55

2003年全国研究生入学考试数学复习指导丛书

微积分

复习指导与典型例题分析

刘西垣　李正元　林源渠　周民强　编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

微积分：复习指导与典型例题分析/刘西垣等编著．－北京：机械工业出版社，2002.4
（2003年全国研究生入学考试数学复习指导丛书）
ISBN 7-111-10139-1

Ⅰ.微…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.微积分－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第019125号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：马海宽
北京忠信诚胶印厂印刷・新华书店北京发行所发行
2002年4月第1版第1次印刷
787mm×1092mm　1/16・17.5印张

定　价：26.00元

出 版 前 言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书"考研题库"、"考研历年真题详解与考点分析"、"本科生题库"、"考研复习指导与典型例题分析"等共16本将陆续面世。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士研究生的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的"全国硕士研究生入学考试数学大纲"的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者阵容强大

作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

本套丛书体系明晰、内容精练

在"考研题库"中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质，您不妨看看、练练。

在"考研历年真题详解与考点分析"中，也分为高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计四本。该系列汇集考研的历年真题并有考点分析，使考生看后能紧密结合实战，安排复习详略。特色之处是没有按年代顺序，而是分门别类娓娓道来。

"复习指导与典型例题分析"同样分为四本。该系列注重基本概念、基本技能，是考试大纲的教材而非教学大纲的教材，为考生节省了时间。

"本科生题库"包括《高等数学习题集(基础篇)》、《微积分习题集(基础篇)》、《线性代数习题集(基础篇)》、《概率论与数理统计习题集(基础篇)》。该系列紧密结合教材，是本科生掌握基础知识、提高应用技巧的最佳工具书。

为了使学生通过一定数量题目的练习，便掌握解题方法与精髓，本书所选的题目打破过去习题集的形式，将题目分为填空题、多项选择题、解答题和证明题。

本系列丛书适合文、理科各个专业，特别是参加全国硕士研究生入学考试、自学考试及其他各类考试的需要，也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业教学辅导的需要。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士研究生的考生开

拓思路，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心，以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们，感谢他们付出的辛勤劳动。同时，欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

机械工业出版社华章教育

2002年3月

目录

第一章　函数、极限、连续

一、考试大纲要求

按照考试大纲，本章函数部分的考试内容包括：函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数、复合函数、隐函数和分段函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数等方面．要求是：理解函数的概念，掌握函数的表示法．了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数概念．掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念．会建立简单应用问题中的函数关系式．

在历年的试题中，既有单纯考察函数有关知识的题目，也有许多把函数有关知识融汇于其他内容当中的综合性题目．

极限是微积分的理论基础，研究函数的性质是通过研究各种类型的极限来达到的，如连续、导数、定积分、级数等等．本章的重点内容是极限．这部分的考试内容是：数列极限和函数极限的定义及性质，函数的左极限和右极限，无穷小和无穷大的概念及关系，无穷小的性质及无穷小的比较，极限四则运算，极限存在的两个准则（单调有界准则和夹逼准则），两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$．考试大纲对极限的要求是：了解数列极限和函数极限（包括左、右极限）的概念．理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系．了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限．会用洛必达法则求未定式极限．

由于函数的连续性是通过极限定义的，所以按定义判断函数连续性以及判断间断点的类型等问题，本质上是求极限的问题．因此这部分也是本章的重点．这部分考试内容包括：函数连续与间断概念，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质．考试要求是：理解函数连续性概念（含左连续与右连续），会判断函数间断点的类型．了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）及其简单应用．

二、基本内容与重要结论

1.1 函数的有关概念和几类常见的函数

(一) 函数的定义

定义 1.1 设 D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有一个确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$，数集 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的**函数值**，记作 $f(x_0)$，当 x 取遍 D 的每一个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**.

