国外计算机科学教材系列

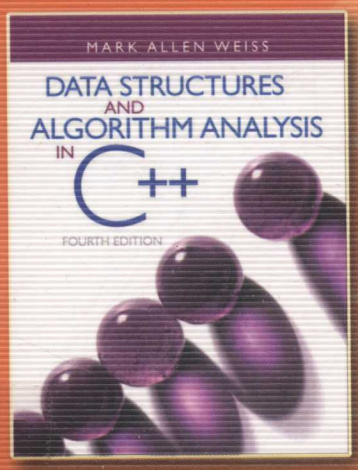
Pearson

数据结构与算法分析

——C++语言描述（第四版）

Data Structures and Algorithm Analysis in C++

Fourth Edition



[美] Mark Allen Weiss 著

冯舜玺 译

中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

国外计算机科学教材系列

数据结构与算法分析

——C++语言描述

（第四版）

Data Structures and Algorithm Analysis in C++

Fourth Edition

[美] Mark Allen Weiss 著

冯舜玺 译

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是数据结构和算法分析的经典教材，书中使用主流程序设计语言 C++的新标准 C++ 11 作为具体的实现语言。内容包括表、栈、队列、树、散列表、优先队列、排序、不相交集算法、图论算法、算法分析、算法设计、摊还分析、查找树算法、后缀数组、后缀树、*k*-d 树和配对堆等。本书把算法分析与 C++程序的开发有机地结合起来，深入分析每种算法，内容全面、缜密严格，并细致讲解精心构造程序的方法。

本书概念清楚，逻辑性强，内容新颖，适合作为大专院校计算机软件与计算机应用等相关专业的教材或参考书，也适合计算机工程技术人员参考。

版权贸易合同登记号 图字：01-2013-7213

图书在版编目(CIP)数据

数据结构与算法分析：C++语言描述：第四版/(美)M.A.韦斯(Mark Allen Weiss)著；冯舜玺译.
北京：电子工业出版社，2016.8
书名原文：Data Structures and Algorithm Analysis in C++, Fourth Edition
国外计算机科学教材系列
ISBN 978-7-121-29057-2

I. ①数… II. ①M… ②冯… III. ①数据结构－高等学校－教材 ②算法分析－高等学校－教材 ③C 语言－程序设计－高等学校－教材 IV. ①TP311.12 ②TP312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 131907 号

策划编辑：冯小贝
责任编辑：周宏敏
印　　刷：三河市华成印务有限公司
装　　订：三河市华成印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　　印张：31.75　字数：833 千字
版　　次：2016 年 8 月第 1 版(原著第 4 版)
印　　次：2016 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：89.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：fengxiaobei@phei.com.cn。

前　言

目的/目标

本书是《数据结构与算法分析——C++语言描述》的第四版，论述组织大量数据的方法——数据结构，以及算法运行时间的估计——算法分析。随着计算机的速度越来越快，对于能够处理大量输入数据的程序需求变得日益急迫。可是，由于在输入量很大时程序的低效率显得非常突出，因此又要求对效率问题给予更加严密的关注。通过在实际编程之前对算法进行分析，学生们可以确定一个特定的解决方案是否可行。例如，在本书中学生可查阅一些特定的问题并看到精心的实现怎样能够把处理大量数据的时间限制从若干个世纪减至不到一秒。因此，若无运行时间的阐释，就不会有算法和数据结构的提出。在某些情况下，对于影响实现的运行时间的一些微小细节都需要认真的探究。

一旦解法被确定，接着就要编写程序。随着计算机功能的日益强大，它们必须解决的问题就变得更加庞大和复杂，这就要求开发更加复杂的程序。本书的目标是同时教授学生良好的程序设计技巧和算法分析能力，使他们开发的程序能够具有最高的效率。

本书适合于高等数据结构课程或是算法分析第一年的研究生课程。学生应该具有中等程度的程序设计知识，包括指针、递归以及面向对象程序设计这样一些内容，此外还要具有一些离散数学的基础。

