

最新
升级版

考研数学

24 堂课

主编 杨超 方浩 姜晓干

北京理工大学出版社

考研数学

24 堂课

主 编 杨 超 方 浩 姜晓千



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

考研数学 24 堂课/杨超, 方浩, 姜晓千主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2017. 3

ISBN 978-7-5682-3725-3

I. ①考… II. ①杨…②方…③姜… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 034835 号

新堂 4S

干御美 著 方 强 林 崇 主

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 保定市中华美凯印刷有限公司

开 本 / 710 毫米×1000 毫米 1/16

印 张 / 34.5

字 数 / 730 千字

版 次 / 2017 年 3 月第 1 版 2017 年 3 月第 1 次印刷

定 价 / 62.80 元

责任编辑 / 王玲玲

文案编辑 / 王玲玲

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 王美丽

前言

本书是长期在一线从事考研数学辅导的教师为广大备战考研学生量身定做的基础复习用书。

每一届学生备战考研的时间一般分为两种：一种是启动时间比较早，在大三上学期就确定考研目标，并着手准备；一种是大三下学期才开始准备。每年的十一月份左右我们都会开设数学导学班（部分城市会开基础班），发现有一些问题学生很困惑，比如：

(1) 基础阶段是夯实数学基础的关键时期，可以借助本科课本来复习，但考研大纲的要求是什么？

(2) 考生独立看书过程中，会遇到很多不易理解的概念、性质、定理，该怎么解决？

(3) 数学离不开做题，但除了完成课本后的相关习题，还需要做哪些相应的习题？

.....

在平时的教学过程中，我们一直在思考和探索：面对浩如烟海的习题、各种抽象的概念和定理，怎样在有限的时间里，让学生摆脱数学给人留下的枯燥和无聊的印象，给学生一种新的理念和思想？并让他们在这种理念下学会主动学习，感受高等数学的乐趣？如何能够掌握考试内容的精髓，做到由此及彼，举一反三？如能解决这些问题，学生不仅能学好数学，还可以提升自己的学习能力，这正是一个准研究生的基本素质。

为了实现这个目标，在多年的教学和总结的基础上，我们编写了这本《考研数学 24 堂课》。本书共 24 课，包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个版块。每课分为五部分：

第一部分为知识结构网络图，清晰呈现知识脉络。

第二部分为基本内容讲解，即对考纲要求的考点进行梳理。

第三部分为重点、难点、易错点讲解，考生在学习过程中，容易由于对基本概念、定理理解得不深，逻辑推理不严密，没有理解公式的本质等原因，而出现

一些典型错误，我们将其归纳和整理，以帮助学生澄清模糊概念，排除思维障碍。本部分的写作语言活泼生动，娓娓道来，例如，求极限的三种常见的方法——等价无穷小替换、洛必达法则和泰勒公式，我们分别用三种交通工具——大巴车、普通火车和高铁来形容，让学生很容易理解它们的优势与劣势。

第四部分为典型例题，详细讲解了每章内容中的典型例题的解题方法与技巧，并且我们的例题还分基础阶段和强化阶段，学生可以根据自己的学习情况选择在不同的阶段使用。

第五部分是真题赏析，我们选择了1987年以来的部分真题，之所以选择这么多年的真题，一是可以通过做题检查自己的学习效果，二是在做真题的过程中可以了解命题的规律。

由于编者自身水平和编写时间有限，书中不妥和疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正，同时欢迎广大考研学子和作者交流：

新浪微博：<http://weibo.com/chaoyu666>（杨超 Math）

<http://weibo.com/u/1848595875>（晓千老师）

<http://weibo.com/u/2262109970>（方浩 Fellow）

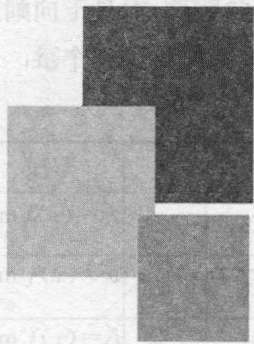
作者

2017年春于北京

目 录

第一部分 高等数学	(1)
第 1 课 函数、极限与连续	(2)
第 2 课 导数与微分	(45)
第 3 课 中值定理	(93)
第 4 课 不定积分	(115)
第 5 课 定积分与反常积分	(134)
第 6 课 微分方程	(189)
第 7 课 多元函数微分学	(210)
第 8 课 二重积分	(233)
第 9 课 向量代数与空间解析几何	(251)
第 10 课 无穷级数	(261)
第 11 课 多元函数积分学	(286)
第二部分 线性代数	(315)
第 12 课 行列式	(316)
第 13 课 矩阵	(340)
第 14 课 向量	(371)
第 15 课 线性方程组	(391)
第 16 课 特征值与特征向量	(412)
第 17 课 二次型	(429)
第三部分 概率论与数理统计	(443)
第 18 课 随机事件和概率	(444)

