21 世纪高等院校教材

国家级 精品课程教材

大学数学教程

（上册）

姜东平　江惠坤　编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

大学数学教程

（上 册）

姜东平　江惠坤　编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书分上、下两册. 上册内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程和差分方程简介、级数中的常数项级数、函数项级数、幂级数和傅里叶级数. 在附录里介绍了双曲函数、极坐标和复数的基本概念.下册内容包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线与曲面积分、场论初步、 线性代数中的行列式、矩阵与向量、线性方程组、矩阵的对角化和实二次型. 本书将微积分、空间解析几何、线性代数纳于一体， 内容安排上经过新的组合， 注意各知识之间的联系，更加合理、更加精炼.

本书可供理、工、农、医类中除数学、物理、天文等对数学要求特高的专业以外的本科生作教材和参考书用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程. 上册 / 姜东平，江惠坤编. —北京：科学出版社，2005
(21 世纪高等院校教材)
. ISBN 7-03-015232-8

I.大… II.①姜… ②江… III.高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 044988 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：钟 洋
责任印制：安春生 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2005 年 7 月第一次印刷 印张：20 3/4
印数：1—3 000 字数：394 000

定价：26.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

前　言

本书是为南京大学的化学、化工、生化、医学、地学及环境科学所属各专业编写的基础课教材，也可作为普通高等院校理工农医类学生的数学基础课教材和教学参考书. 本书2004年成为国家级精品课程教材之一. 编者曾在南京大学有关各系的教师、学生中作过广泛的调查研究，在准确了解了后续的专业课对数学的要求的基础上，于 1994 年完成了初稿.在此后十年的使用过程中，根据教学改革过程中课程设置及教育部关于硕士生入学统一考试对数学二、三、四类考生的要求的不断变化，做了多次修改，形成了目前的版本.

本书分上、下两册，共12章. 上册7章，内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、广义积分、微分方程与差分方程、级数.下册5章，内容包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线与曲面积分、场论初步、线性代数. 全书教程约需 160~200 授课学时，可根据各不同专业要求和课时计划取舍部分内容.

在成书过程中，编者注意到：

一、将微积分、空间解析几何、线性代数纳于一体. 这样，既能比较好地阐述彼此的联系，对教师及学生使用起来也比较方便. 对空间解析几何不作深入讨论，仅围绕多元函数微积分的需要作必要的介绍. 对线性代数不追求体系上的完整，凡可以合并处理的均合并处理，减少平行的论述，以求用尽量少的篇幅涵盖尽量多的内容.

二、不追求理论上的严密而着重于方法的阐述，目的在于为学生的专业课的学习提供必要的足够的数学知识和常用的基本的数学方法. 虽然若干定理的证明被删去，但为理解这些定理所必需的概念及由这些定理所导出的公式、方法都力求阐述清楚，以求读者熟练掌握和灵活运用.

三、注意全书各个部分之间的联系. 例如：全微分方程与线积分，矩阵的对角化与一阶线性微分方程组，级数与极限，向量与矩阵……指出这些联系，为的是加深读者对相关内容的理解，从而灵活、有效地运用有关方法.

四、将少量并非各专业都需要的内容以小字排印，教师可以按不同专业决定取舍.

五、在每册书的最后，给出了大部分习题的答案，供读者核对之用.

由于水平、能力所限，不当之处在所难免，恳请同行、专家不吝赐教.

编　者

2005 年于南京大学

目　　录

第 1 章　极限与连续

高等数学的主要部分之一是数学分析. 极限理论是数学分析的基础. 一方面, 极限概念是数学分析的最基本的概念之一, 数学分析的其他基本概念无非是这样或那样的极限, 都需要用极限概念来表达; 另一方面, 数学分析中非常重要的微分运算与积分运算的引进和讨论都要借助于极限这个工具. 因此, 深刻理解极限的定义及与之有关的无穷小与无穷大的概念, 掌握极限存在的判定准则, 熟练地进行极限的运算, 对于学好数学分析是至关重要的.

