

《自修数学》小丛书

大 家 学 数 学

[英] D. A. 约翰逊 著
W. H. 格 伦

周煥山 恽简馨 译

科 学 出 版 社

1 9 8 0

内 容 简 介

这本小册子是《自修数学》小丛书中的第一本。书中介绍了主要数学分支的内容和著名数学家的生平。本书力求以活泼明快的语言说明数学的意义和用途。书中穿插了不少富有趣味性的练习题，书末附有答案。由于内容浅显，可供中学生课外阅读，也可供具有中等文化程度的读者参考。

Donovan A. Johnson

William H. Glenn

INVITATION TO MATHEMATICS

John Murray London, 1964

大 家 学 数 学

D. A. 约翰逊 著
〔英〕 W. H. 格伦

周焕山 恽简馨 译

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980 年 10 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1980 年 10 月第一次印刷 印张：2 5/8

印数：0001—105,200 字数：43,000

统一书号：13031·1367

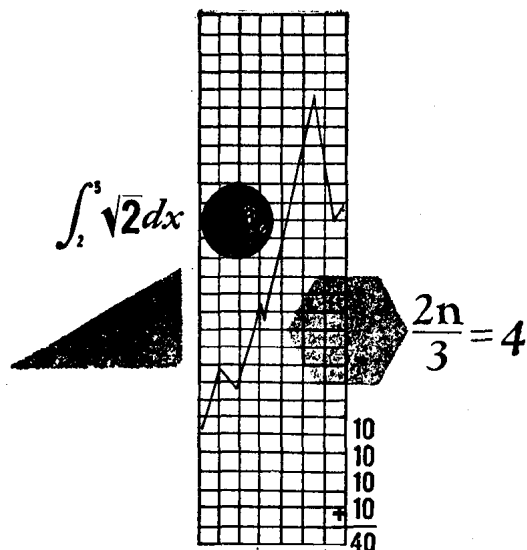
本社书号：1892·13—1

定 价：0.25 元

目 录

一、数学世界	1
1. 什么是数学	1
2. 我们世界的数学	2
3. 数学家的工作	4
二、数学中的推理方法	8
1. 实验法与归纳推理	8
2. 演绎推理	13
3. 数学中的推理、逻辑与证明	16
三、主要数学分支初探	20
1. 数学结构	20
2. 算术：数学结构的一个范例	21
3. 再谈算术	22
4. 一种新的算术	30
5. 几何：空间、形状与测量	34
6. 新的几何	35
7. 三角与测量	39
8. 代数与数学语言	40
9. 代数魔术	45
10. 概率：关于机会的科学	47
11. 统计：探究数据的意义	49
12. 无穷、极限、变量和微积分	51

13. 集合：一个有用的数学概念.....	54
四、数学的进展.....	57
1. 数学的新发展	57
2. 旧数学的新应用	60
3. 一些未解决的数学问题	61
五、数学的特点与力量.....	67
练习答案.....	71



一、数学世界

1. 什么是数学

为什么数学在现代变得如此重要？为什么一些产业家和政界人士也如此关心数学人材的不足？新的电子计算机能否在解决所有数学问题方面都比人脑更迅速、更准确，以致使数学家无用武之地？

为了回答这些问题，我们首先得弄清楚什么是数学，数学有什么用处。就研究的内容和范围来说，数学比算术广泛得多，算术是研究数与数的计算的科学；数学比代数广泛得多，

代数是符号表达的语言，主要研究运算与关系；数学比几何广泛得多，几何主要研究形状、大小与空间；数学比统计广泛得多，统计主要研究数据的整理与图示，并分析其意义；数学比微积分广泛得多，微积分主要研究变量的变化规律、极限与无限。数学包括所有这一切，但又比这一切更为广泛。

数学是一种思维的方法，一种推理的方法。能用数学方法去判断一个想法是否正确，或者至少是否大概正确。数学是探索和发明的乐土，在这里每天都有新思想被发现。数学是用来解决科学中、行政管理中、工业中提出的各种问题的一种思维方法。它是用各种符号表达的语言，这种语言能为世界上所有文明民族所理解。有人甚至认为，数学将是其它星球上的居民（如果有居民的话）也能理解的语言！它是一种象音乐那样具有对称性、模型和令人喜悦的节奏的艺术。

也有人把数学说成是研究模型的学问，这里的“模型”一词，泛指空间形式、数量关系或逻辑思维中的任意一种规律性。因为在自然界中广泛存在模型、规律性和对称性，所以，研究模型对于科学发展有着重要的意义。例如光、声、磁、电流、海水的波浪、飞机的翱翔、雪片的形状、原子的结构等等，所有这一切都具有能用数学来进行分类的模型。