处理方法

虽然本书的内容大部分都与语言无关，但是，程序设计还是需要使用某种特定的语言。正如书名指出的，我们为本书选择了 C++。

C++已经成为主流系统编程语言。除修复 C 语言的许多语法漏洞之外，C++还提供一些直接结构(类和模板)来实现作为抽象数据类型的泛型数据结构。

编写本书最困难的部分是决定 C++所占的篇幅。使用太多 C++的特性将使本书难以理解，使用太少又会使读者得不到比支持类的 C 语言教材更多的收获。

我们所采取的做法是以一种基于对象的处理方式展示书中的内容。这样，本书几乎不存在对继承的使用。书中以类模板描述泛型数据结构。一般我们避免深奥的 C++特性，但是使用了 vector 类和 string 类，如今它们已是 C++标准的一部分。本书以前各版通过把类模板接口从其实现中分离出来已经做到了对类模板的实现。虽然这是有争议的首选方式，但它揭示出编译器使读者难以具体使用代码的一些问题。因此，这一版中联机代码把类模板作为一个独立的单元来介绍，无需接口与实现的分离。第 1 章提供了用于全书的 C++特性的综述，并描述了我们对类模板的处理方式。附录 A 阐述如何能够重写类模板以使用分离式编译。

以 C++和 Java 二者描述的数据结构的完全版可在互联网上获得。我们使用类似的编码约定以使得这两种语言间平行的结构表现得更加明显。

第四版最重要的变化概述

本书第四版吸收了大量对错误的修正，书中许多部分经过修订以增加表述的清晰度。此外：

- 第 4 章包含 AVL 树删除算法的实现，它是一个常常被读者提出的论题。
- 第 5 章已被广泛修订和扩展，现已包含两个更新的算法：杜鹃散列和跳房子散列。此外，还添加了论述通用散列的新的一节。对 C++中引入的 unordered_set 和 unordered_map 两个类模板的简要讨论也是新加的内容。
- 第 6 章基本没有变化，不过，二叉堆的实现用到了 C++11 版引入的移动操作(move operation)。
- 第 7 章增加了基数排序的内容，并添加了新的一节，论述下界的证明。排序的程序用到 C++11 版中引入的移动操作。
- 第 8 章使用由 Seidel 和 Sharir 所做的新的 union/find 分析，并证明了 $O(M\alpha(M, N))$ 的界以代替前面各版较弱的 $O(M \log^* N)$ 界。
- 第 12 章添加了论述后缀树和后缀数组的材料，包括 Karkkainen 和 Sanders 的后缀数组线性时间构建算法(及其实现)。删除了讨论确定性跳跃表和 AA 树的两节。
- 全书所出现的代码均用 C++11 做了更新。值得注意的是，这意味着 C++11 新特性的使用，包括 auto 关键字、范围 for 循环、移动构造和赋值，以及统一初始化(uniform initialization)。

内容提要

第 1 章包含离散数学和递归的一些复习材料。我相信熟练处置递归唯一的办法是反复不断地研读一些好的用法。因此，除第 5 章外，递归遍及本书每一章的例子之中。另外，第 1 章还介绍了一些材料，作为对基本 C++的回顾，包括在 C++类设计中对模板和一些重要结构的讨论。

第 2 章处理算法分析。这一章阐述渐近分析和它的主要弱点。这里提供了许多例子，包括对对数运行时间的深入解释。通过直观地把一些简单递归程序转变成迭代程序而对它们进行分析。介绍了更复杂的分治程序，不过有些分析(求解递推关系)将推迟到第 7 章再详细阐述。

第 3 章包括表、栈和队列。这一章包括对 STL 中 `vector` 类和 `list` 类的讨论，其中涉及到迭代器的一些材料，并提供对 STL 中 `vector` 类和 `list` 类的重要子集的实现。

