高等学校研究生教材

现代分析基础

XIANDAI FENXI JICHU

朱月萍 林道荣 陈玉娟 编

東華大學出版社

高等学校研究生教材

现代分析基础

朱月萍　林道荣　陈玉娟　编

東華大學出版社

内容提要

本书包含七章．第一章从 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分出发介绍抽象测度和抽象积分，以及可测函数的连续性；第二章介绍 L^p 空间及其可分性和对偶空间，以及用连续函数逼近 L^p 空间元素；第三章介绍 Hilbert 空间上线性变换的表示，Hilbert 空间中的规范正交系；作为例子，本章还介绍了三角级数，它是逼近论、小波分析的基础，另外，作为 Riesz 表示定理的应用之一，这里还介绍了广义测度的有关知识（这部分可作为选讲内容）；第四章主要讨论 n 维欧氏空间上的 Fourier 变换的概念及基本性质，以及 Fourier 变换在偏微分方程中的应用；第五章微分学是将数学分析中函数的微分概念推广到映射和测度中去，分别介绍了映射的导数、偏导数及高阶导数和测度的导数；第六章介绍 Banach 空间中的五大定理；最后一章介绍了广义函数．

图书在版编目(CIP)数据

现代分析基础/朱月萍，林道荣，陈玉娟主编．—上海：东华大学出版社，2009.6

ISBN 978-7-81111-527-7

Ⅰ.现…　Ⅱ.①朱…②林…③陈…　Ⅲ.分析(数学)—基础理论—研究生—教材　Ⅳ.O171

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 098290 号

责任编辑　王克斌

封面设计　魏依东

现代分析基础

朱月萍　林道荣　陈玉娟　编

东华大学出版社出版

（上海市延安西路 1882 号　邮政编码：200051）

新华书店上海发行所发行　苏州望电印刷有限公司印刷

开本：720×1000　1/16　印张：9　字数：150 千字

2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷

印数：0 001～2 000

ISBN 978-7-81111-527-7/O・004

定价：19.80 元

序　言

《现代分析基础》是数学专业研究生一年级的基础课程，编者已多次讲授过该课程。本教材是在讲义基础上，反复征求意见和建议，并经多次修改及更新而形成. 本教材包含了现代分析的基本理论和基本方法，适应面较宽，照顾到了数学领域各个专业研究生培养的需要，部分内容可以根据专业特点选讲，适用于一学期讲授。

全书共分七章. 第一章中介绍的抽象测度和抽象积分知识在现代分析中是非常重要的，它们的应用也贯穿于全书之中，第五节的广义测度可作为选讲内容，但如果学习第五章第四节测度的导数和测度的 Radon-Nikodym 分解，本节内容是需要的；第二章介绍 L^p 空间及其可分性和对偶空间，以及用连续函数逼近 L^p 空间元素，L^p 空间理论的重要性自不待言，抽象 Banach 空间理论、Hilbert 空间理论和偏微分方程中经常会涉及到；第三章介绍 Hilbert 空间上线性变换的表示，Hilbert 空间中的规范正交系。作为例子，本章还介绍了三角级数，它是逼近论、小波分析的基础；第四章首先介绍了卷积的概念和恒等逼近算子，它们在现代分析中起着十分重要的作用。然后讨论了 n 维欧氏空间上的 Fourier 变换的概念及基本性质，Fourier 变换是现代分析中最重要的工具之一，已广泛应用于偏微分方程、调和分析、复分析、概率论、小波分析及数值分析等众多研究领域，本章中仅以 Fourier 变换在偏微分方程中的应用为例作了说明；第五章微分学是将数学分析中函数的微分概念推广到映射和测度中去，分别介绍了映射的导数、偏导数及高阶导数和测度的导数；第六章介绍 Banach 空间中的五大定理；最后一章中介绍速降函数函数空间及其对偶空间（缓增广义函数空间），运用缓增广义函数

