数学

课外补充读物

（供九年级学生阅读）

柯洛索夫著　陈　銓译

上海教育出版社

А. А. КОЛОСОВ

КНИГА ДЛЯ ВНЕКЛАССНОГО ЧТЕНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ IX КЛАССА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА—1960

（本书根据俄罗斯苏维埃联邦社會主义共和国教育部教育出版社 1960 年版譯出）

数学课外补充读物

（供九年級学生阅读）

（苏）柯洛索夫 著
陈　銓 譯

*

上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
上海市书刊出版业营业许可証出 090 号
中華书局上海印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：787×1092 1/32　印張：7 3/8　字数：169,000
1963 年 7 月第 1 版　1963 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—20,000 本

統一书号：7150 · 1421
定　价：（八）0.62 元

譯者的話

数学是中学里一門重要的基础課程，是一門工具課．学好数学不論对于进一步学习科学技术或者从事劳动都是不可缺少的条件．怎样才能学好数学呢？当然，首先而且最重要的是上課时用心听讲，課后认眞复习，多想多练．但是要学好这样一門重要的課程，也必須閱讀一些課外书，它可以扩大我們的知識領域，帮助我們更牢固更深刻地掌握課內所学的知識，提高解題能力，增加学习数学的兴趣．这本书就是适合我国高中同学閱讀的数学課外讀物．

这本书有很丰富的內容，它生动地告訴我們許多数学分支是怎样发生、怎样发展起来的，数学家們在創建这些数学分支的时候，經历过怎样艰巨的道路，也告訴我們数学在科学技术和生产实际中有着怎样广泛的应用．书中有引人入胜的数学故事，也有令人深思的数学习題．

本书共分八章，大部分內容都沒有超出高中数学知識的范圍，只是第四章算图和第六章罗巴切夫斯基几何学，可能对我国高中同学陌生些，不过閱讀这两章所需的預备知識，也只限于高中数学課本中的內容．

虽然这是一本課外讀物，希望讀者也要认认眞眞地閱讀，书中有些証明和演算的过程，往往不是一看就使人明白的，这时最好不要馬上跳过去，讀者如果动动脑筋，拿出笔来算算画画，可能就会弄清楚的．这样，你学习数学的兴趣就会增加，独立思考能力也将提高得更快．

书中有不少数学历史知識，可惜关于我国古代数学的偉大成就介紹得太少了. 对于这方面問题，譯者尽自己所知道的写了一些补充介紹，作为附注列于頁末.

每章最后所介紹的参考书，如有中譯本的都注明中譯本的譯者和出版社，以便讀者参閱；沒有中譯本的未列出.

本书的許多材料也可以供中学数学教师教学时参考，或者作为数学課外活动（如数学小組、数学墻报、数学晚会）的內容.

由于譯者水平所限，譯本中的錯誤和缺点是难免的，希望讀者多多指正.

譯　者

目 录

重要，重要的是人們怎样得到这个結果的.”寻求正确的方法，是研究任何現象的第一步．方法的好坏往往可以决定研究成果的大小．熟悉各种研究方法，掌握其中重要的几种，是每个学生的任务．

不同的科学有不同的研究方法，就是在同一門科学領域里(比方說数学)，也存在不同的方法．現在就同讀者談談其中某些方法．

首先，让我們回忆一下物理学里常用的一个方法．比方說，你想获得电流通过导綫时导綫电阻的定律，这时你要发现所研究現象的各个因素：电流强度、导綫长度和导綫横截面积之間的联系，就必須拿电源、安培計和不同长度以及不同横截面积的导綫做各种实驗．把銅导綫連接在电源的电路中，电路中間安上安培計，再把电路接通(图1)．安培計指針轉动的角度，告訴我們电路中电流的大小．然后把銅导綫增长到2倍、4倍……，观察安培計中指針的变化，你会看到电流强度也降低为原来的$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$……，所以导綫的长度增加几倍，导綫的电阻也就跟着增加同样的倍数．于是得出結論：**导綫的电阻跟它的长度成正比**．

