数学分析的问题和练习

（工　科　用）

〔苏联〕Б. П. 吉米多维奇　主编

金 志 华　蔡 天 亮　
房 浩 镒　祝 长 忠　译

上海科学技术出版社

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ДЛЯ ВТУЗОВ

Изд. "НАУКА", М., 1978

数学分析的问题和练习

(工 科 用)

[苏联] Б. П. 吉米多维奇 主编

金志华 蔡天亮
房浩镒 祝长忠 译

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷

开本850×1156 1/32 印张15 字数410,000

1983年5月第1版 1983年5月第1次印刷

印数 1—61,600

统一书号: 13119·1061 定价: (科四) 1.65 元

译　序

本书根据〔苏联〕Б.П.吉米多维奇主编的(工科用)《数学分析的问题和练习》一书的第十版(1978年)译出，这是一本适用于工科院校高等数学课程的习题集．原书自1959年初版以来，已经连续出了十版．它与国内现有的同类习题集相比，有着内容广泛，题目类型多，适用面宽等特点．全书除了汇集3193道习题外，还在每一节的开头扼要地写明有关的概念、定理和公式．书中又列举各种类型的例题约三百道，并对一些典型的或较难的习题作了提示或解答．因此，本书对广大电视大学、函授大学和其他业余大学的学生同样适用，对自学也会有很大帮助．

参加翻译的有：金志华(第一、二、三章)，蔡天亮(第六、八章)，房浩鑑(第五、七章)，祝长忠(第四、九、十章)．我们对原书中已发现的错误作了修改，对书后的答案作了初步校核．

由于译者水平有限，译文中错误疏漏之处在所难免，请读者不吝指正．

译　者　1982年3月

第一版序言摘录

本习题集所收集的数学分析习题和例题，适合于高等技术学校高等数学普通教程的最高限度大纲．习题集共有三千多道题，系统地安排在第一至第十章中，包括了高等技术学校高等数学课程(除解析几何外)的所有内容．对课程中那些要求牢固掌握的最重要章节(求极限、微分法、函数作图、积分法、定积分的应用、级数和微分方程的解法)，给予了特别注意．

鉴于某些高等技术学校的数学课程有些补充章节，作者列入了关于场论、傅里叶方法和近似计算的习题．教学实践表明，所引进题目的数量，不仅足以满足学生通过练习牢固掌握课程有关内容的需要，而且可以使教师在各章节范围内选择不同要求的题目、挑选总复习题和测验题．

习题集主要供机器制造类的技术系科的大学函授生和业余大学学生使用，也面向自学者．在每一章节的开头，对课程中相应的内容作简明的理论概述，引出基本定义和公式，并将特别重要的典型题目的解法演示出来．我们认为，这样能为函授生独立使用本习题集提供很大方便．所有计算题都给出了答案．对带单星号(*)或双星号(**)的题目，答案中相应地给出了简明的解法提示或解法．为明白起见，一部分题目用插图说明．

习题集是作者多年来在莫斯科技术学校从事高等数学教学而逐步编成的．这里，除了自编的习题和例题外，还安插了许多大家熟悉的题目，以及一系列来自现有指南书的题目和例题．特别是广泛利用了已出版的《高等数学习题集》(1944 年莫斯科高等技术学校出版)草稿，这本书是莫斯科高等技术学校高等数学教研组的教师们的集体著作．在这些教师中，除本习题集的几位作者外，还有已去世的维特钦基(И. П. Ветчинкин)和舒尔拉波夫(С. Ф.

Шурлапов).

虽然各位作者的工作基本上是按章分配的，但是每人作为编写集体的一员，都对全书负责.

第四版序言

第四版与过去版本没有什么大的区别. 在正文和答案中改正了已发现的印刷错误. 对某些表述作了不大的改变. 增加了一些新的题目，为了保持原来的题号，这些题目用十进位小数编号. 例如，直接插到第 2016 题后面的题目，具有诸如 2016.1, 2016.2 之类的编号.

（以下译文略.）

第八版序言

习题集的这一版与过去的区别，仅在于改正了正文和答案中的印刷错误.

莫斯科，1971 年.

作　者

目 录

第一章　分析引论

§1. 函数的概念

1°. 实数　有理数和无理数统称为实数. 所谓实数 a 的绝对值就是由下列条件所确定的非负数 $|a|$: 当 $a\geqslant 0$ 时 $|a|=a$; 当 $a<0$ 时 $|a|=-a$. 对任意两个实数 a 和 b, 不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

成立.