理论，可以有效地推广经典 Fourier 变换理论，从而使广义函数在现代分析中发挥极其重要的作用。

本书的编写得到了南通大学研究生部的立项资助和理学院的大力支持，在此表示衷心的感谢！

鉴于作者水平有限，错误和不足之处在所难免，敬请指教。

编者

2009. 6. 16

目录
CONTENTS

目录

CONTENTS

第一章　抽象测度与积分

大约在十九世纪末，许多数学家认识到 Riemann 积分应该由另一种类型更广泛、更灵活、更适合于处理极限过程的积分来代替. 在这方面作出贡献的有著名数学家 Jordan, Borel, W. H. Young 和 Lebesgue，而 Lebesgue 的结构是最成功的.

在大学本科的"实变函数论"课程中，我们已经接触了 $\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesgue 积分理论. 在这一理论中，首先在 $\mathbf{R}^n$ 上建立外测度的概念，其基础是 $\mathbf{R}^n$ 中立方体的"体积"等于它的边长的 n 次方这样一个直观的几何规定. $\mathbf{R}^n$ 的每个子集都有外测度. 空集的外测度是零. 外测度本身是一个非负的广义实值的集函数，具有次可数可加性. 在外测度的基础上可引出可测集的概念，即满足 Carathéodory 条件的集合是可测集，并且其外测度就是其测度. 空集和 $\mathbf{R}^n$ 本身都是可测集，它们的测度分别为零和∞. 可测集全体构成的集合关于集合的差、可数并运算封闭. 有了测度的定义就可以定义可测函数及积分，进而运用积分理论对可测函数及可积函数进行深入研究.

本章的目的是将上述的 Lebesgue 测度理论和 Lebesgue 积分理论推广到一般的抽象集合上，使它适用于更广泛的对象.

§1　抽象测度

可测函数类在积分理论中起着基础作用. 它与连续函数类有许多共同的基本性质. 可测函数与可测集、可测空间联系在一起，就象连续函数与拓扑空间、开集联系在一起一样.

【定义 1.1】 设 X 是一个集合，τ 是 X 的一个非空子集族，若 τ 满足下述条件：

(1) $\phi\in\tau$ 及 $X\in\tau$，

(2) 若 $V_i\in\tau$, $i=1, 2, \cdots, n$. 则 $V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n\in\tau$，

(3) 若 $\{V_\alpha\}$ 是 τ 的元素的任何集族（有限、可数或不可数），则 $\bigcup_\alpha V_\alpha\in\tau$，

则称 τ 为 X 上的一个拓扑. 若 τ 是 X 的一个拓扑,则称 X 是拓扑空间,且 τ 的元素称为 X 的开集. 若 $x\in X$,则称包含 x 的开集为点 x 的邻域. X 中开集的余集称为 X 的闭集.

【定义 1.2】 设 X 是一个集合,M 是 X 的一些子集构成的非空集合族,若 M 具有如下性质:

(1) 若 $A, B\in M$,则 $A\setminus B\in M$,

(2) 若 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 且 $A_n\in M, n=1, 2, \cdots$,则 $A\in M$,

则称 M 为 X 的一个 σ-环 . 如果 M 为 X 的一个 σ-环,且 $X\in M$,则称 M 为 X 的一个 σ-代数 . 若 M 是 X 的 σ-代数,则称 (X, M) 为可测空间,且 M 的元素称为 X 的可测集.

若 B 是 X 内最小的 σ-代数,使得 X 的每一个开集都包含于 B,则称 B 的元素为 X 的 Borel 集.

注:(1) 可测空间实际上是指序对 (X, M).

(2) 设 M 是 X 内的 σ-环或 σ-代数,由定义立即得

(a) 由于 $\phi=A\setminus A$,故 $\phi\in M$.

(b) 在(2)中取 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\phi$,则可看出若 $A_1, A_2, \cdots, A_n\in M$,则 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\in M$.

(c) 由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\setminus A_n\right).$$

所以 M 对可列交运算封闭.

(d) 由于 σ-环 M 未必包含 X,所以 σ-环 M 不必对取余运算封闭. 但 σ-代数对取余运算封闭.