数学作为描述自然现象的工具, 极限刻画了变量的变化趋势, 而函数的连续性则刻画了变量在变化的全过程中不间断或没有突然的变化 (例如时间的推移, 温度的升高与降低等就是如此. 而电路中电流的接通或断开, 则与此不同, 是一种突然的变化). 本章首先建立极限这个重要基础, 然后介绍函数的连续与间断的概念, 并讨论连续函数的性质及其运算规则.

1.1 极　　限

1.1.1 数列及其简单性质

按一定顺序排列的无穷多个相等或不相等的数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为一个**无穷数列**, 简称为**数列**, 记为 $\{x_n\}$. 数列 $\{x_n\}$ 中的每一个数称为数列的项, 而第 n 项 x_n 称为它的通项, 这是一个依赖于自然数 n (称为足码) 的变量. 数列也可以看作是定义在自然数集 $\mathbf{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 上的一个函数 $f(n) = x_n$. 在不致产生混淆时, 也将数列 $\{x_n\}$ 记为 x_n, 例如,

(1) $x_n: 1, 4, 7, \cdots, 1+3(n-1), \cdots$

(2) $y_n: \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^3}, \cdots, \dfrac{1}{3^n}, \cdots$

(3) $z_n: 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$

(4) $w_n: -1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$

(5) $u_n: 1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}, \cdots$

(6) $v_n: 2, 0, \dfrac{2}{3}, 0, \cdots, \dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$

(7) $r_n: 1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots$

都是数列的例子, 它们的通项依次是

$$x_n = 1 + 3(n-1), \qquad y_n = \frac{1}{3^n}, \qquad z_n = (-1)^{n+1},$$

$$w_n = (-1)^n, \qquad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \qquad v_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{n},$$

$$r_n = 1.$$

注意, 给定一个数列, 不但给定了成为数列的项的那些数, 而且还给定了这些数的排列次序. 在 (3) 和 (4) 中, 数列 $\{z_n\}, \{w_n\}$ 都由数 1 和 -1 排列而成, 但由于排列的次序不同, 数列 (3) 和 (4) 是不相同的数列!

如果 $x_n = y_n (n = 1, 2, \cdots)$, 则说数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 相等; 数列 $\{x_n + y_n\}$ 称为 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的和; 数列 $\{x_n y_n\}$ 称为 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的积; 数列 $\{kx_n\}$ 称为数 k 与数列$\{x_n\}$ 之积. 例如, 在上面的例中, $\{v_n\}$ 与 $\{r_n\}$ 之和为 $\left\{1 + \dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$, 可简记为

$$v_n + r_n = 1 + \frac{1+(-1)^{n-1}}{n}.$$

$\{z_n\}$ 是 $\{w_n\}$ 与 -1 的积, 可简记为 $z_n = -w_n$. r_n 是 $\{-z_n\}$ 与 $\{w_n\}$ 的积, 也可简记为 $r_n = -z_n w_n$.

总之, 数列的 “相等”、“和”、“积”、“与数的乘积” 的概念就是函数的对应概念, 只要记住数列就是自然数集上的函数就可以了. 下面关于数列的单调性和有界性的定义也可以用函数的单调性和有界性去理解.

定义 1.1.1(单调数列)　如果

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 为不减数列; 如果严格地成立不等式

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 为严格的递增数列. 反之, 如果

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 为不增数列; 如果严格地成立不等式

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 为严格的递减数列.

不减 (增) 数列也称为广义的递增 (减) 数列. 递增数列和递减数列, 无论是广义的还是严格的, 统称为**单调数列**.

例如, 数列 (1) 是严格递增的, 数列 (2) 是严格递减的, 数列 (7) 既是单调不增的, 也是单调不减的, 数列 (3), (4), (5), (6) 都不是单调的.

定义 1.1.2 (有界数列) 如果存在与 n 无关的正数 M, 使得数列 $\{x_n\}$ 的每一项都满足 $|x_n| \leqslant M$, 则说 $\{x_n\}$ 是**有界数列**(也说 x_n 是**有界**的).

如果这样的正数 M 不存在, 则说 $\{x_n\}$ 是**无界数列**(也说 x_n 是**无界**的).