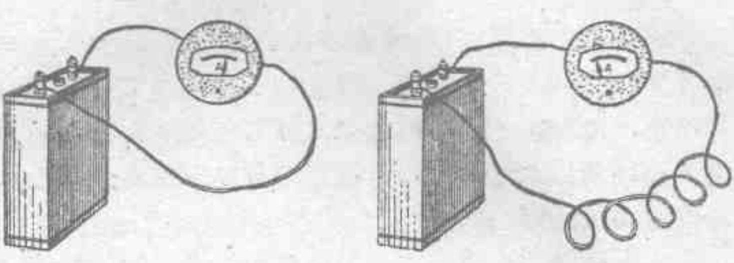

图 1

其次，你再把长度一定、横截面积是1[毫米]^{2}的銅导綫接

这种由对特殊事物的判断过渡到对一般事物的判断的可靠程度，也就是得到的規律正确性的可靠程度，同实驗的次数有密切关系．这种推理通常是完全可信的．

我們用这样的方法最初是发現所研究現象各因素之間的确定的联系，这种联系只有对許多特殊情况是正确的，然后把它推广到所有一般的情况，从而建立起揭露这些現象本质的普遍規律．

这样一种由对特殊事物的判断过渡到对一般事物的判断的推理方法，在邏輯学上叫做**归納法**．剛才我們解导綫电阻問題所用的方法，最好叫做"經驗归納法"，因为最后的結論是对某些实驗作观察以后得出的，这就是"經驗"两字的来由．这个方法有时也叫做"不完全归納法"，为什么用"不完全"这个詞儿，我們以后再解釋．

不完全归納法不仅仅在物理学和一般自然科学中广泛地应用，就是在数学領域里也是如此．特别是关于数的許多性质，最初是通过观察和不完全归納法发現的，这些性质的发現远远在严格証明它的正确性之前．不过在数学里，不完全归納法通常不是研究的最后阶段．物理学家通过一系列的观察和不完全归納法，可能断定，这样得到的規律性不需要作进一步的研究就可以作为現象的普遍法則．但是数学家就不能这样冒險了．数学上的发現要經过补充的、更周密的研究，然后才能确定归納法所得到的結論或者成为法則，或者因为錯誤而被推翻①．这里抄录欧拉的一段話对我們是有帮助的："……我們应該非常謹慎，不要把那些通过观察或者只用归納法发現的数的性质当作眞实

① 就是在物理学里，仅仅应用归納法有时也会犯錯誤．在古代，"自然害怕眞空"曾經作为一个規律．这規律长期被人认为是确定不变的，一直到 1640 年才被托里拆利推翻．

的結論．实际上，必須对这些发現的性质作更周密的研究，要么証明它成立，要么推翻它，不管哪种情况，我們都可以学到一点有益的东西．”