2. 我们世界的数学

如果回顾一下文明史，我们将发现数学对于世界文明总

是起着重要的作用。

自古以来，数学是人类从事下述各种活动的必要工具：

确定地产疆界；预报四季变化；驾驶船舶；建造房屋和桥梁；测绘地图；研制武器，制订作战计划；了解天体运行；促进商业贸易。

在现代，数学广泛地应用于：

发现新的科学原理；发明新机器；研制电子计算机；研究比赛策略；指挥交通运输；制造新的疫苗和药品；驾驭原子能；发展宇宙航行；探测新的矿藏；预报天气变化；预报人口增长。

数学的应用每天都在扩大，数学的各个分支每天都在发展。运用实验、想象和推理，数学家们不断地发现新的规律和理论，以此促进科学技术和工商业的发展。如果你想一想世界上的最新进展，例如人造卫星、核潜艇、自动化工厂、抗菌素，等等，你就会看到数学和其它科学正在如何改变着我们的世界。

并非每个人都能成为数学家和科学家，但是为了了解现代世界，每个人都必须懂得一些数学。这些数学知识将使你在学校里学习得更好，在家庭生活方面安排得更合理，在将来的工作岗位上工作得更加出色。在科学技术迅速发展、工农业生产日益自动化的今天，没有相当的数学知识就难以适应社会的需要。我们的政府工作人员，如果要在我们这个复杂的充满新观念的世界中作出明智决定的话，那就必须要有一

定的数学知识。

自然,如果你有志于以科学、统计学或各种工程技术作为未来的职业,你就更必须努力精通数学,因为这些学科都是以数学为基础的。今天还需要大量的职业数学家去研究、去教学,去寻找数学的新应用,职业数学家在建设我们的文明社会中经常起着重要的作用。世界上大数学家所用的推理方法以及他们逻辑的成果,在我们现代文化中甚至更为重要。

3. 数学家的工作

虽然数学是地图测绘员、建筑师、宇宙航行者、机械师、会

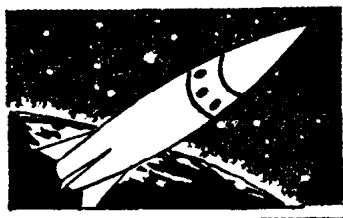


图 1

计等各种人必须应用的工具,但是,无论是处理财经问题的会计,还是测算地球到火星距离的天文学家,无论是设计桥梁的工程师,还是发明新型塑料的科学家,通

常都不是严格意义上的数学家。不错,他们确实应用了数学家已经发现的许多数学知识,但是数学家的任务在于去发现新的数学,去证明新的数学理论,或者应用已有数学知识去解决新的问题。数学家们经常关心的是这样一些有趣的问题:

假设一个五岁的儿童乘坐火箭以光的速度作宇宙航行,十年后回到地球。那么当他返回地球时,这个儿童多大年

纪？

按照爱因斯坦的相对论，这个儿童返回地球时还是五岁！这就是说，当这个儿童以光速旅行时，他的年龄并没有增大。

数学家解决问题的能力，在很大的程度上依赖于他对数学模型的敏感。如果他发现某种值得注意的模型或规律性现象，他就对它进行仔细研究，并力图从中发现某种意义，某种法则，某种公式，以便解释或者描述这种模型。因此，要成为一个优秀的数学家，你必须善于发现数学模型。巴斯加三角形就是数学家发现模型的一个很好的例子。法国数学家布莱斯·巴斯加(1623—1662)研究了在下列数学关系式中的系数：

$$(a + b)^0 = 1$$

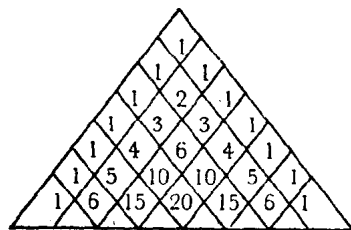
$$(a + b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

如果你注意一下这等式右边的各项的系数，就能得到排成三角形的下列模型：



注意每行的两端是1, 每行中其它各数都等于它的肩上的两数之和. 这种数的模型被称为巴斯加三角形¹⁾, 应用它能解决代数与统计中的许多问题.