2°. 函数的定义　如果对于属于某集合 E 的变量 x 的每一个值*), 总唯一地存在变量 y 的一个有限值与之对应, 则 y 称为定义在集合 E 上的 x 的(单值)*函数*, 或*因变量*. x 称为*自变量*, 或*独立变量*. y 是 x 的函数可简单地记为 $y=f(x)$, $y=F(x)$ 等等.

如果对于集合 E 的每一个 x 值, 对应变量 y 的一个或几个值, 则 y 称为定义在集合 E 上的 x 的*多值函数*. 今后如果没有相反的说明, "函数"一词总是指**单值**函数.

3°. 函数的存在域　使给定函数有定义的 x 值的全体称为这个函数的*存在域*或*定义域*.

函数的存在域的最简单的情形为: *闭区间*(*线段*)$[a, b]$, 即适合不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合; 或*开区间*(*间隔*)(a, b), 即适合不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合. 但也可能有构造比较复杂的函数的存在域(例如参阅第 21 题).

例 1　确定函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的存在域.

解　当 $x^2-1>0$, 即 $|x|>1$ 时函数有定义, 因此函数的存在域为 $-\infty<x<-1$ 和 $1<x<+\infty$ 两个开区间.

4°. 反函数　如果方程 $y=f(x)$ 可单值地解出变量 x, 亦即存在这样的函数 $x=g(y)$, 使得 $y\equiv f[g(y)]$, 则函数 $x=g(y)$, 或按标准形式记作 $y=g(x)$, 称为 $y=f(x)$ 的*反函数*. 显然, $g[f(x)]\equiv x$, 即 $f(x)$ 和 $g(x)$ *互为反函数*.

在一般情况下, 方程 $y=f(x)$ 可确定这样一个多值的反函数 $x=f^{-1}(y)$, 使得对函数 $f(x)$ 的所有的 y 值, 总成立 $y\equiv f(f^{-1}(y))$.

---

*) 今后如果没有特别说明, 所研究的数值都假定是实数.

例 2　确定函数

$$y=1+2^{-x} \tag{1}$$

的反函数.

解　由方程(1)解出 x, 可得

$$x=-\frac{\lg(1-y)^{*)}}{\lg 2}. \tag{2}$$

显然, 函数(2)的定义域为 $-\infty<y<1$.

5°. 复合函数和隐函数　如果自变量为 x 的函数 y 是由一连串等式 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 等所给出, 则这个函数称为*复合函数*或*函数的函数*.

由因变量未解出的方程所给出的函数称为*隐函数*. 例如, 由方程 $x^3+y^3=1$ 可确定 y 为 x 的隐函数.

6°. 函数的图形表示　平面 XOY 上坐标 (x, y) 适合方程 $y=f(x)$ 的点的集合, 称为该函数 $y=f(x)$ 的*图形*.

1.** 证明, 如果 a, b 为实数, 则

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

2. 证明下列等式:

1) $|ab|=|a|\cdot|b|$;　　　　2) $|a|^2=a^2$;

3) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$　$(b\neq 0)$;　　4) $\sqrt{a^2}=|a|$.

3. 解不等式:

1) $|x-1|<3$;　　　　2) $|x+1|>2$;

3) $|2x+1|<1$;　　　　4) $|x-1|<|x+1|$.

4. 如果 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$, 求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

5. 如果 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求 $f(0)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$.

6. 设 $f(x)=\arccos(\lg x)$, 求 $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$.

7. 已知 $f(x)$ 是线性函数, 且 $f(-1)=2$ 和 $f(2)=-3$, 求这个函数.

8. 如果 $f(0)=1$, $f(1)=0$ 和 $f(3)=5$, 求二次有理整函数

---

*) $\lg x=\log_{10}x$ 表示 x 的常用对数.

$f(x)$.

9. 如果把函数 $f(x)$ 在区间 $4\leqslant x\leqslant 5$ 看作是线性的，已知 $f(4)=-2$, $f(5)=6$. 求 $f(4.3)$ 的近似值(函数的线性插值).

10. 利用绝对值的记号，将函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x\leqslant 0,\\ x, & \text{如果 } x>0\end{cases}$$

用单一式子写出.

确定下列函数的存在域:

11. 1) $y=\sqrt{x+1}$; 2) $y=\sqrt[3]{x+1}$.

12. $y=\dfrac{1}{4-x^2}$.

13. 1) $y=\sqrt{x^2-2}$;

2) $y=x\sqrt{x^2-2}$.

14**. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

15. $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

16. $y=\sqrt{x-x^3}$.

17. $y=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$.

18. $y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$.

19. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$.

20. $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

21. $y=\sqrt{\sin 2x}$.