第 19 课	随机变量及其分布	(459)
第 20 课	多维随机变量及其分布	(477)
第 21 课	随机变量的数字特征	(497)
第 22 课	大数定律和中心极限定理	(511)
第 23 课	数理统计的基本概念	(518)
第 24 课	参数估计与假设检验	(531)



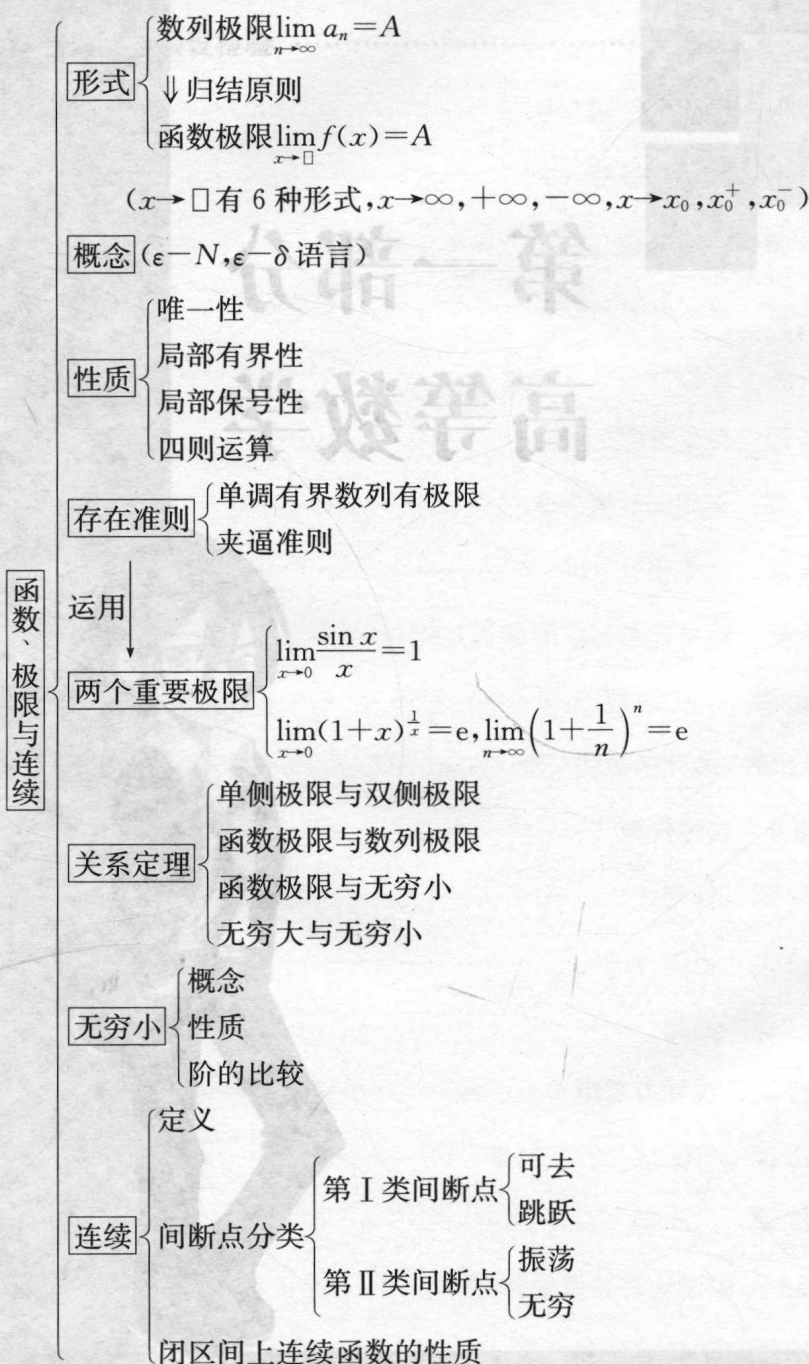
第一部分 高等数学





第 1 课 函数、极限与连续

知识网络结构图



基本内容讲解

1. 极限概念

不少考生觉得极限概念很抽象,难以理解,这是因为极限的概念本身描述的是一个动态过程,而人的认识能力倾向于静态;其次,极限是一个无穷运算,而人的习惯倾向于具体、有穷的计算.