(e) 若将(2)中要求 M 关于可数并封闭的要求降低为仅对有限并封闭,则 M 称为代数.

【定义 1.3】 可测空间 (X, M) 上的测度 μ 是指定义在 M 的所有集合上的非负集函数,并且满足

(a) $\mu(\varphi)=0$;

(b) 对 M 中任何互不相交的可测集列 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$,有(称为测度的可数可加性)

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k).$$

测度空间(X, M,μ)是指由可测空间(X, M)与定义在M上的测度μ所组成的空间. 拓扑空间X的Borel集B上的测度μ称为X的Borel测度.

例如,$(\mathbf{R}^1, M,\mu)$是测度空间,其中$\mathbf{R}^1$是实直线,M是$\mathbf{R}^1$上的Lebesgue可测集,μ是Lebesgue测度. 如果用区间$[0, 1]$代替$\mathbf{R}^1$,用$[0, 1]$上的Lebesgue可测子集代替M,则得出另一个测度空间的例子. 第三个例子就是空间$(\mathbf{R}^1, B,\mu)$,其中B是Borel集类,μ是Lebesgue测度.

当E是无穷集时,$\nu(E)=\infty$;当E是有限集时,$\nu(E)$等于E中元素的个数. 那么ν是可数可加的集函数,容易验证$(\mathbf{R}^1, P(\mathbf{R}^1),\nu)$是一测度空间,其中$P(\mathbf{R}^1)$是$\mathbf{R}^1$的幂集,即$\mathbf{R}^1$的所有子集组成的集合,$\nu$为计数测度.

设X是任一不可数集,M是所有的使得E或E^c至多是可数的集$E\subset X$所组成的集族. 那么,M是σ-代数. 在其上定义测度如下:在第一种情形下令$\mu(E)=0$,在第二种情形下令$\mu(E)=1$. 则(X,μ)是测度空间.

§2　测度的性质

【定理1.1】 设(X, M, μ)是一测度空间,若$A, B\in X$,且$A\subset B$,则$\mu(A)\leqslant\mu(B)$.

【证明】 因为$B=A\cup(B\setminus A)$是两不相交集之并,故有

$$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)\geqslant\mu(A).$$

【定理1.2】 设(X, M, μ)是一测度空间,令$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$是M中满足$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$的集合列,那么

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

【证明】 取$A_0=\phi$,令$B_i=A_i\setminus A_{i-1}$,$i=1, 2, 3,\cdots$,则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$. 由可数可加性得

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)=\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

【定理1.3】 设(X, M,μ)是一测度空间,令$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$是M中满足$\mu(A_1)<\infty$且$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$的集合列,那么

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

特别地，如果$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\phi$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$.

【证明】 因为集合列$\{A_1\cap A_n^c\}_{n=1}^{\infty}$是不减的，并且$\forall_n$，$A_1\cap A_n^c\in M$，由定理1.2得

$$\begin{aligned}\mu(A_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)&=\lim_{n\to\infty}[\mu(A_1)-\mu(A_n)]=\lim_{n\to\infty}\mu(A_1\cap A_n^c)\\&=\mu(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1\cap A_n^c))=\mu(A_1\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c))\\&=\mu(A_1\cap(\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n))=\mu(A_1)-\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n).\end{aligned}$$

由于$\mu(A_1)<\infty$，故

$$\mu(\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

【定理1.4】 设(X, M,μ)是一测度空间，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$是M中任一列集合，则

(i) $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n))\leqslant\liminf\limits_{k\to\infty}\mu(A_k)$；

(ii) $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n))\geqslant\limsup\limits_{k\to\infty}\mu(A_k)$.

如果$\bigcap_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n)=B$，且$\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k)<\infty$，则$\lim\limits_{k\to\infty}\mu(A_k)=\mu(B)$.