(二) 几类常见的函数

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，集合 $X \subset D$. 如果存在数 K_1，使得

$$f(x) \leqslant K_1$$

对于任何 $x \in X$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 有**上界**，数 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 的一个上界；如果存在数 K_2，使得

$$f(x) \geqslant K_2$$

对于任何 $x \in X$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 有**下界**，数 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 的一个下界；如果存在数 $M > 0$，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对于任何 $x \in X$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，数 M 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个界，否则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

容易证明，函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界. 注意，如果 M 是函数 $f(x)$ 在 X 上的一个界，则任何比 M 更大的正数也是函数 $f(x)$ 在 X 上的界，所以一个有界函数必有无穷多个界，可以证明其中必有一个最小的界. 对于函数的上界和下界也有类似的结论.

如果函数 $f(x)$ 在其定义域上有界，则称为有界函数；否则称为无界函数.

想要证明一个函数 $f(x)$ 是有界函数，应按照定义找到 $f(x)$ 在其定义域上的一个界 M；反之，如果想要证明一个函数 $f(x)$ 是无界函数，则应说明任何正数 M 都不是 $f(x)$ 的界，也就

是说：对于任意给定的 $M>0$，都存在 $x_M\in D$，使得 $|f(x_M)|>M$ 成立.

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，区间 $I\subset D$. 如果对于任何 $x_1,x_2\in I$，只要 $x_1<x_2$，就有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**；如果对于任何 $x_1,x_2\in I$，只要 $x_1<x_2$，就有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**.

如果函数 $f(x)$ 在其定义域上单调增加，则称 $f(x)$ 为单调增加函数（简称增函数）；如果函数 $f(x)$ 在其定义域上单调减少，则称 $f(x)$ 为单调减少函数（简称减函数）；单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

如果对任何 $x_1,x_2\in I$，只要 $x_1<x_2$，就有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调不减（单调不增）.

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任何 $x\in D$，总有

$$f(x)=f(-x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任何 $x\in D$，总有

$$f(x)=-f(-x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的；奇函数的图形关于原点是对称的.

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 的定义域是 D. 如果存在常数 $l\neq 0$，使得对于任何 $x\in D$，总有

$$x\pm l\in D,$$
$$f(x+l)=f(x)$$

同时成立，则称 l 是 $f(x)$ 的一个**周期**，称 $f(x)$ 是以 l 为周期的**周期函数**.

显然，如果 l 是函数 $f(x)$ 的一个周期，则 l 的任何整数倍倍数也是函数 $f(x)$ 的周期，因而一个周期函数必有无穷多个周期；为了确定起见，我们所说的周期函数的周期都是指它的**最小正周期**.

设 l 是函数 $f(x)$ 的周期，则在它定义域内每个长度为 l 的区间上，$f(x)$ 的图形有相同的形状.

（三）反函数，复合函数，初等函数与隐函数

定义 1.6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 Z. 如果对于每个 $y\in Z$，存在惟一的 $x\in D$ 满足 $f(x)=y$，把 y 看作自变量，把 x 看作因变量，则 x 是一个定义在 $y\in Z$ 上的函数，记此函数为

$$x = f^{-1}(y) \quad (y \in Z)$$

称为 $y = f(x)\ (x \in D)$ 的**反函数**.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以通常把反函数表达式中的 x 和 y 对换，写成

$$y = f^{-1}(x) \quad (x \in Z)$$

的形式.这样一来，在同一个直角坐标系中，函数 $y = f(x)\ (x \in D)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)\ (x \in Z)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

很明显，单调函数一定有反函数；若某个函数不是单调函数，但是它的定义域能够分为若干个单调区间，则在每个单调区间中该函数就有一个相应的反函数.

定义 1.7 设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D_f，值域是 Z_f，函数 $u = g(x)$ 的定义域是 D_g，值域是 Z_g.如果 $Z_g \cap D_f \neq \varnothing$，则称函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D = \{x \mid g(x) \in D_f\}$$

是由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的**复合函数**.变量 u 称为**中间变量**.

定义 1.8 常数函数、幂函数、对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数等六种函数称为**基本初等函数**.基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数称为**初等函数**.

初等函数有很多好的性质，它们是微积分的重要研究对象.