如果存在与 n 无关的常数 L, 使得数列 $\{x_n\}$ 的每一项都满足 $x_n \leqslant L (\geqslant L)$, 则说 x_n **有上 (下) 界**.

例如, 数列 (2)~(7) 都是有界数列, 而 (1) 是无界数列, 它有下界但无上界. 由于不等式 $|x_n| \leqslant M$ 等价于 $-M \leqslant x_n \leqslant M$, 可见, 若数列 $\{x_n\}$ 是有界的, 则它的一切项都落在数轴上的有限区间 $[-M, M]$ 内, 并且易知:

数列 x_n 是有界的, 当且仅当存在数 A, B, 使得 $A < x_n < B$ 对一切 n 成立.

1.1.2 数列的极限

我们已经知道, 数列 $\{x_n\}$ 的项 x_n 是依赖于 n 的变量, 它随着 n 的变化而变化, 现在我们来考察当 n 无限增大时 x_n 的变化趋势.

对于数列 (1), 随着 n 的增大, x_n 也跟着增大. 由此可见, 对数轴上无论哪一点 a (也就是无论哪一个实数 a), 随着 n 的无限制增大, x_n 与 a 的距离也将无限制增大 (虽然对于最初有限个 n, 当 x_n 小于 a 时, x_n 可以随 n 的增加而与 a 越来越近).

对于数列 (3) 和 (4), z_n 和 w_n 都轮流取值 1 和 -1, 虽然它们不像 (1) 中的 x_n 那样, 与不论哪一点 a 的距离最终都无限制地增大, 但这一距离却也不能总是无限制地小. 即 z_n 也罢, w_n 也罢, 都不能随 n 的无限制增大而总是任意接近定数 a.

与数列 (1)、(3)、(4) 不同, 数列 (2)、(5)、(6)、(7) 却是另一种情形, 当 n 无限制增大时, (2) 中的 $y_n = \dfrac{1}{3^n}$ 无限制地接近于数轴上的定点 $x = 0$. (5) 中的 u_n 时而正时而负, (6) 中的 v_n 时而等于 0 时而异于 0, 但只要 n 很大, 它们与定点 $x = 0$ 的距离就可以很小. 亦即随 n 的无限制增大, y_n, u_n 以及 v_n 与常数 0 的差就其绝对值而言都可任意小. 至于数列 (7), 它的每一项都等于 1, 因而与数轴上的定点 $x = 1$ 的距离都是 0, 当然也可以看成是该距离要小到什么程度就小到什么程度的, 亦即随着 n 无限制增大, r_n 可任意接近常数 1.

数列的项在变化趋势上的这种不同, 数学上的精确描述就归结为无极限和有极限. 下面, 用所谓 “ε-N” 语言给出数列极限的定义.

定义 1.1.3 (数列的极限) 对已知的数列 $\{x_n\}$, 如果存在一个常数 a 满足下面的条件: 对于任意给定的正数 ε, 都存在正整数 N, 使得对于满足 $n > N$ 的一切项 x_n, 都成立不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则说 a 是数列 $\{x_n\}$ (当 n 趋于无穷时) 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a\,(n\to\infty).$$

有极限的数列称为**收敛数列**; $n\to\infty$ 时 x_n 的极限是 a 也说成 $n\to\infty$ 时 x_n 收敛于 a. 没有极限的数列称为**发散数列**.

这是对数列极限的定量精确的描述. 通常可以简述为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \text{s.t. 对 } n > N \text{ 的一切 } x_n, \text{ 恒有 } |x_n - a| < \varepsilon\,.$$

(s.t. 是 such that(使得) 的缩写.)

开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 称为以 a 为中心、ε 为半径的**邻域**, 简称为 a 的 ε 邻域. 于是数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限的**几何意义**是: 对于定点 a 的任意给定的无论多小的 ε 邻域, 都存在正整数 N, 数列 $\{x_n\}$ 的第 N 项以后的一切项都落在 a 的 ε 邻域内. 见图 1.1.