【证明】 仅以(i)为例证明，另一个完全类似. 显然，

$$\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcap_{n=2}^{\infty}A_n\bigcap_{n=3}^{\infty}A_n\subset\cdots.$$

由定理1.2推出

$$\mu(\textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n))=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mu(\textstyle\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n).$$

而且对所有的k有

$$\mu(A_k)\geqslant\mu(\textstyle\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n).$$

这意味着

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\textstyle\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n)\leqslant\displaystyle\liminf_{k\to\infty}\mu(A_k),$$

由此得(i). 定理的后一部分证明由不等式

$$\limsup_{k\to\infty}\mu(A_k)\leqslant\mu(B)\leqslant\liminf_{k\to\infty}\mu(A_k)$$

推出.

【定理1.5】 设(X,M,μ)是一测度空间，$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$是M中任一列集合. 则

$$\mu(\textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k).$$

【证明】 记$G_n=E_n\setminus(\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k)$，则$G_n\subset E_n$，且$G_n$是互不相交的. 于是$\mu(G_n)$

$\leqslant\mu(E_n)$，而

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(G_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n).$$

【定义 1.4】 设(X,M,μ)是一测度空间，如果 $\mu(X)<\infty$，则称测度 μ 是有限测度；如果存在 M 中的集合列$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$ 且对每个 n，$\mu(X_n)<\infty$，则称 μ 是σ-有限测度.

如果 $E\in M$，$\mu(E)<\infty$，则称 E 是有限测度集. 如果 E 是可数个有限测度集之并，则称 E 为σ-有限测度集.

σ-有限测度集的任一可测子集是σ-有限测度集，可数个 σ-有限测度集之并也是σ-有限测度集. 如果 μ 是σ-有限测度，则任一可测集都是 σ-有限测度集.

设(X, M,μ)是一测度空间，且 $Y\in M$. 令 M_Y 表示由 M 中那些含于 Y 的集所细成的集，对于 $E\in M_Y$，定义 $\mu_Y(E)=\mu(E)$，则(Y,M_Y,μ_Y)是一测度空间，称 μ_Y 为 μ 在 Y 上的限制.

【定义 1.5】 称测度空间(X,M,μ)是完备的，如果 M 包含了零测度集的所有子集. 即若 $B\in M$，$\mu(B)=0$，并且 $A\subset B$，则 $A\in M$.

下面的定理表明，每一个可测空间(X,M,μ)都可以完备化. 今后我们均考虑完备的测度空间.

【定理 1.6】 设(X,M,μ)是一个测度空间，M^* 是所有这样的 $E\subset X$ 的集合族，对于 E 存在 A 和 $B\in M$，使得 $A\subset E\subset B$，且 $\mu(B\setminus A)=0$，这时定义$\mu(E)=\mu(A)$，则 M^* 是一个 σ 代数，且 μ 是 M^* 上的测度.

【证明】 首先我们验证 M^* 满足 σ 代数的三条规定.

(1) $X\in M$，那么 $X\in M^*$.

(2) 设 $E\in M^*$，则存在 A 和 $B\in M$，使得 $A\subset E\subset B$，且 $\mu(B\setminus A)=0$. 由于 $B^c\subset E^c\subset A^c$，且 $A^c\setminus B^c=B\setminus A$. 故 $E^c\in M^*$.

(3) 设 $E_i\in M^*$，则存在 A_i 和 $B_i\in M$，使得 $A_i\subset E_i\subset B_i$，且 $\mu(B_i\setminus A_i)=0$. 如果令 $A=\bigcup_i A_i$，$E=\bigcup_i E_i$，以及 $B=\bigcup_i B_i$，则 $A\subset E\subset B$. 由

$$B\setminus A\subset\bigcup_i(B_i\setminus A_i).$$

知 $\mu(B\setminus A)=0$.

其次，我们验证 μ 在 M^* 上是完全确定的. 假定 $A\subset E\subset B$，$A_1\subset E\subset B_1$，且 $\mu(B\setminus A)=0$，$\mu(B_1\setminus A_1)=0$. 则 $A\setminus A_1\subset B_1\setminus A_1$，$A_1\setminus A\subset B\setminus A$. 因此有 $\mu(A\setminus A_1)$

$=0$，$\mu(A_1 \setminus A)=0$. 所以

$$\mu(A)=\mu(A_1 \cap A)=\mu(A_1).$$

在 M^* 上 μ 的可数可加性是明显成立的.