据说, 凡是能成为数学家的人多少总有一点诗人气质. 他们喜欢一个劲儿地动脑筋, 他们的大部分工作是进行思维和推理. 数学家为了解决一个数学难题, 往往成年累月地一直在想着这个问题. 不仅坐在办公桌边或实验室的时候在想着这个问题, 在等公共汽车时也可能在想, 在登山或洗澡时也可能在想. 数学家的工作是一种令人兴奋的工作, 是对我们国家和全世界都很重要的工作.

练习1 关于模型的问题

先找出有规律地重复的一种模型, 然后解题.

1. 约翰·史密斯和他的女朋友朱莉, 两人都有工作. 约翰每工作八天后休息一天; 朱莉每工作五天后休息一天. 约翰今天休息; 朱莉明天休息. 问他们哪一天(如果有这一天的话)一同休息?

2. 将6枚硬币摆成一排, 3枚正面向上(用⊕表示)为一组, 3枚背面向上(用⊙表示)为另外一组, 两组之间隔一空位, 如图:

⊕ ⊕ ⊕ - ⊙ ⊙ ⊙

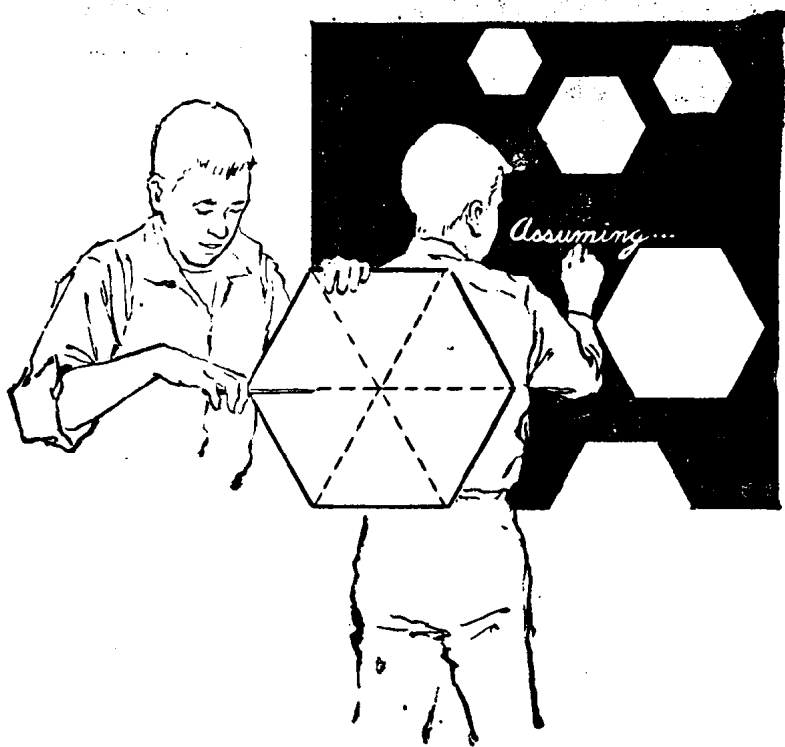
现在要把六枚硬币的位置变换为:

⊙ ⊙ ⊙ - ⊕ ⊕ ⊕

- 1) 这种数的模型我国数学家杨辉于1261年所著的“详解九章算术”一书里就已经出现. 杨辉指出这方法出于“释锁算书”, 并说我国古代数学家贾宪已经用过它. 所以我国发现这个表不迟于11世纪, 要比巴斯加早500年左右.

——译者

规定两组硬币只向对方移动，每次只移动一枚硬币，可以走一步移进空位，也可跳过一颗硬币进入空位。如果你先用两枚硬币进行试验，然后用四枚试验，你就会很快发现本题的模型。



二、数学中的推理方法

1. 实验法与归纳推理

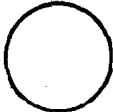
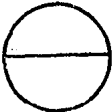
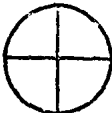
我们常看到包括硬币、生日、假日之类的数学问题,但是数学家主要不是关心这类日常生活问题。他们更关心的是用想象、直觉和推理去发现新的概念,解决疑难问题。他们乐于探索新的思想,尝试用各种解题方法,并以清晰简明的语言叙

述新的思想。

数学家用以发现新思想的方法之一是进行实验。这种方法类似于科学家在实验室里所用的方法，它叫做实验法或归纳推理。让我们来看怎样应用实验法解决下述问题：

如果你用任意方法去切一块圆饼，只要通过同一点不超过两刀，那么最多能得到几块？

我们可用实验法解决这个问题。自然，我们用不着特地去买一块饼来，只要在纸上画一些圆就行了。我们对各圆进行不同次数的切割（实际上就是画圆的弦），并在表中记录结果，得到：