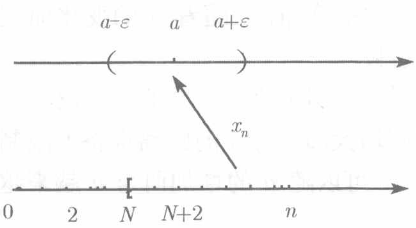

图 1.1

对于定义 1.1.3 以及它的几何解释, 需要特别强调的是: 第一, 一定先有 ε, 再有 N, 且 ε 是任意给定的. 每给一个 ε, 都应该有相应的正整数 N. 第二, N 必须与 n 无关, 只与 ε 有关. 一旦确定了 N, 则对于大于 N 的一切自然数 n, x_n 无一例外地都适合 $|x_n - a| < \varepsilon$ (即落在 a 的 ε 邻域内, 图 1.1).

例如, 我们再考察数列 (4), $\{w_n\} = \{(-1)^n\}$, 取定常数 0, 对于给定的 $\varepsilon = 2$, 很明显, $\{w_n\}$ 的一切项都在邻域 $(-2, 2)$ 内, 因而对这一 ε , 任意正整数 N 都满足定义 1.1.3 的要求. 可是, 若给定 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, 则一切 w_n 都在邻域 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 以外. 对这样的 ε, 相应的正整数 N 就不存在了.

若改取常数 $a = 1$, 对于 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, a 的 ε 邻域是开区间 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, 则 w_n 的一切偶数项都在这个邻域内, 换成更小 (无论多小) 正数 ε 也仍然如此, 可是全部奇数项却都在这个邻域以外. 可见, $a = 1$ 和 $a = 0$ 一样, 同样不满足定义 1.1.3 的要求, 因而它们都不是 $\{w_n\}$ 的极限.

读者可以说明, 任何实数 a 都不是 $\{w_n\}$ 的极限, 即数列 $\{w_n\}$ 没有极限, 因而是发散的.

数列 (5) 就不同了, 给定 $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, 可取 $N = 10$, 从第 11 项起, 一切项 $u_{11}, u_{12}, \cdots$ 都落在常数 0 的邻域 $\left(-\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}\right)$ 内, 将 ε 换成更小的 $\dfrac{1}{50}$, 则可取 $N = 50$, 从第 51 项起, 一切项都落在 $\left(-\dfrac{1}{50}, \dfrac{1}{50}\right)$ 内, 对于更小的 $\varepsilon = 10^{-10}$, 则可取 $N = 10^{10}$, ……

不难想像, 对无论多小的正数 ε, 相应的 N 都是可以求得的. 我们确信: $\{u_n\}$ 有极限 0. 不过, 这种分析, 既不简洁又欠严密. 现在按定义 1.1.3 的要求给出证明.

例 1.1.1 对于数列 (5), $u_n=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证 因为 $|u_n-0|=\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}, \forall\,\varepsilon>0$, 取正整数 N 使 $N\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则对一切的 $n>N$,

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\leqslant\varepsilon,$$

因而

$$|u_n-0|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.\qquad\square$$

例 1.1.2 对于数列 (6), $v_n=\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}\,(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

证 因为 $|v_n-0|=\left|\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right|\leqslant\dfrac{2}{n}, \forall\,\varepsilon>0$, 取正整数 N 使 $N\geqslant\dfrac{2}{\varepsilon}$, 则对一切 $n>N$,

$$\frac{2}{n}<\frac{2}{N}\leqslant\varepsilon,$$

因而

$$|v_n-0|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}v_n=0.\qquad\square$$

例 1.1.3 对于数列 (2), $y_n=\dfrac{1}{3^n}(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

证 因为 $|y_n-0|=\dfrac{1}{3^n}, \forall\,\varepsilon>0$ (不妨设 $\varepsilon<1$), 注意 $\dfrac{1}{3^n}<\varepsilon$ 相当于 $3^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 取正整数 $N\geqslant\log_3\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则对于一切的 $n>N$,

$$\frac{1}{3^n}<\frac{1}{3^N}\leqslant\varepsilon,$$

于是

$$|y_n-0|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}y_n=0.\qquad\square$$

例 1.1.4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.