设 μ 是测度空间(X, M)上的测度，$E \in M$. 若存在集合 $N \in M$ 且 $N \subset E$，$\mu(N)=0$，使命题 P 在 $E \setminus N$ 上处处成立，则称命题 P 在集合 E 上几乎处处成立. 记为命题 P 成立 a. e. $[\mu]$于 E.

例如，$|\tan x| < +\infty$ a. e. 于 $\mathbf{R}$.

§3 可测函数

【定义 1.6】 若 X 和 Y 为拓扑空间，f 是从 X 到 Y 内的映射，若对 Y 的每一个开集 V，$f^{-1}(V)$是 X 中的开集，则称 f 为连续的.

若 X 是可测空间，Y 是拓扑空间，而 f 是从 X 到 Y 内的映射，若对 Y 的每一个开集 V，$f^{-1}(V)$是 X 中的可测集，则称 f 是可测的. 特别地，Y 是实数集时，称 f 是可测函数.

注：由于 X 的 σ-代数也是 X 的一个拓扑，因此连续映射一定是可测映射. 至于可测映射与连续映射的更多关系，我们将在本章 §6 继续讨论.

【定理 1.7】 设 Y 和 Z 是拓扑空间，且 $g: Y \to Z$ 是连续的.

(a) 若 X 是拓扑空间，$f: X \to Y$ 是连续的，且 $h=g \cdot f$，则 $h: X \to Z$ 是连续的；

(b) 若 X 是可测空间，$f: X \to Y$ 是可测的，且 $h=g \cdot f$，则 $h: X \to Z$ 是可测的.

(连续函数与连续函数的复合是连续的；可测函数与连续函数的复合是可测的.)

【证明】 若 V 是 Z 内的开集，则 $g^{-1}(V)$是 Y 内的开集，且

$$h^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V)).$$

若 f 是连续的，则 $h^{-1}(V)$是开集，这就证明了(a).

若 f 是可测的，则 $h^{-1}(V)$是可测集，因而证明了(b).

【定理 1.8】 设 u 和 v 是可测空间 X 上的实可测函数，若 Φ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 到拓扑空间 Y 内的连续映射，且对 $x \in X$ 定义

$$h(x)=\Phi(u(x), v(x))$$

则 $h: X\to Y$ 是可测的.

【证明】 令 $f(x)=(u(x),v(x))$，则 f 将 X 映射到平面内，由于 $h=\Phi\cdot f$，因此由定理 1.1，只要证明 f 的可测性就够了.

若 G 是平面上的一个其边平行于坐标轴的开长方形，则 G 是两个开区间 I_1 和 I_2 的笛卡尔积，并根据 u 和 v 的条件，

$$f^{-1}(G)=u^{-1}(I_1)\cap v^{-1}(I_2)$$

是可测的. 在平面上每一个开集 V 都可以表示成至多可数个这样的开长方形 G_i 的并，且由于

$$f^{-1}(V)=f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(G_i).$$

因此，$f^{-1}(V)$是可测的.

注：设 X 是可测空间，则

(a) 若 u 和 v 是 X 上的实可测函数，$f=u+iv$，则 f 为 X 上的复可测函数.

(b) 若 $f=u+iv$ 是 X 上的复可测函数，则 u,v 及$|f|$是 X 上的实可测函数.

(c) 若 f 和 g 是 X 上的可测函数，c 是常数，则 $f+c,cf,f+g,f\cdot g,f\wedge g=\min\{f,g\}$及 $f\vee g=\max\{f,g\}$亦可测.

(d) 如果$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是可测函数列，则

$$\sup_n f_n,\ \inf_n f_n,\ \lim_{n\to\infty}\inf f_n,\ \lim_{n\to\infty}\sup f_n$$

也都可测. 特别地，如果对一切 $x\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$存在，则$\lim_n f_n$ 是可测函数.