第 4 章讨论树，重点在查找树，包括外部查找树(B 树)。UNIX 文件系统和表达式树是作为例子来使用的。本章还介绍了 AVL 树和伸展树。关于查找树实现细节的更详细的处理放在第 12 章介绍。树的另外一些内容，如文件压缩和博弈树，推迟至第 10 章讨论。外部媒体上的数据结构作为几章中的最后论题来考虑。STL 中 set 类和 map 类的讨论也在本章进行，其中包括一个重要的例子，该例使用 3 个分离的映射高效地解决一个问题。

第 5 章讨论散列表，包括诸如分离链接法以及线性探测法和平方探测法这样一些经典算法，此外还有几个新算法，即杜鹃散列和跳房子散列。通用散列也在这里讨论，而对可扩散列的讨论则放在本章末尾进行。

第 6 章是关于优先队列的。二叉堆也安排在这里，还有些额外的材料论述优先队列某些理论上有趣的实现。斐波那契堆在第 11 章讨论，配对堆在第 12 章讨论。

第 7 章是排序。它是关于编程细节和分析的非常特殊的一章。所有重要的通用排序算法均被讨论并进行了比较。详细分析了 4 种算法：插入排序，希尔排序，堆排序，以及快速排序。本版新增加了基数排序和一些与选择相关问题的下界证明。外部排序的讨论安排在本章的末尾进行。

第 8 章讨论不相交集算法并证明其运行时间。这是短小且特殊的一章，如果不讨论 Kruskal 算法则该章可以跳过。

第 9 章讲授图论算法。图论算法的趣味性不仅因为它们在实践中经常发生，而且还因为它们的运行时间强烈地依赖于数据结构的恰当使用。实际上，所有标准算法都是和相应的数据结构、伪代码以及运行时间的分析一起介绍的。为把这些问题放在一个适当的上下文环境下，本章对复杂性理论(包括 NP 完全性和不可判定性)进行了简要的讨论。

第 10 章通过考查一些常见问题的求解技巧来讨论算法设计。这一章通过大量实例而得到强化。这里及后面各章使用的伪代码使得学生对一个算法实例的理解不至于被实现的细节所困扰。

第 11 章处理摊还分析。对来自第 4 章和第 6 章的 3 种数据结构以及本章介绍的斐波那契堆进行了分析。

第 12 章讨论查找树算法、后缀树和后缀数组、*k*-d 树、配对堆。不同于其他各章，本章为查找树和配对堆提供了完全和审慎的实现。材料的安排使得教师可以把一些内容整合到其他各章的讨论中。例如，第 12 章中的自顶向下红黑树可以和 AVL 树(第 4 章的)一起讨论。

第 1 章～第 9 章为大多数一学期的数据结构课程提供了足够的材料。如果时间允许，那么第 10 章也可以包括进来。研究生的算法分析课程可以使用第 7 章～第 11 章的内容。在第 11 章所分析的高级数据结构可以容易地在前面各章中查到。第 9 章中对 NP 完全性的讨论太过简单，以至于不足以用于这样的一门算法分析课程。读者将会发现，参阅一些论述 NP 完全性的著述对深化本书内容大有裨益。

练习

在每章末尾提供的练习与正文中讲授内容的顺序相匹配。最后的一些练习是把一章作为一个整体来处理而不是针对特定的某一节来考虑的。难做的练习标以一个星号，更难的练习标注两个星号。

参考文献

参考文献列于每章的最后。一般来说，这些参考文献或者是历史性质的，代表着书中材料的原始来源，或者阐述对正文中给出结果的扩展和改进。有些文献提供一些练习的解法。

补充材料

所有读者均可从网站http://cssupport.pearsoncmg.com/上获取下列补充资料：

- 例子程序的源代码[①]
- 勘误表

① 也可登录华信教育资源网(www.hxedu.con.cn)免费注册下载。

此外，下列材料只提供给 Pearson Instructor Resource Center（www.pearsonhighered.com/irc）上有资格的教师。如欲获取这些资料，可访问 IRC 或 Pearson Education 销售代表。[①]