22. 设 $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$. 求

$\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 和 $\psi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

23. 定义在对称区间 $-l<x<l$ 上的函数 $f(x)$，如果满足 $f(-x)=f(x)$，则称为偶函数，如果满足 $f(-x)=-f(x)$，则称为奇函数.

指明下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数:

1) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$;

2) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

3) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

4) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$; 5) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

24*. 证明：定义在区间 $-l<x<l$ 中的任意函数 $f(x)$ 可以表示为奇函数和偶函数的和的形式.

25. 证明：两个偶函数或两个奇函数的乘积是偶函数，而偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

26. 如果存在这样一个正数 T（函数的周期），使得对属于函数 $f(x)$ 的定义域的任意 x，都有 $f(x+T)\equiv f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数.

确定下列函数中哪些是周期的，且对周期函数求出它的最小周期 T：

1) $f(x)=10\sin 3x$;　　2) $f(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$;

3) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;　　4) $f(x)=\sin^2 x$;

5) $f(x)=\sin\sqrt{x}$.

27. 将线段 $y=MN$ 的长度和图形 AMN 的面积 S 表示为 $x=AM$ 的函数（图 1），并作出这函数的图形.

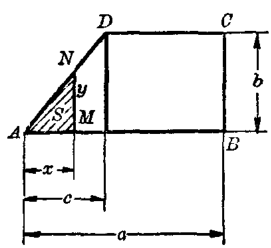

图 1

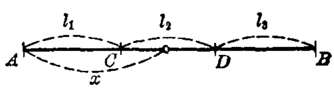

图 2

28. 设轴 $AB=l$（图 2）的三个分段：$AC=l_1$，$CD=l_2$，$DB=l_3$（$l_1+l_2+l_3=l$）上的线密度（即单位长度上的质量）分别等于 q_1，q_2，q_3. 将这轴上的变动线段 $AM=x$ 上的质量 m 表示为 x 的函数，并作出这函数的图形.

29. 如果 $\varphi(x)=x^2$，$\psi(x)=2^x$，求 $\varphi[\psi(x)]$ 和 $\psi[\varphi(x)]$.

30. 如果 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f\{f[f(x)]\}$.

31. 如果 $f(x-1)=x^2$，求 $f(x+1)$.

32. 设 $f(n)$ 是项数为 n 的算术数列的和. 证明：

$$f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=0.$$

33. 证明：如果

$$f(x)=kx+b,$$

且数 x_1, x_2, x_3 构成算术数列，则数 $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ 也构成算术数列.

34. 证明：如果 $f(x)$ 是指数函数，即 $f(x)=a^x(a>0)$，且数 x_1, x_2, x_3 为算术数列，则数 $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ 构成几何数列.

35. 设
$$f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x},$$
证明：
$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

36. 设 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$，$\psi(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$，证明

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)+\psi(x)\psi(y),$$

和
$$\psi(x+y)=\varphi(x)\psi(y)+\varphi(y)\psi(x).$$

37. 如果

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin x, & \text{当}-1\leqslant x\leqslant 0\text{ 时},\\ \operatorname{arc\,tg} x, & \text{当 }0<x<+\infty\text{ 时},\end{cases}$$

求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

38. 确定下列函数 y 的根(零点)，取正值的区域和取负值的区域：

1) $y=1+x$; 2) $y=2+x-x^2$;

3) $y=1-x+x^2$; 4) $y=x^3-3x$;

5) $y=\lg\dfrac{2x}{1+x}$.

39. 求下列函数 y 的反函数及反函数的定义域：

1) $y=2x+3$; 2) $y=x^2-1$;

3) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$; 4) $y=\lg\dfrac{x}{2}$;

5) $y=\operatorname{arc\,tg} 3x$.

40. 求函数

$$y=\begin{cases} x, & 如果\ x\leqslant 0, \\ x^2, & 如果\ x>0 \end{cases}$$

的反函数.

41. 将下列给定函数写成链等式的形式，其中每一环节仅含最简单的初等函数(幂函数，指数函数，三角函数等)：

1) $y=(2x-5)^{10}$;　　　2) $y=2^{\cos x}$;

3) $y=\lg\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;　　　4) $y=\arcsin(3^{-x^2})$.

42. 将下列由链等式给出的复合函数写成一个等式的形式：

1) $y=u^2,\ u=\sin x$;

2) $y=\operatorname{arc\,tg} u,\ u=\sqrt{v},\ v=\lg x$;

3) $y=\begin{cases} 2u, & 如果\ u\leqslant 0, \\ 0, & 如果\ u>0; \end{cases}\quad u=x^2-1.$

43. 将由下列方程给出的函数 y 写成显函数的形式：

1) $x^2-\arccos y=\pi$;　　　2) $10^x+10^y=10$;

3) $x+|y|=2y$.