(e)若 E 是 X 的可测子集，且

$$x_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E.\end{cases}$$

则 $\chi_E(x)$是可测函数.（称 $\chi_E(x)$称为 E 的特征函数.）

(f)若 f 为 X 上的复可测函数，则存在 X 上的复可测函数α，使得$|\alpha|=1$，且 $f=\alpha|f|$.

【证明】(*f*) 令 $E=\{x: f(x)=0\}$. Y 为除去原点的平面，对 $z\in Y$，定义 $\varphi(z)=z/|z|$，且令

$$\alpha(x)=\varphi(f(x)+\chi_E(x))\quad (x\in E)$$

若 $x\in E$，$\alpha(x)=1$；若 $x\notin E$，$\alpha(x)=f(x)/|f(x)|$. 由 $\varphi(x)$在 Y 上连续且 E 可测（因为 f 为可测函数），得 $\alpha(x)$可测.

下面我们给出定义在可测空间上的实值函数可测的一个判别方法.

【定理 1.9】 设 M 是 X 内的 σ-代数，Y 为拓扑空间，f 是 X 到 Y 内的一个映射.

(1) 如果 $\Omega=\{E\subset Y: f^{-1}(E)\in M\}$，则 Ω 是 σ-代数；

(2) 如果 $Y=[-\infty,\infty]$，且对每个实数 α，$f^{-1}((\alpha,\infty])\in M$，则 f 可测.

【证明】 (1) 由于 $f^{-1}(Y)=X$，则 $X\in\Omega$；若 $E, F\in\Omega$，由 $f^{-1}(E\setminus F)=f^{-1}(E)\setminus f^{-1}(F)\in M$，知 $E\setminus F\in\Omega$；当 $\{A_n\}\subset\Omega$ 时，由 $f^{-1}(\bigcup_n A_n)=\bigcup_n f^{-1}(A_n)\in M$，得 $\bigcup_n A_n\in\Omega$. 从而 Ω 是 σ-代数.

(2) 首先，如果令 $\Omega=\{E\subset[-\infty,\infty]: f^{-1}(E)\in M\}$，则由(1)，$\Omega$ 是 σ-代数. 对于任一实数 α，取一列实数 $a_n<\alpha$，使得 $a_n\to\alpha\ (n\to\infty)$，由于

$$[-\infty,\alpha)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[-\infty,a_n]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,\infty]^c.$$

则 $[-\infty,\alpha)\in\Omega$. 而 $(\alpha,\beta)=[-\infty,\beta)\cap(\alpha,\infty]$. 另一方面，我们知道直线上任一开集可表示成至多可数个互不相交的开区间的并，从而 Ω 内包含了每一个开集. 于是 f 可测.

注：定理 1.9 中(2)是定义在可测空间 (X, M) 上的实函数 f 可测的充分必要条件，并且它等价于下面陈述中的任一个：

(3) 每个实数 α，$f^{-1}([\alpha,\infty])\in M$；

(4) 每个实数 α，$f^{-1}([-\infty,\alpha))\in M$；

(5) 每个实数 α，$f^{-1}([-\infty,\alpha])\in M$.

【定义 1.4】 设可测空间 X 可以表示成有限个两两互不相交的可测子集 E_1，$E_2,\cdots,E_n$ 的并，如果函数 f 在每个子集 E_i 上取常数值 a_i，则称 f 为简单函数. 显然

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}^{(x)}.$$

由定义可以看到，简单函数一定是可测函数，事实上，可测函数也可以通过简单函数的极限来实现.

【定理 1.10】 设 $f: X\to[0,\infty]$ 可测，则存在 X 上的简单函数列 $\{s_n\}$，使得

(a) $0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant f$；

(b) 对每个 $x\in X$，当 $n\to\infty$ 时，$s_n(x)\to f(x)$.