定义 1.9 设 $F(x,y)$ 是一个已知二元函数，I 是一个区间.如果在区间 I 上存在函数 $y = y(x)$ 满足方程 $F(x,y) = 0$，则称这个函数 $y = y(x)$ 为方程 $F(x,y) = 0$ 在区间 I 上确定的**隐函数**.

从定义 1.9 可知，把隐函数 $y = y(x)$ 代入方程 $F(x,y) = 0$，就得到在区间 I 上成立的恒等式

$$F[x, y(x)] \equiv 0, \quad x \in I. \tag{1-1}$$

尽管在大多数情况下，不能从方程 $F(x,y) = 0$ 解出隐函数 $y = y(x)$ 的显式表达式，然而，却可利用恒等式(1-1)来研究隐函数的许多性质，如：隐函数的可微性以及导数公式等.

例 1(1990 年)[1] 设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

(A) 偶函数；　(B) 无界函数；　(C) 周期函数；　(D) 单调函数.

分析与解 从函数 $f(x)$ 的构造来看，它是无界函数 $x, \tan x$ 与非负函数 $e^{\sin x}$ 的乘积，容易猜想它应是无界函数.为证明这一结论，对任意给定的 $M > 0$，令 $x_M = 2[M]\pi + \frac{\pi}{4}$，于是

$$|f(x_M)| = x_M e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

[1] 1990 年系指本例为 1990 年研究生入学考试的试题.下同.——编者注

我们来证明 $x_M e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} > M$ 总是成立的：若 $0 < M < 1$，则有 $x_M e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} > 1 > M$；若 $n \leqslant M < n+1 (n = 1, 2, \cdots)$，则有 $x_M e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} > x_M > 2n\pi > n+1 > M$；综合起来即得 $|f(x_M)| > M$ 成立．这表明 $f(x)$ 确实是无界函数．

答案是：(B)．

讨论　作为进一步的练习，我们来证明 $f(x)$ 不是偶函数，也不是单调函数．

首先，

$$f(-x) = (-x) \cdot \tan(-x) \cdot e^{\sin(-x)} = x \cdot \tan x \cdot e^{-\sin x},$$

取 $x = \frac{\pi}{4}$，不难得出

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad f\left(\quad \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

从 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 知 $f(x)$ 不是偶函数．

其次，注意 $f(0) = 0$，而 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 都是正数，这表明 $f(x)$ 在其定义域上既不是单调增加的，也不是单调减少的，从而它也不是单调函数．

把上面的证明一般化可得：

若存在 $x_0 \in D$，使得 $-x_0 \notin D$ 或 $f(-x_0) \neq f(x_0)$，则 $f(x)$ 不是偶函数．

若存在 $x_1, x_2, x_3 \in I$，且 $x_1 < x_2 < x_3$，使得 $f(x_1) < f(x_2)$ 与 $f(x_2) > f(x_3)$［或 $f(x_1) > f(x_2)$ 与 $f(x_2) < f(x_3)$］同时成立，则 $f(x)$ 在区间 I 上不是单调函数．

例 2　证明 $f(x) = x - [x]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界周期函数．

分析　可通过函数 $y = [x]$ 分段变化的规律来了解函数 $f(x) = x - [x]$ 是怎样变化的．

证　当 $n \leqslant x < n+1$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，有

$$f(x) = x - [x] < n + 1 - n = 1,$$
$$f(x) = x - [x] \geqslant n - n = 0,$$

即 $0 \leqslant f(x) < 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上成立．这表明 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界函数．

又因对于任何实数 x，总有

$$f(x+1) = x + 1 - [x+1] = x + 1 - ([x] + 1) = x - [x] = f(x),$$

所以，$f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数．

例 3(1992 年)　已知 $f(x) = \sin x$，$f[\varphi(x)] = 1 - x^2$，且 $|\varphi(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域．

分析　按照复合函数的定义，从 $f(x)$ 的解析式可得复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的一般形式，把它与题设的 $f[\varphi(x)]$ 的解析式比较，即可求得 $\varphi(x)$ 及其定义域．

解 注意

$$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2,$$

解出即得

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

它的定义域是

$$D=\{x\mid |1-x^2|\leqslant 1\}=\{x\mid 0\leqslant x^2\leqslant 2\}=\{x\mid |x|\leqslant\sqrt{2}\},$$

即闭区间$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

例4(1992年) 设p,q是常数,且$0<q<1$.求证：方程$x+p+q\cos x=0$恰有一个实根.