求出这些隐函数的定义域.

§2. 初等函数的图形

函数 $y=f(x)$ 的作图大体上是这样进行的：给出充分密的点列 $M_i(x_i, y_i)$，其中 $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, 2, \cdots)$，经过所有这些点连结成某一条曲线. 在计算上建议使用对数计算尺.

作图有助于熟识一些基本初等函数的图形(参阅附录 VI). 从

$$y=f(x) \tag{G}$$

的图形出发，利用简单的几何性质可得到下列函数的图形：

1) $y_1=-f(x)$ 为图形 G 关于 OX 轴的镜象；

2) $y_2=f(-x)$ 为图形 G 关于 OY 轴的镜象；

3) $y_3=f(x-a)$ 为图形 G 沿 OX 轴平移值 a；

4) $y_4=b+f(x)$ 为图形 G 沿 OY 轴平移值 b (图3).

例　作函数

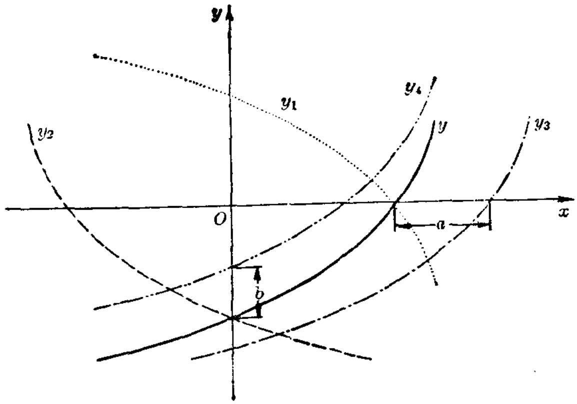

图 3

$$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

的图形.

解 所求曲线是正弦曲线 $y=\sin x$ 沿 OX 轴向右移动 $\frac{\pi}{4}$ 而得(图 4).

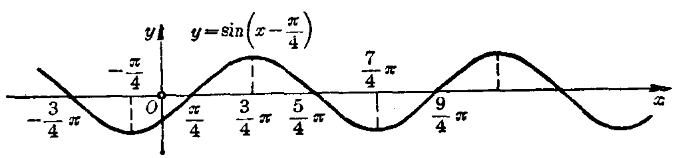

图 4

作下列线性函数的图形(直线):

44. $y=kx$, 如果 $k=0,\ 1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ -2$.

45. $y=x+b$, 如果 $b=0,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2$.

46. $y=1.5x+2$.

作下列二次有理整函数的图形(抛物线):

47. $y=ax^2$, 如果 $a=1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ -2,\ 0$.

48. $y=x^2+c$, 如果 $c=0,\ 1,\ 2,\ -1$.

49. $y=(x-x_0)^2$, 如果 $x_0=0,\ 1,\ 2,\ -1$.

50. $y=y_0+(x-1)^2$，如果 $y_0=0, 1, 2, -1$.

51*. $y=ax^2+bx+c$，如果 1) $a=1$, $b=-2$, $c=3$; 2) $a=-2$, $b=6$, $c=0$.

52. $y=2+x-x^2$. 求这抛物线与 OX 轴的交点.

作出下列高于二次的有理整函数的图形：

53*. $y=x^3$（立方抛物线）.

54. $y=2+(x-1)^3$.

55. $y=x^3-3x+2$.

56. $y=x^4$.

57. $y=2x^2-x^4$.

作出下列分式线性函数的图形（双曲线）：

58*. $y=\dfrac{1}{x}$.

59. $y=\dfrac{1}{1-x}$.

60. $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

61*. $y=y_0+\dfrac{m}{x-x_0}$，如果 $x_0=1$, $y_0=-1$, $m=6$.

62*. $y=\dfrac{2x-3}{3x+2}$.

作出下列有理分式函数的图形：

63. $y=x+\dfrac{1}{x}$.

64. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

65*. $y=\dfrac{1}{x^2}$.

66. $y=\dfrac{1}{x^3}$.

67*. $y=\dfrac{10}{x^2+1}$（安纽斯箕舌线）.

68. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$（牛顿蛇形线）.

69. $y=x+\dfrac{1}{x^2}$.

70. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$（牛顿三叉戟线）.

作出下列无理函数的图形：

71*. $y=\sqrt{x}$.

72*. $y=\sqrt[3]{x}$.