【证明】 对 $n=1, 2, \cdots$ 及 $1\leqslant i\leqslant n2^n$，定义

$$E_{n,i}=f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i}{2^n}\right)\right)\text{及 } F_n=f^{-1}([n,\ \infty]) \tag{1}$$

取

$$s_n=\sum_{i=1}^{n2^n}\frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}}+n\chi_{F_n}\ . \tag{2}$$

由于 $E_{n,i}$和 F_n 均为可测集，容易看出函数(2)满足(a). 若 x 使得 $f(x)<\infty$，则当 n 充分大时，$s_n\geqslant f(x)-2^{-n}$；若 $f(x)=\infty$，则 $s_n(x)=n$. 这就证明了(b).

§4 抽象积分

【定义 1.8】 如果 E 是测度空间$(X,\ M,\mu)$内的可测集，s 是$(X,\ M,\mu)$上形如

$$s=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$$

的非负简单函数，则 s 在 E 上的积分定义为

$$\int_E s d\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu(E\cap E_i).$$

如果 $f: X\to[0,\ \infty]$为可测函数，且 $E\in M$，f 在 E 上的积分定义为

$$\int_E f d\mu=\sup\int_E s d\mu \tag{3}$$

其中上确界取遍所有使得 $0\leqslant s\leqslant f$ 的简单函数 s. 如果 $\int_E f d\mu<\infty$，则称函数 f 在集合 E 上可积.

【定理 1.11】 下列命题是定义 1.8 的直接推论，其中出现的函数和集合都假设是可测的.

(a) 如果 $0\leqslant f\leqslant g$，则 $\int_E f d\mu\leqslant\int_E g d\mu$；

(b) 如果 $A\subseteq B$，而 $f\geqslant 0$，则 $\int_A f d\mu\leqslant\int_B f d\mu$；

(c) 如果 $f\geqslant 0$，而 c 为常数，$0\leqslant c\leqslant\infty$. 则 $\int_E c f d\mu=c\int_E f d\mu$.

(d) 如果对所有 $x\in E$，$f(x)=0$，即使 $\mu(E)=\infty$，也有 $\int_E f(x)d\mu=0$.

(e) 如果 $\mu(E)=0$，即使对每个 $x\in E$，$f(x)=\infty$，也有 $\int_E f(x)d\mu=0$. 因此如果 $f(x)=g(x)$ a. e. 于 E，则 $\int_E f(x)d\mu=\int_E g(x)d\mu$. 即，就积分而言，几乎处处相等的两个函数不加区别.

(f) 如果 $f\geqslant 0$，则 $\int_E fd\mu=\int_X \chi_E fd\mu$.

(g) 如果 $f:X\to[0,+\infty]$ 是可测的，$E\in M$ 并且 $\int_E fd\mu=0$，则 $f=0$，a. e. 于 E.

【命题 1.1】 设 s 和 t 为 (X, M,μ) 上的非负简单函数，对 $E\in M$，定义

$$\varphi(E)=\int_E sd\mu,$$

则 φ 为 M 上的测度. 同时

$$\int_X (s+t)d\mu=\int_X sd\mu+\int_X td\mu.$$

【证明】 只需证明可数可加性. 设 s 是形如 $s=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$ 的简单函数，并设 E_1，E_2，…为 M 的互不相交的元素，其并为 E，μ 的可数可加性指出

$$\begin{aligned}\varphi(E)&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_i\cap E_k)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i\cap E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(E_k)\end{aligned}$$

抽象积分理论最显著的特点就是利用它可以把握处理极限运算.

【定理 1.12】(Fatou 引理) 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是非负可测函数列，它在 M 的集 E 上依 μ-a. e. 收敛于函数 f，则

$$\int_E fd\mu\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_E f_nd\mu.$$

【证明】 不妨设对每个 $x\in E$，$f_n(x)\to f(x)$. 由 $\int_E f$ 的定义，只要证明：若 s 是任一非负简单函数，且 $s\leqslant f$，则

$$\int_E sd\mu\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_E f_nd\mu.$$