如果我們分析几个例子，使大家看到不完全归納法会得到錯誤的結論，那末讀者一定更会觉得欧拉的話讲得正确了．

吃一壍，长一智

法国数学家比尔·费尔馬（1601—1665年）研究过形如：

$$f(n)=2^{2^n}+1$$

的数，当 $n=0$、1、2、3、4 的时候，$f(n)$ 是质数．事实上，

$$f(0)=2^{2^0}+1=3,\ f(1)=2^{2^1}+1=5,\ f(2)=2^{2^2}+1=17,$$

$$f(3)=2^{2^3}+1=257,\ f(4)=2^{2^4}+1=65,537.$$

费尔馬猜想，一切这样形式的数都是质数，他相信这个猜想是正确无疑的，竟建議一些英国数学家去証明这个猜想．但是过了不久，欧拉証明了下面的数：

比尔·费尔馬

列昂納尔德·欧拉

$$f(5)=2^{2^5}+1$$

是合数，因为

$$2^{2^5}+1=4,294,967,297=641\cdot 6,700,417.$$

我們再来看一个例子：

欧拉在寻求自变量是整数、函数值全是质数的式子时，試驗了三項式

$$\varphi(n)=n^2+n+41.$$

当 n 等于从 1 到 39 的任意整数的时候，这三項式的值的确都是质数：

$$\varphi(1)=43,\ \varphi(2)=47,\ \varphi(3)=53,\ \cdots\cdots$$

如果根据不完全归納法，似乎可以断定这个式子对于任意整数 n 都得到质数．物理学里往往通过少数的实驗，就敢于从对特殊情況正确的判断推出它对所有一般情況也正确．但是，这里如果这样做的話就会犯錯誤，因为当 $n=40$ 的时候，$\varphi(n)=n^2+n+41$ 就是合数了：

$$\varphi(40)=40^2+40+41=1681=41^2.$$

下面是一个更令人信服的例子．

已知如下形式的数：

$$F(n)=991n^2+1,$$

式中 n 是自然数．我們用从 1 开始的自然数代入公式里的 n，可以发現所得到的数不是某一个数的完全平方数，甚至你化一生的时間去一个一个地代进去，也不会发現它是完全平方数．但是数学并不允許因此就断定这个判断是正确的．經过严格的証明，这个判断被推翻了，因为当

$$n=12,055,735,790,331,359,447,442,538,767$$

的时候，

$$F(n)=991n^2+1$$

是一个完全平方数.

最后,我們看一个几何問題.

有 n 个平面都經过同一点,但是其中任何三个平面都不經过一条直綫(也就是說,任何三个平面沒有共同的交綫),这 n 个平面把空間分成几部分?

一个平面把空間分成两部分,經过一点的两个平面把空間分成四部分;經过一点但不經过一条直綫的三个平面,把空間分成八部分(图 2). 显然可以断言,滿足上述条件的 n 个平面($n=1$、2、3)把空間分成 2^n 部分. 如果你用不完全归納法得出結論說:当 n 是任意正整数的时候,空間被 n 个平面(滿足上述条件的)所分成的部分数是 2^n,那就不正确了. 以后我們还要回头解这个題目,那时你会知道空間被分成的部分数用式子表示就是:

$$\Phi(n)=n(n-1)+2,$$

式中 n 是任意正整数.

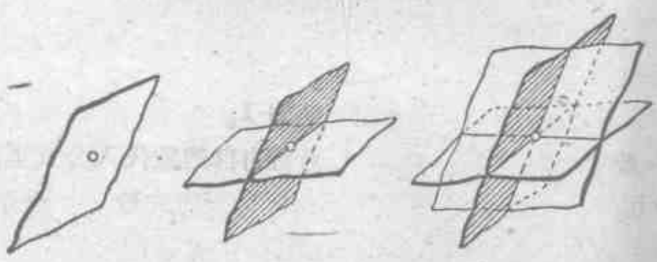

图 2

为什么上面四个例子里所做的結論都是不正确的呢? 唯一的原因是,这些关于任意 n 的一般判断,仅仅根据只对某些 n 值成立的判断得出的.

所以欧拉說得对:簡单的归納法会得出錯誤的結論.

先假設，后証明

欧拉說过，不完全归納法所发現的数学命題，要經过“更周密”的研究，最后証实它或者推翻它．这里說的“更周密”的研究到底是指什么呢？我們先分析一个題目，再回答这个問題．

下面是奇数数列：

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\cdots\cdots \qquad (1)$$

这数列前 n 項的和等于多少呢？

我們先写出前一項、前二項、前三項……的和：

$$S_1=1;$$
$$S_2=1+3=4;$$
$$S_3=1+3+5=9;$$
$$S_4=1+3+5+7=16;$$
$$S_5=1+3+5+7+9=25.$$

式中 S 表示和，它的下标等于对应于(1)的各項的被加数个数．大家注意一下这些和的共同特点，不难发現每个和都等于它下标的平方：

$$S_1=1=1^2,$$
$$S_2=4=2^2,$$
$$S_3=9=3^2,$$
$$S_4=16=4^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