分析 我们知道,若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)$与$f(b)$异号,则必存在$\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=0$,即ξ是方程$f(x)=0$的一个根.若进一步假设函数$f(x)$还在$[a,b]$上单调,则上面的ξ是方程$f(x)=0$在区间(a,b)中惟一的根.由于题设的函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,因此,我们只需找出一个区间$[a,b]$使$f(a)$与$f(b)$反号,并证明函数$f(x)$单调.

证 设$f(x)=x+p+q\cos x$.首先证明函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调增加.设$x_1<x_2$,于是

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=x_2-x_1+q(\cos x_2-\cos x_1)=x_2-x_1+\frac{q}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}\sin\frac{x_2+x_1}{2}\\&\geqslant x_2-x_1-\frac{q}{2}\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x_2+x_1}{2}\right|\\&\geqslant x_2-x_1-q(x_2-x_1)=(1-q)(x_2-x_1)>0.\end{aligned}$$

这表明方程$f(x)=0$最多只有一个根.

其次,我们再来确定根所在的范围.注意,设$a=-|p|-1$,则有

$$f(a)=-|p|-1+p+q\cos(-|p|-1)\leqslant -1+q<0,$$

设$b=|p|+1$,则有

$$f(b)=|p|+1+p+q\cos(|p|+1)\geqslant 1-q>0.$$

这表明方程$f(x)=0$必有一根在$(-|p|-1,|p|+1)$之内.

综合起来即得,方程$f(x)=0$恰有一个实根.

讨论 注意,也可用函数$f(x)$的导数$f'(x)$恒正来判定$f(x)$是单调增加的.

此外,还可以更进一步判定方程$f(x)=0$的惟一的根ξ的符号：若$p+q=0$,则由$f(0)=p+q=0$知$\xi=0$;若$p+q>0$,则由$f(0)=p+q>0$知$\xi<0$;若$p+q<0$,则由$f(0)=p+q<0$知$\xi>0$.

(四)分段函数与积分上限的函数

在自变量的不同变化范围中,自变量与因变量的对应法则需用不同解析式来表示的函数,

称为**分段函数**.绝对值函数 $y=|x|$,取整函数 $y=[x]$ 等都是分段函数.

若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积,它在部分区间 $[a,x]$ 上的定积分在区间 $[a,b]$ 上定义了一个函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

称为**用变上限定积分定义的函数**,或称为**积分上限的函数**.

在考研数学试题中经常出现这两类函数,因此有必要重视这两类函数的有关概念和运算.

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0.\end{cases}$ 求 $f(-x)$ 的解析式.

分析　本题是求分段函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=-x$ 的复合函数的问题.可采用代入法,即用 $-x$ 代替分段函数 $y=f(x)$ 中的自变量 x,然后将所得结果变形和化简即可.

解　用 $-x$ 代替 $f(x)$ 的解析式中的 x,可得

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$$

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

分析　本题也是求分段函数的复合函数解析式的问题,用 $f(x)$ 代替 $f(x)$ 的解析式中的自变量 x,得

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1.\end{cases}$$

下一步需分别求出不等式 $|f(x)|\leqslant 1$ 和 $|f(x)|>1$ 的解集,由此即可得到 $f[f(x)]$ 的解析式.

解　用 $f(x)$ 代替 $f(x)$ 解析式中的 x,得

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1.\end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知,$|f(x)|\leqslant 1$ 恒成立,而 $|f(x)|>1$ 是不可能的,于是

$$f[f(x)]=1,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 7　设 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)$ 连续,$t>0,s>0$,则 I(　　).