- 书中挑选的一些练习的解答
- 本书中的一些图示
- 勘误表

致谢

在该丛书几部著作的准备过程中作者得到了许许多多朋友的帮助，有些人在本书的其他版本中列出。谢谢所有诸位。

如同往常一样，Pearson 专家们的努力使得本书的写作过程更加轻松。我愿意借此机会感谢我的编辑 Tracy Johnson，以及制作编辑 Marilyn Lloyd。贤妻 Jill 因其所做的每一件工作应该得到我特别的感谢。

最后，我还要感谢广大的读者，他们发送 E-mail 信息并指出较早各版的错误和矛盾之处。我的网站www.cis.fiu.edu/~weiss也将包含更新后（C++和 Java）的源代码，一个勘误表，以及到提交问题报告的一个链接。

M. A. W.
Miami, Florida

① 教辅申请方式请参见书末的“教学支持说明”。

目　录

第1章　程序设计：综述

我们在这一章里阐述本书的目的和目标，并简要复习离散数学以及程序设计的一些概念。我们将要

- 看到程序对于合理的大量输入的运行性能与其在适量输入下运行性能的同等重要性。
- 概括本书其余部分所需要的基本的数学基础。
- 简要复习**递归**。
- 概括用于本书的C++语言的某些重要特点。

1.1　本书讨论的内容

设有一组 N 个数而要确定其中第 k 个最大者，我们称之为**选择问题**(selection problem)。大多数学习过一两门程序设计课程的学生编写一个解决这种问题的程序不会有什么困难。“直观的”解决方法是相当多的。

该问题的一种解法就是将这 N 个数读进一个数组中，再通过某种简单的算法，比如**冒泡排序法**(bubble sort)，以递减顺序将数组排序，然后返回位置 k 上的元素。

稍微好一点的算法可以先把前 k 个元素读入数组并(以递减的顺序)对其排序。然后，将剩下的元素再逐个读入。当新元素被读到时，如果它小于数组中的第 k 个元素则忽略之，否则就将其放到数组中的正确位置上，同时将原数组中的最后一个元素挤出数组。当算法终止时，位于第 k 个位置上的元素作为答案返回。

这两种算法编码都很简单，建议读者试一试。此时我们自然要问：哪个算法更好？而更重要的是，两个算法都足够好吗？使用3000万个元素的随机文件和 k=15 000 000进行模拟指出，两个算法在合理的时间量内均不能结束计算；每种算法都需要计算机处理若干天才能算完(不过最终还是给出了正确的答案)。在第7章中将讨论另一种算法，该算法将在1秒种左右给出问题的解。因此，虽然我们提出的两个算法都能算出结果，但是它们不能看作是好的算法，因为对于第三种算法能够在合理的时间内处理的输入数据量而言，这两种算法是完全不切实际的。

第二个问题是解决一个流行的**字谜**(word puzzle)游戏。输入由一些字母构成的二维数组和一个单词表组成。目标是要找出字谜中的单词，这些单词可能是水平、垂直或在对角线上以任何方向放置的。作为例子，图1.1所示的字谜由单词this、two、fat和that组成。单词this从第一行第一列的位置即(1, 1)处开始并延伸至(1, 4)；单词two从(1, 1)到(3, 1)；fat从(4,1)到(2, 3)；而that则从(4, 4)到(1, 1)。

	1	2	3	4
1	t	h	i	s
2	w	a	t	s
3	o	a	h	g
4	f	g	d	t

图1.1　字谜示例

现在至少也有两种直观的算法来求解这个问题。对单词表中的每个单词，我们检查每一个有序三元组(行，列，方向)，验证是否有单词存在。这需要大量嵌套的for循环，但它基本上是直观的算法。