每个极限都由四句话组成,见表 1-1-1.

表 1-1-1

记号	$\forall$	$\exists$	当自变量满足	恒成立	则称
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$	$\xi > 0$	$\delta > 0$	$0 < x - x_0 < \delta$	$ f(x) - A < \xi$	当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$	$\xi > 0$	$\delta > 0$	$0 < x_0 - x < \delta$	$ f(x) - A < \xi$	$f(x)$ 在 x_0 的左极限为 A
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$	$\xi > 0$	$\delta > 0$	$0 < x - x_0 < \delta$	$ f(x) - A < \xi$	$f(x)$ 在 x_0 的右极限为 A
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$	$\xi > 0$	$X > 0$	$ x > X$	$ f(x) - A < \xi$	当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$	$\xi > 0$	$X > 0$	$x > X$	$ f(x) - A < \xi$	当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$	$\xi > 0$	$X > 0$	$x < -X$	$ f(x) - A < \xi$	当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$	$\xi > 0$	自然数 N	$n > N$	$ x_n - A < \xi$	当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 以 A 为极限

2. 基本性质

(1) 唯一性

若 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x)$ 存在, 则极限唯一.

(2) 局部有界性

若 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A$, 则存在 $\dot{U}$, 在 $\dot{U}$ 内有界.

(3) 不等式性质

若 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = B$.

① 如果 $A > B$, 则 $\exists \dot{U}$, 当 $x \in \dot{U}$ 时, $f(x) > g(x)$;

② 如果在 $\dot{U}$ 中 $f(x) \geq g(x)$, 则 $A \geq B$.

(4) 保号性

若 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A > 0$, 则 $\exists \dot{U}$, 当 $x \in \dot{U}$ 时, $f(x) > 0$ ($A < 0$ 有类似结论); 或当 $x \in \dot{U}$ 时, $f(x) > 0$, 则 $A \geq 0$.

3. 存在准则

(1) 单调有界准则

① 若数列 x_n 单增且有上界 (即 $x_{n+1} \geq x_n$, 并对 $\forall n$, 都有 $x_n \leq M$), 则 $\{x_n\}$ 收敛.





②若数列 x_n 单减且有下界(即 $x_{n+1} \leq x_n$, 并对 $\forall n$, 都有 $x_n \geq M$), 则 $\{x_n\}$ 收敛.

【注】以递推形式出现的数列极限问题经常用此定理证明.

(2) 夹逼准则

$\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = \lim_{x \rightarrow \square} h(x) = A$, 又 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A$.

(3) 极限与单侧极限关系

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

(4) 数列与子数列极限的关系

数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛.

经常这样使用: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = a$.

(5) 海涅定理(归结原则)

设 $f(x)$ 在 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\} (x_n \neq x_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 存在.

【注】该定理常用来否定函数极限存在, 若能找出 $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow x_0, f(x_n) = A, f(y_n) = B$, 但 $A \neq B$, 可以说函数极限不存在.

例如, 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

【证明】取 $x_n = \frac{1}{n\pi}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \pi^2 \sin n\pi = 0$,

取 $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi^2 \rightarrow \infty$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

4. 两个重要极限及推广

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 推广为: $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$.

② $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$,

推广为: $\lim_{\square \rightarrow 0} (1+\square)^{\frac{1}{\square}} = e$.

5. 极限的运算

(1) 极限的四则运算

设 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = B$, 则

$\lim_{x \rightarrow \square} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = A \pm B$,

$$\lim_{x \rightarrow \square} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = A \cdot B,$$

$$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \square} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \square} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

(2) 复合运算(连续函数)

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow \square} g(x)), \text{ 其中 } f(x) \text{ 为连续函数.}$$

(3) 幂指函数的极限

如果 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A (A > 0)$, $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = B$, 且 A, B 均为有限常数, 则

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow \square} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow \square} g(x)} = A^B.$$

$$\begin{aligned} \text{【证明】} \lim_{x \rightarrow \square} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \square} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \square} [g(x) \ln f(x)]} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \square} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \square} \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \square} g(x) \ln \left[\lim_{x \rightarrow \square} f(x) \right]} = e^{B \ln A} = A^B. \end{aligned}$$

【注】当 A, B 不是有限常数, 或 A 不大于 0 时, 上述命题不成立.