(A) 依赖于 s,t;　　(B) 依赖于 s,t,x;

(C) 依赖于 t,x,不依赖于 s;　　(D) 依赖于 s,不依赖于 t.

分析与解　把题目中的变上限定积分化为标准形式,就更容易弄清 I 究竟依赖哪些变量.为此,作变量代换 $u=tx$,于是 $f(tx)=f(u)$,$t\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$,与 x 从 0 变到 $\frac{s}{t}$ 对应,u 从 0 变

到 s，代入可得

$$I = \int_0^s f(u)\mathrm{d}u.$$

这表明答案(D)正确.

答案是：(D).

讨论 与本题类似，在解决有关积分上限的函数的问题时，把被积函数化为仅依赖积分变量的函数往往是关键的一步.例如：

$$F(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t$$

可利用变量代换 $u = \frac{t}{3}$ 化为

$$F(x) = 3\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$

$$G(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n)\mathrm{d}t$$

可利用变量代换 $u = x^n - t^n$ 化为

$$G(x) = \frac{1}{n}\int_0^{x^n} f(u)\mathrm{d}u.$$

这里的函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都曾出现在以前的考研试题中.

例 8 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1, \\ x^3, & x \geqslant -1. \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

分析 分段函数 $y = f(x)$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 被分成两个区间 $(-\infty, -1)$ 和 $[-1, +\infty)$，在每个区间中 $f(x)$ 有不同的解析式，但都是单调增加的.又因 $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-}(1 - 2x^2) = -1 = f(-1)$，于是 $f(x)$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上也是单调增加的.从而其反函数存在，且可分别在区间 $(-\infty, -1)$ 和 $[-1, +\infty)$ 上求其解析式.

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调，求它的反函数的程序是：求函数 $f(x)$ 对应的值域 Z；把 $y = f(x)$ 中的变量 x 和 y 对换，即把它写成 $x = f(y)$ 的形式；解出 $y = g(x)$，这就是所求的反函数的表达式，它的定义域是 $x \in Z$.

解 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时，$y = 1 - 2x^2$ 的值域 $Z_1 = \{y \mid y = 1 - 2x^2, x < -1\} = \{y \mid y < -1\}$；把 $y = 1 - 2x^2$ 改写成 $x = 1 - 2y^2$，可解得 $y = -\sqrt{\frac{1-x}{2}}$.

当 $x \in [-1, +\infty)$ 时，$y = x^3$ 的值域 $Z_2 = \{y \mid y = x^3, x \geqslant -1\} = \{y \mid y \geqslant -1\}$；把 $y = x^3$ 改写成 $x = y^3$，可解得 $y = \sqrt[3]{x}$.

综合即得 $f(x)$ 的反函数是

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

1.2　极限的性质与两个重要极限

(一) 基本性质

1. 极限的不等式性质

定理 1.1　设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=b$. 若 $a>b\Rightarrow\exists N$, 当 $n>N$ 时 $x_n>y_n$. 若 $n>N$ 时 $x_n\geqslant y_n\Rightarrow a\geqslant b$.

推论(保正性)　设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. 若 $a>0\Rightarrow\exists N$, 当 $n>N$ 时 $x_n>0$. 若 $n>N$ 时 $x_n\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant 0$.

定理 1.2　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$. 若 $A>B\Rightarrow\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>g(x)$. 若 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\geqslant g(x)\Rightarrow A\geqslant B$.

推论(保正性)　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 若 $A>0\Rightarrow\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>0$. 若 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\geqslant 0\Rightarrow A\geqslant 0$.

其他极限过程也有类似的结论.

2. 极限的惟一性

3. 有界性性质

定理 1.3　设 x_n 收敛 $\Rightarrow x_n$ 有界(即 $\exists$ 常数 $M>0$ 使得 $|x_n|\leqslant M$ $(n=1,2,3,\cdots)$).

