702
习题十六	711
第十七章 高斯定理、斯托克斯定理及其应用	716
§ 17.1 高斯定理	716
§ 17.2 格林定理	721
§ 17.3 斯托克斯定理	722
§ 17.4 通量与环流, 散度与旋度	727
§ 17.5 泊松方程和拉普拉斯方程解的积分表示式	731
§ 17.6 解拉普拉斯方程的格林函数法	735
习题十七	743
第十八章 复变函数	746
§ 18.1 复变量	746
§ 18.2 复变函数的连续性	751
§ 18.3 复变函数的导数	756
§ 18.4 保角变换	760
§ 18.5 几种初等函数的保角变换	763
§ 18.6 保角变换在实际问题中的应用	777
§ 18.7 双线性变换	785
§ 18.8 保角变换的重复使用	792
习题十八	799
第十九章 解析延拓及多角形的保角变换	801
§ 19.1 复变函数的积分及哥西定理	801
§ 19.2 解析延拓及黎曼-许伐兹对称定理	805

8 应用数学

§ 19.3	许伐兹-克立斯托费尔多角形变换	813
§ 19.4	开口多边形的保角变换	825
§ 19.5	多角形外部的保角变换	843
§ 19.6	多角形内部变到单位圆内部的变换	849
§ 19.7	包含圆弧为边界的区域和角点圆化的多角形 变换	852
习题十九		861
第二十章	三角级数之和	867
§ 20.1	傅里叶级数和三角级数	867
§ 20.2	Abel 求和法, 广义函数及其展开式	875
§ 20.3	级数的积分、微分、加减和周期变换	886
§ 20.4	几种三角级数之和	897
§ 20.5	三角级数的收敛问题	906
§ 20.6	一些有实用价值的求和问题	917
§ 20.7	通过微分方程求三角级数之和	919
§ 20.8	用傅氏变换将三角级数求和	933
习题二十		942

第一章

无穷级数及其应用

§ 1.1 应用数学的范围

早在 18、19 世纪，工程和物理的发展曾经推动了数学，尤其是分析数学的发展。那时不少有名的物理学家、力学家和工程学家，往往也是有名的数学家。但是到了 19 世纪末叶，由于近代科学要求更细致的分工，工程、物理和数学便向着不同的途径发展，因此它们之间，开始有了较大的分野，工程和物理要求数学处理更具体的问题，数值计算和近似计算便是首先由工程学家和物理学家开始运用，后来经过数学家的整理，因而发展成为一门学问。到现在，人们常常把数值计算、近似计算和数学物理方程等合在一起叫做应用数学。也有人把应用数学当作处理力学、电磁辐射、场论、光学设计等问题的数学。

在近数十年来，电子计算机的迅速发展，使应用数学进入了一个新的领域，大大地扩大了人类运用数学计算处理问题的范围。应用数学业已从解线性的简单问题向着解非线性的大量复杂问题的途径迈进。我们常常把运用电子计算机的数学称为机械数学或计算数学。

应用数学的目的，是为了更有效地处理实际问题中量的问题，但是，在实际的问题里，数量问题永远带有近似的性质，所以应用数学的重点就是研究这些近似的可靠性和误差。

我们祖国古代数学家，就一向以解决实际问题作为数学发展

的内容的。譬如，九章算术就是古代人民为了分田、运输、施工、度量等目的而发展的数学。我们古代数学家也曾成功地创造了很多近似的计算方法。

§ 1.2 无 穷 级 数

无穷级数的展开及其收敛性在应用数学中占很重要的地位。首先，在处理实际问题中，有不少物理量是作为微量来处理的，我们一般都将物理方程展开为这些微量的级数，并取其前几项进行计算。这样做是不是合理，要看这种展开是不是收敛，后面的无穷项是不是可以略去而定。例如梁的静不定方程，实质上就是按挠度 w 为微量展开而得到的级数的第一项。胡克定律也是广义应力应变关系当应变为微量时展开的第一项。其次，在求解方程时，我们将用各种各样的级数来进行求解。这种解是否有效，不但要看它是否收敛，而且还要看它是否收敛得很快。因此在纯粹数学的理论中，往往满足于知道是否收敛就足够了，但在实际问题的运算中，还要进一步考虑，怎样使级数有足够快的收敛，也就是要有改进收敛速度的办法。第三，有不少近似计算的理论，是建立在微量的展开理论基础上的。仅此数端，就足够说明无穷级数在应用数学中的重要性了。

在这一章中，我们将讨论无穷级数的收敛性，改进收敛性的简单方法，及其有关的应用。顺便将讲一下基本超越函数。这是引论性质的，级数的进一步的讨论，将在以后各章中引入。

§ 1.3 关于无穷级数的定义及基本概念

序列 按一定的规律排列的数项称为序列。例如：

$$1, 4, 9, 16, 25 \quad (1.1)$$