切记, 幂指函数求极限时, $x \rightarrow \square$ 是同一变化过程, 不能分开来求极限. 例如, 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^2 - (1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}.$$

很多同学容易犯这样的错误: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = e^2$, 所以原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^2 - e^2}{x^2} =$

0. 正确做法见后面例题.

6. 函数、极限、无穷小关系定理

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$$

$\alpha(x)$ 为 $x \rightarrow \square$ 时的无穷小.

【注】该定理在计算有关极限题时作用很大, 尤其是遇到有关抽象函数时, 使用该定理, 可以把抽象函数具体化.

例如, $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列说法正确的是().

A. 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散

B. 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界

C. 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小

D. 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

【解】因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 由上述定理可得 $x_n y_n = 0 + \alpha(n)$, 其中 $\alpha(n)$ 为当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小量. 故 $y_n = \frac{1}{x_n} \alpha(n)$, 即 y_n 为无穷小量, 故选 D.





7. 无穷小量、无穷大量及其阶(见表 1-1-2 和表 1-1-3)

表 1-1-2

无穷小量	$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 0$	关系	$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{1}{f(x)} = \infty$
无穷大量	$\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = \infty$		$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{1}{g(x)} = 0$

表 1-1-3

比值		定义	记号
$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)}$	$= 0$	$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶无穷小	$f(x) = o[g(x)]$
	$= A \neq 0$	$f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小	
	$= 1$	$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小	$f(x) \sim g(x)$
$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g^k(x)} = A \neq 0$		$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 k 阶无穷小	$f(x) = o[g^k(x)]$

(1) 无穷小量的性质

① 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

② 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

③ 无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

(2) 等价无穷小量的替换定理

设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x), \tilde{\alpha}(x), \tilde{\beta}(x)$ 都是无穷小量, 且 $\alpha(x) \sim \tilde{\alpha}(x), \beta(x) \sim \tilde{\beta}(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\tilde{\beta}(x)} f(x)$.

【注】 等价无穷小量代换用在乘、除法(整个式子, 而不是部分式子)中, 而加、减法中不能用等价无穷小去替换.

(3) 熟记几个常见的等价无穷小公式

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^a - 1 \sim ax$.

【注】 一定要把公式广义化, 而且常见的变形要学会, 例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 那么 $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 1$, $\ln f(x) = \ln(1+[f(x)-1]) \sim [f(x)-1]$. 一般来说, 考题不会直接考. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$, 经常以“ $e^{f(x)} - e^{g(x)}$ ”形式出现, 具体见后面例题讲解.

(4) 无穷小阶的运算规律

设 m, n 为正整数, 则

① $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l)$, $l = \min\{m, n\}$, 在极限的加减运算中, 高阶无穷小被低阶无穷小所吸收, 戏称“吸星大法”.

② $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$, $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$.

③ $m \geq n$, $o(x^m)/x^n = o(x^{m-n})$ (注: 两个 $o()$ 不可以相除).

④ $k \cdot o(x^m) = o(kx^m) = o(x^m)$, $k \neq 0$, 为常数.

重点、难点、易错点讲解

1. 几个判别函数有界和无界的结论

① 连续函数在闭区间上一定有界.

② 函数在开区间 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则函数在区间 (a, b) 内有界.

③ 有界变量与无穷大量之和为无穷大量.

④ 两个正无穷大量之和与积均是无穷大量.

⑤ 函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}$, $x_n \in I$, 使 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大数列.

考生自练: ① $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在区间()内有界.

A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$

② 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是().

A. 无穷小 B. 无穷大
C. 有界的, 但不是无穷小 D. 无界的, 但不是无穷大

2. 求极限的常见错误

① 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right]$.

【解】原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+n)^2} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$.

② 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$.

③ 设 $x_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

【证明】 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} \cdot \sqrt{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$.



故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

①, ②, ③的解法为经典的错误, 错误的原因在于没有正确理解极限的四则运算法则. 极限四则运算法则是针对有限项求和的, 而题①是无穷多项求和. ②和③的错误在于使用法则的前提是 $f(x), g(x)$ 的极限存在.

3. 在等价无穷小替换求极限时, 要注意并不是任何两个无穷小量都可进行比较

例如, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x}$ 时, 常见错误为:

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin(x^2 \sin \frac{1}{x}) \sim x^2 \sin \frac{1}{x}$ 这个结论是不成立的, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x^2 \sin \frac{1}{x}}$

没有意义.