定理 1.4　设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 有界, 即 $\exists\delta>0, M>0$, 使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)|\leqslant M$.

注一　定理 1.4 中函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域有界, 是函数的局部有界性.

注二　其他的极限过程如 $x\to x_0+0$, $x\to x_0-0$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 等也有类似的结论.

(二) 两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

1.3 极限的存在与不存在问题

(一) 数列 x_n 敛散性的判别

1. 通过 x_n 与其他数列的关系

定理 1.5 (夹逼定理) 若 $\exists N$，当 $n>N$ 时 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，又 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$，则

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

还有其他一些极限运算法则，不仅证明了 x_n 收敛还可求得极限值. 如若 $x_n = y_n + z_n$ 或 $x_n = y_n \cdot z_n$，y_n，z_n 均收敛，则 x_n 收敛.

2. 通过 x_n 的自身性质来判断

定理 1.6 (单调有界数列必存在极限定理)

若数列 x_n 单调上升有上界，即 $x_{n+1} \geqslant x_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$ 并存在一个数 M 使得对 $\forall$ 的 n 有 $x_n \leqslant M$，则 x_n 收敛. 即存在常数 a 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ 并有 $x_n \leqslant a \quad (n=1,2,\cdots)$.

若数列 x_n 单调下降有下界，即 $x_{n+1} \leqslant x_n \quad (n=1,2,\cdots)$ 并存在一个数 m 使得对 $\forall n$ 有 $x_n \geqslant m$，则 x_n 收敛. 即存在数 a 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ 且有 $x_n \geqslant a \quad (n=1,2,\cdots)$.

(二) 函数 $y=f(x)$ 的极限存在与不存在问题

1. 关于函数极限存在性的两个结论

定理 1.7 (夹逼定理) 设 $\exists \delta>0$，$0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

又

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A.$$

则

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

定理 1.8 (极限与左右极限的关系)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

对于分段函数 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0-\delta<x<x_0, \\ h(x), & x_0<x<x_0+\delta. \end{cases}$

考察 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在时，就要分别求

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} h(x) \quad 与 \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} g(x).$$

2. 证明一元函数 $y=f(x)$ 极限不存在的方法

(1) 若 $f(x_0+0) \neq f(x_0-0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

(2) 若 $\exists x_n \to x_0, x_n \neq x_0, \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ 不存在或 $\exists x_n \to x_0(x_n \neq x_0), y_n \to x_0(y_n \neq x_0)$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

1.4 无穷小和它的阶

(一) 无穷小、极限、无穷大及相互间的关系

1. 无穷小与无穷大的定义

定义 1.10 在某一极限过程中以零为极限的变量称为**无穷小量**(或无穷小). 无穷小量记为 $o(1)$.

定义 1.11 x_n 为无穷大量($\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$)：$\forall M > 0, \exists$ 自然数 N，当 $n > N$ 时 $|x_n| > M$.

类似地定义 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大量($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$)，$x \to x_0$ 时 $f(x)$ 为**无穷大量**($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$).

也可类似定义正无穷大量和负无穷大量. 无穷大量也称为**无穷大**.

2. 无穷小与极限，无穷小与无穷大的关系

无穷小与极限的关系：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x) = o(1)\ (x \to x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

无穷小与无穷大的关系：在同一个极限过程中，

$$f(x) \text{ 为无穷小}, f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \text{ 为无穷大}.$$

$$f(x) \text{ 为无穷大} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \text{ 为无穷小}.$$

(二) 无穷小的阶

1. 定义

定义 1.12 设在同一个极限过程中，$\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小量，且 $\exists \lim \frac{\alpha}{\beta} = l$. ① 若 $l \neq 0$，称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为**同阶无穷小**；② 若 $l = 1$，称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为**等价无穷小**，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；③ 若 $l = 0$，称在此极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的**高阶无穷小**，记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$. 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在(不为 ∞) 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 不可比较.

定义 1.13 设在同一个极限过程中，$\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小. 以 $\alpha(x)$ 为基本无穷小，若