也可以这样，对于每一个尚未越出迷板边缘的有序四元组(行，列，方向，字符数)，我们可以检测是否所指的单词在单词表中。这也导致使用大量嵌套的 for 循环。如果任意单词中的最大字符数已知，那么该算法有可能节省一些时间。

上述两种方法相对来说都不难编码，并可求解通常发表于杂志上的许多现实的字谜游戏。这些字谜通常有 16 行、16 列以及 40 个左右的单词。然而，假设我们把字谜变成只给出**迷板**(puzzle board)而单词表基本上是一本英语词典，则上面提出的两种解法均需要相当可观的时间来解决这个字谜问题，因而这两种方法都是不可接受的。不过，这样的问题仍有可能快速解决，甚至单词表可以很大。

一个重要的观念是，在许多问题中，只写出一个工作的程序并不够。如果这个程序在大数据集上运行，那么运行时间就成了重要的问题。我们将在本书看到对于大量的输入如何估计程序的运行时间，尤其重要的是，如何在尚未具体编码的情况下比较两个程序的运行时间。我们还将看到显著改进程序速度以及确定程序瓶颈的方法，这些方法将使我们能够找到那些需要集中精力去努力优化的代码段。

1.2 数学知识复习

这一节列出一些需要读者记忆或是能够推导出的基本公式，并复习基本的证明方法。

1.2.1 指数(exponent)

$$X^A X^B = X^{A+B}$$

$$\frac{X^A}{X^B} = X^{A-B}$$

$$(X^A)^B = X^{AB}$$

$$X^N + X^N = 2X^N \neq X^{2N}$$

$$2^N + 2^N = 2^{N+1}$$

1.2.2 对数(logarithm)

在计算机科学中，除非有特别的声明，所有的对数都是以 2 为底的。

定义 1.1

$X^A = B$，当且仅当 $\log_X B = A$。

由该定义可以得到几个方便的等式。

定理 1.1

$$\log_A B = \frac{\log_C B}{\log_C A};\quad A, B, C > 0, A \neq 1$$

证明：

令 $X = \log_C B$, $Y = \log_C A$，以及 $Z = \log_A B$。此时由对数的定义，$C^X = B$, $C^Y = A$，以及 $A^Z = B$。联合这三个等式则得到 $B = C^X = (C^Y)^Z$。因此，$X = YZ$，这意味着 $Z = X/Y$，定理得证。 □

定理 1.2

$$\log AB = \log A + \log B;\ A,\ B > 0$$

证明：

令 $X = \log A$, $Y = \log B$，以及 $Z = \log AB$。此时由于假设默认的底为 2，$2^X = A$, $2^Y = B$，以及 $2^Z = AB$。联合最后的三个等式则有 $2^X 2^Y = 2^Z = AB$。因此 $X + Y = Z$，从而证明了该定理。 □

其他一些有用的公式如下，它们都能够用类似的方法推导。

$$\log A/B = \log A - \log B$$

$$\log (A^B) = B \log A$$

$\log X < X$ 对所有的 $X > 0$ 成立。

$$\log 1 = 0,\ \log 2 = 1,\ \log 1024 = 10,\ \log 1048576 = 20。$$

1.2.3　级数(series)