在 $x=0$ 点的任意小的去心邻域, 当 $x_n = \frac{1}{n\pi}$ 时, 分母 $x^2 \sin \frac{1}{x}$ 能取到零值. 正确解法应使用夹逼准则. 因为 $|\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})| \leq |x^2 \sin \frac{1}{x}| \leq x^2$,

$$\text{故 } 0 < \left| \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} \right| \leq \left| \frac{x^2}{x} \right| = |x| \rightarrow 0, \text{ 从而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} = 0.$$

4. 求极限 $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)}$ 时, 要注意在自变量 x 的变化过程中 $f(x)$ 是否趋于零. 若是, 才有 $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$

求极限: ① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$; ② $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan x}$.

错误解法: ① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$; ② $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan x} = 3$.

①中的自变量 x 趋向于无穷, 这时, $\frac{\sin x}{x}$ 中的 x 趋向于无穷而不是零, 故不能使用公式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

②中的自变量 x 趋向于 π , 这时, $\sin 3x$ 不等价于 $3x$, $\tan x$ 也不等价于 x , 故不能使用

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{\tan x} = 1 \times 3 = 3.$$

正确解法:

①根据无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小, 知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$.

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan x} \xrightarrow{\text{令 } t=x-\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3(t+\pi)}{\tan(t+\pi)} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{\tan t} = -3.$$

5. 利用等价无穷小代换需要注意的问题

利用等价无穷小的性质, 求下列极限:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}; \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}.$$

常见错误:

$$\textcircled{1} \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sin x \sim x, \tan x \sim x, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x}{x^3} = 0.$$

$$\textcircled{2} \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

错误分析:

①先证明一个命题:

若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta',$ 且 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0,$

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = k \neq 1, \text{ 则 } \alpha - \beta \sim \alpha' - \beta';$$

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = k \neq -1, \text{ 则 } \alpha + \beta \sim \alpha' + \beta'.$$

即等价无穷小代换用在加减法时需满足的条件.

$$\text{因为 } \lim \frac{\alpha' - \beta'}{\alpha - \beta} = \lim \frac{\frac{\alpha'}{\beta} - \frac{\beta'}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} = \lim \frac{\frac{\alpha'}{\beta} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} = \frac{1 \cdot k - 1}{k - 1} = 1,$$

所以 $\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'.$

此题, 记 $\alpha = \tan x, \beta = \sin x, \alpha' = \beta' = x,$

因为 $\frac{\tan x}{\sin x} = 1,$ 所以得不到 $\tan x - \sin x$ 与 $x - x$ 等价的结论.

②当 $x \rightarrow 0$ 时, 尽管无穷小 $\sqrt{1+x\sin x}-1$ 与无穷小 $\sqrt{1+x^2}-1$ 等价, 但将式子 $\sqrt{1+x\sin x}-1$ 中的 $x\sin x$ 换成与之等价的无穷小 x^2 却是没有定理保证的.

必须先证明结论: $\sqrt{1+x\sin x}-1 \sim \sqrt{1+x^2}-1.$

正确解法:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2};$$





$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x}-1}{e^{x^2}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

6. 在同一极限下应避免分次求极限

例: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

错误解法: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, 所以, 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e-e}{x} = 0$.

错误分析: 此题中分子、分母中的 x 是同一个自变量, 取极限时应属于同一极限过程, 也就是说, 二者是同步进行的, 上述错误解法中是先求分子中的极限, 然后再求分母的极限, 这样就成为两个独立的过程, 不是同步的.

正确解法: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\left[\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right]}}{x}$$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x) - x}{x}}{x}$$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{e}{2}.$$

7. 洛必达法则

设 $\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ (或 $\frac{\infty}{\infty}$);

$\textcircled{2} \exists \dot{U}$, 当 $x \in \dot{U}$ 时, $f'(x), g'(x)$ 都存在, 且 $g'(x) \neq 0$;

$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或 ∞);

则 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或 ∞).

考生在使用洛必达法则计算过程中, 应论证是否满足洛必达法则的条件, 尤其是 $\textcircled{3}$, 在已知极限反求待定参数的题中, 应该对洛必达法则 **慎用**. 仔细阅读下面两道题.

【例 1】 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{c \cdot x^k} = 1$, 则 $c = \underline{\hspace{2cm}}, k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{c \cdot x^k} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x - 3 \cos 3x}{c \cdot k \cdot x^{k-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin x + 9 \sin 3x}{c \cdot k \cdot (k-1) x^{k-2}}$$