解　若 $a=1$, 则对一切 n, $\sqrt[n]{a}=1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

若 $a>1$, 则

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1.$$

欲要 $\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$, 只需 $\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$. 于是 $\forall\,\varepsilon>0$, 取正整数 N, 使 $N\geqslant\dfrac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$, 则对大于 N 的一切 n,

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon.$$

若 $a<1$, 则

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=1-\sqrt[n]{a}.$$

欲要 $1-\sqrt[n]{a}<\varepsilon$, 只需 $\sqrt[n]{a}>1-\varepsilon$. 于是 $\forall\varepsilon>0$ (不妨限制 $\varepsilon<1$), 取 N, 使 $N\geqslant\dfrac{1}{\log_a(1-\varepsilon)}$, 则当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon.$$

总之, 对于任何正数 a, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. □

例 1.1.5　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n^2+3}=2$.

证　因为 $\left|\dfrac{2n^2+1}{n^2+3}-2\right|=\left|\dfrac{-5}{n^2+3}\right|=\dfrac{5}{n^2+3}<\dfrac{5}{n^2}<\dfrac{1}{n}$(当$n>5$). $\forall\,\varepsilon>0$, 取正整数 N, 使 $N>\max\left\{5,\dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$①, 则对 $n>N$,

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon,$$

从而

$$\left|\frac{2n^2+1}{n^2+3}-2\right|<\varepsilon,$$

亦即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2+3}=2.$$ □

在例 1.1.5 中, 由于将 $\dfrac{5}{n^2+3}$ 放大为 $\dfrac{1}{n}$, 由 $\dfrac{1}{N}<\varepsilon$ 寻求 N 比由 $\dfrac{5}{N^2+3}<\varepsilon$ 求 N 简单了许多.

① 注: $\max\{a,b\}$ 表示 a 与 b 之较大者, 例如 $\max\{1,4\}=4, \max\{2,2\}=2$.

1.1.3 收敛数列的性质, 极限的运算

定理 1.1.1 (极限的唯一性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限.

证 (反证法) 设 $\{x_n\}$ 有两个极限, 记较小者为 a, 较大者为 b, 给定 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, 由定义 1.1.3, 存在正整数 N_1 和 N_2, 使得 $n > N_1$ 时, $|x_n - a| < \dfrac{b-a}{2}$ 成立, 于是 $x_n < \dfrac{b-a}{2} + a = \dfrac{a+b}{2}$. $n > N_2$ 时, $|x_n - b| < \dfrac{b-a}{2}$ 成立, 于是 $b - \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{b+a}{2} < x_n$. 取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时,

$$\frac{a+b}{2} < x_n < \frac{a+b}{2}.$$

由此可得到 $\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{a+b}{2}$, 这是不可能的. 这一矛盾证明了收敛数列 $\{x_n\}$ 只有一个极限. □

建议读者联系数列的极限的几何意义去理解上述证明.

定理 1.1.2 (有界性) 收敛数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

证 设 $\{x_n\}$ 以 a 为极限, 给定 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N, 对一切 $n > N$, $|x_n - a| < 1$ 成立, 从而

$$|x_n| < |a| + 1 \quad (n > N).$$

取

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |a| + 1\},$$

则 $|x_n| \leqslant M$ 对一切 n 成立, 按定义 1.1.2, $\{x_n\}$ 是有界的. □

定理 1.1.2 表明, 无界数列一定是发散的. 例如 1.1.1 节的数列 (1) 是无界数列, 因而是发散的. 但需注意, 数列的有界性只是收敛的必要条件. 即有界数列未必是收敛的. 例如, 在 1.1.1 节曾指出, 数列 (3), (4) 都没有极限, 但它们却都是有界的.

定理 1.1.3 (极限的四则运算) 若数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 分别以 a, b 为极限, 则

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$;

(iv) 若 $b \neq 0, y_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

证 (i) 和 (ii) 的证明十分简单, 读者可自做练习, (iii) 和 (iv) 证明是类似的, 兹以 (iv) 为例, 给出证明.

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{bx_n - ay_n}{by_n}\right| = \left|\frac{b(x_n - a) - a(y_n - b)}{by_n}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{b}{by_n}\right| |x_n - a| + \left|\frac{a}{by_n}\right| |y_n - b|, \qquad (1.1)\end{aligned}$$