最容易记忆的公式是

$$\sum_{i=0}^{N} 2^i = 2^{N+1} - 1$$

和

$$\sum_{i=0}^{N} A^i = \frac{A^{N+1} - 1}{A - 1}$$

在第二个公式中，如果 $0 < A < 1$，则

$$\sum_{i=0}^{N} A^i \leqslant \frac{1}{1 - A}$$

当 N 趋于∞时该和趋向于 $1/(1-A)$。这些公式是“**几何级数**(geometric series)”公式。

我们可以用下面的方法推导关于 $\sum_{i=0}^{\infty} A^i$ $(0 < A < 1)$ 的公式。令 S 是其和，此时

$$S = 1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + \cdots$$

于是

$$AS = A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + \cdots$$

如果将这两个方程相减(这种运算只允许对收敛级数进行)，等号右边所有的项相消，只留下 1：

$$S - AS = 1$$

这就是说

$$S = \frac{1}{1 - A}$$

可以用相同的方法计算 $\sum_{i=1}^{\infty} i/2^i$，它是一个经常出现的和。我们把它写成

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\cdots$$

用 2 乘两边得到

$$2S=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{6}{2^5}+\cdots$$

将这两个等式相减得到

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots$$

因此，$S=2$。

分析中另一种常用类型的级数是**算术级数**(arithmetic series)。任何这样的级数都可以从下面的基本公式计算其值：

$$\sum_{i=1}^{N} i=\frac{N(N+1)}{2}\approx\frac{N^2}{2}$$

例如，为求出和 $2+5+8+\cdots+(3k-1)$，将其改写为 $3(1+2+3+\cdots+k)-(1+1+1+\cdots+1)$，显然，它就是 $3k(k+1)/2-k$。另一种记忆的方法则是将第一项与最后一项相加(和为 $3k+1$)，第二项与倒数第二项相加(和也是 $3k+1$)，等等。由于有 $k/2$ 个这样的数对，因此总和就是 $k(3k+1)/2$，这与前面的答案相同。

现在介绍下面两个公式，不过它们就没有那么常见了。

$$\sum_{i=1}^{N} i^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\approx\frac{N^3}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^k\approx\frac{N^{k+1}}{|k+1|},\qquad k\neq -1$$

当 $k=-1$ 时，后一个公式不成立。此时我们需要下面的公式，这个公式在计算机科学中的使用要远比在数学其他学科中用得频繁。数 H_N 叫作**调和数**(harmonic number)，其和叫作**调和和**(harmonic sum)。下面近似式中的误差趋向于 $\gamma\approx 0.577\,215\,66$，称为**欧拉常数**(Euler's constant)。

$$H_N=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i}\approx\log_e N$$

以下两个公式只不过是一般的代数运算：

$$\sum_{i=1}^{N} f(N)=Nf(N)$$

$$\sum_{i=n_0}^{N} f(i)=\sum_{i=1}^{N} f(i)-\sum_{i=1}^{n_0-1} f(i)$$

1.2.4 模运算(modular arithmetic)

如果 N 整除 $A-B$，那么我们就说 A 与 B 模 N 同余(congruent)，记为 $A\equiv B\pmod N$。直观地看，这意味着无论 A 还是 B 被 N 去除，所得余数都是相同的。于是，$81\equiv 61\equiv 1\pmod{10}$。如同等式的情形一样，若 $A\equiv B\pmod N$，则 $A+C\equiv B+C\pmod N$，以及 $AD\equiv BD\pmod N$。

N 常常为素数，对此，我们有 3 个重要的定理：

首先，如果 N 是素数，那么 $ab \equiv 0 \pmod{N}$ 成立当且仅当 $a \equiv 0 \pmod{N}$ 或 $b \equiv 0 \pmod{N}$。换句话说，如果一个素数 N 整除两个数的乘积，那么它至少整除这两个数中的一个。

其次，如果 N 是素数，那么方程 $ax \equiv 1 \pmod{N}$ 对于所有的 $0<a<N$ 有一个唯一的解 $\pmod{N}$。这个解 x 就是**乘法逆元**(multiplicative inverse)，其中 x 满足：$0<x<N$。

再次，如果 N 是素数，那么方程 $x^2 \equiv a \pmod{N}$ 对于所有的 $0<a<N$ 或者有两个解 $\pmod{N}$，或者没有解。

有许多的定理适用模运算，其中有些需要用到数论来证明。我们将谨慎地使用模运算，这样，上面的一些定理也就足够了。

1.2.5　证明方法

证明数据结构分析结论的两个最常用的方法是归纳法证明和反证法证明(偶尔不得已也用到只有教授们才使用的胁迫式证明(proof by intimidation)[①]。证明一个定理不成立的最好方法是举出一个反例。