切割次数	图形	块数	块数增加数
0		1	
1		2	1
2		4	2
3		7	3

我们仔细考察一下这张表，看看我们能否找到所体现的模式。

从记录上看,块数增加的模型是自然数 1, 2, 3. 切割次数所成的数列也是这个数列. 这种增加的模型是否继续有效呢? 让我们再多试几次,并记录数据,得到:

切割次数	图形	块数	块数增加数
4		11	4
5		16	5

现在的增加数分别是 1, 2, 3, 4, 5, 可见模型继续有效. 这种模型能使我们预报: 切割 6 次得 22 块, 切割 7 次得 29 块. 并进一步能使我们预报切割任意次所得的块数. 想一想: 切割 8 次、9 次将得到多少块?

这种类型的推理是由考虑特殊事例而推得一般结论的, 叫做归纳推理.

还有另外一个简单的实验, 它说明一个著名的数学事实. 用纸剪 n 个大小不同的三角形, 按图 2a 的方式撕下每个三角形的三个角, 然后把每个三角形的三个角按图 2b 的方式拼拢.

每个三角形的三个角拼拢后是否组成一条直线呢? 如果你用一根直尺如图 2b 所示的那样靠上去, 你会看到三个角拼拢后正好组成一条直线.

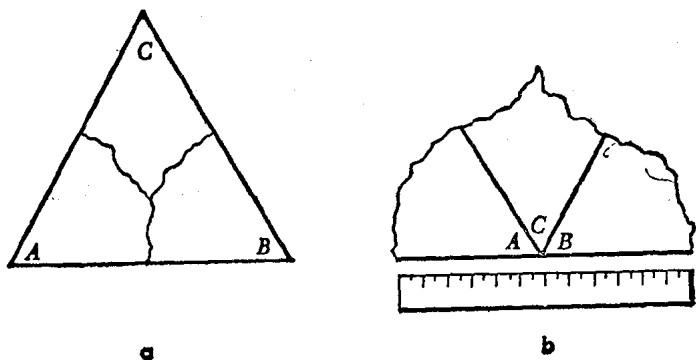


图 2

这个实验说明，一个三角形的三个内角之和等于一平角，即等于 180° 。但是无论我们做多少次试验，我们永远不能由此确定每一个三角形的内角和都毫不例外地等于 180° 。也许有某一个形状古怪的三角形竟然不符合这个结论。所以，我们象这样由实验法得到的结论只能说是大概正确的。实践说明，由实验得到的结论常常是正确的，但并非总是正确的或必然正确的。

考察下面的算术计算：

$$2 \times 2 = 4$$

$$2 + 2 = 4$$

$$\frac{3}{2} \times 3 = 4\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} + 3 = 4\frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{3} \times 4 = 5\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3} + 4 = 5\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{4} \times 5 = 6\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4} + 5 = 6\frac{1}{4}$$

由这些例子，我们可能归纳出这样一个结论：两数之积等于这两数之和。不必说，你这个结论是错误的，你只要举一个简单的例子就能推翻这个结论。这说明归纳推理存在严重的缺点。只考虑几个特殊事例可能导致错误的结论。为了推翻错误的结论，我们只要举出一个实例说明结论不成立就行了。

练习 2 应用归纳推理

进行下述实验，并写出一个大概的结论。

1. 以 9 乘 n 个自然数，然后求所得积的数字和。例如：

$$9 \times 2 = 18$$

$$1 + 8 = 9;$$

$$9 \times 43 = 387$$

$$3 + 8 + 7 = 18.$$

关于 9 的任意倍数的数字和，你能由此得出什么结论？根据你所得的结论，预报下面的自然数中哪几个能被 9 整除？

$$477, 648, 8766.$$

2. 写出 1 到 20 的整数的平方。观察这些平方数，你能对于 (1) 奇数的平方；(2) 偶数的平方；(3) 能被 5 整除的自然数的平方，作出怎样的结论？由此你对 22 的平方作怎样的预报？

3. 测量咖啡筒、盘子、灯罩、字纸篓、唱片、自行车轮子等圆形物体的周长和直径，并把周长除以直径。比较所得各商并说出由此得到的结论。

4. 用一段线和一个重物做成一个摆长为 10 英寸的摆。数出这个摆在 10 秒钟内来回摆动的次数，然后把摆长调整为 20、30 和 40 英寸，并分别数出这些摆在 10 秒钟内摆动的次数。关于摆动次数与摆的长度之间的关系，你能得出什么结论？