归纳法证明

由**归纳法**(induction)进行的证明有两个标准的部分。第一步是证明**基准情形**(base case)，就是确定定理对于某个(某些)小的(通常是退化的)值的正确性。这一步几乎总是很简单的。接着，进行**归纳假设**(inductive hypothesis)。一般说来，它指的是假设定理对直到某个有限数 k 的所有情况都是成立的。然后使用这个假设证明定理对下一个值(通常是 $k+1$)也是成立的。至此定理得证(在 k 是有限的情形下)。

来看一个例子，我们证明**斐波那契数**(Fibonacci number)，$F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, \cdots, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$，满足对 $i \geqslant 1$，有 $F_i < (5/3)^i$。(有些定义规定 $F_0 = 0$，这只不过将该级数做了一次平移。)为了证明这个不等式，我们首先验证定理对平凡的情形成立。容易验证 $F_1 = 1 < 5/3$ 及 $F_2 = 2 < 25/9$。这就证明了基准情形。假设定理对于 $i = 1, 2, \cdots, k$ 成立。这就是归纳假设。为了证明定理，我们需要证明 $F_{k+1} < (5/3)^{k+1}$。根据定义有

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

将归纳假设用于等号右边，得到

$$\begin{aligned} F_{k+1} &< (5/3)^k + (5/3)^{k-1} \\ &< (3/5)\ (5/3)^{k+1} + (3/5)^2\ (5/3)^{k+1} \\ &= (3/5)\ (5/3)^{k+1} + (9/25)\ (5/3)^{k+1} \end{aligned}$$

化简后为

$$\begin{aligned} F_{k+1} &< (3/5 + 9/25)\ (5/3)^{k+1} \\ &= (24/25)\ (5/3)^{k+1} \\ &< (5/3)^{k+1} \end{aligned}$$

这就证明了该定理。 □

① 这是一个主要用在数学中的诙谐短语，指的是“显然”的却一般未必那么显然的证明方式，听众为免尴尬只得暂时承认结论。在本书的不少地方，因条件所限作者也只能使用这样一种证明方式。——译者注

我们的第二个例子是证明下面的定理。

定理 1.3

如果 $N \geqslant 1$，则 $\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$。

证明：用数学归纳法证明。对于基准情形，容易看到，定理当 $N=1$ 时成立。对于归纳假设，设定理对 $1 \leqslant k \leqslant N$ 成立。下面将在该假设下证明定理对于 $N+1$ 也是成立的。我们有

$$\sum_{i=1}^{N+1} i^2 = \sum_{i=1}^{N} i^2 + (N+1)^2$$

应用归纳假设得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N+1} i^2 &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \\ &= (N+1)\left[\frac{N(2N+1)}{6} + (N+1)\right] \\ &= (N+1)\frac{2N^2+7N+6}{6} \\ &= \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{N+1} i^2 = \frac{(N+1)[(N+1)+1][2(N+1)+1]}{6}$$

定理得证。□

通过反例证明

公式 $F_k \leqslant k^2$ 不成立。证明这个结论的最容易的方法就是计算 $F_{11} = 144 > 11^2$。

反证法证明

反证法证明(proof by contradiction)是通过假设定理不成立，然后证明该假设导致某个已知的性质不成立来进行的，从而原假设是错误的。一个经典的例子是证明存在无穷多个素数。为了证明这个结论，我们假设定理不成立。于是，存在某个最大的素数 P_k。令 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 是依序排列的所有素数并考虑

$$N = P_1 P_2 P_3 \cdots P_k + 1$$

显然，N 是比 P_k 大的数，根据假设 N 不是素数。可是，$P_1, P_2, \cdots, P_k$ 都不能整除 N，因为除得的结果总有余数 1。这就产生一个矛盾，因为每一个整数或者是素数，或者是素数的乘积。因此，P_k 是最大素数的原假设是不成立的，这正意味着定理成立。