因此我們可以假設：

$$S_n=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2, \qquad (2)$$

也就是說，自然数列的前 n 个奇数的和等于 n^2．

这个假設是不是对于任意正整数 n 都正确呢？当然公式(2)对 $n=1$、2、3、4、5 的特殊情况是成立的，这是因为这个公式是

由对这几个数成立而推导出来的．当 $n=6$，它也正确嗎？算算看：

$$1+3+5+7+9+11=36=6^2,$$

所以公式(2)对 $n=6$ 是正确的．我們还可以驗証对于 $n=7$，$n=8$，公式(2)也是正确的．这样一来，就更加使人相信这个公式在一般情况下也成立了．

根据不完全归納法可以相信，我們得到一个法則：自然数列前 n 个奇数的和等于 n^2．但是应当謹慎，欧拉說过："……我們已經看到，簡单的归納法会得出錯誤的結論．"我們也应該回忆一下前节的四个例子的教訓．这里把假設当作法則，同动物学家发現澳洲之前，曾断定地球上的天鵝都是白的有什么不同呢？

最好寻求另一个方法来証明上面提出的論断．

假定公式(2)对于 $n=k$（k 是任意的自然数）正确，也就是說：

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2. \tag{3}$$

我們証明这个公式对于 k 的后继数 $n=k+1$ 也正确，也就是要証明

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2. \tag{4}$$

为此，把等式(4)的左边改写成：

$$[1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)]+(2k+1),$$

根据等式(3)，方括号里的和等于 k^2，所以

$$k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2,$$

于是等式(4)的左边等于 $(k+1)^2$．

这样，我們得到一个很重要的結論：如果我們的假設对于某一个自然数 n 是正确的，那末它对于后继数 $n+1$ 也一定正确．

但是我們已經知道，这个假設对于 $n=1$、2、3、4、5、6 是正确的，既然它对于 6 正确，那末根据剛才得到的結論，它应該对

于后继数 7 也正确，既然它对于 7 正确，那末就应該对 8 也正确，等等．这样一来，它对一切整数都正确．于是我們証明了这个假設在一般情况下的正确性．

上面的推理过程还可以簡化。

如果公式

$$S_n=n^2$$

对任意自然数 k 都正确，可以証明它对于自然数 $k+1$ 也正确，那末还要檢驗这个假設对 $n=6$、5、4、3、2 是否也正确．其实，只要檢驗 $n=1$ 的时候，这个假設正确就够了，因为如果这个假設对于 $n=1$ 正确，根据上面証明过的結論，它应該对 $n=2$ 也正确，如果它对于 $n=2$ 正确，那末它对于 $n=3$ 也正确，等等．因此它对一切自然数都正确，于是这个假設变成了法則：自然数列前 n 个奇数的和等于 n^2。

我們在解这个題目的过程中，认識了一个很重要的証明方法．它能够使我們驗証从观察和归納法得到的假設是不是正确．这个方法可以叫做"从 k 到 $k+1$"法，不过通常叫做"数学归納法"或者"完全归納法"．

这个方法的基础是下面的数学归納原理：

如果某一个法則（上題里是，$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$）对于数 α 正确，其中 α 是使这个法則有意义的最小的自然数（上題里 $\alpha=1$），并且如果从它对于 k 正确就可以推出它对于 $k+1$ 也正确（上題里是从等式 $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$ 对于自然数 k 正确，可以推出它对于 $k+1$ 正确），那末，这个法則对于一切大于 α 的自然数 n 都成立①．

注意"大于 α 的 n"一語里的 α 不一定必須等于 1．例如，用

① 我們把数学归納原則看作公理一样不加証明就采用了．許多著名的数学家（古朗特，克林，龐加来等）都贊成这种观点．

1. 当 $n=1$ 的时候，这个假設是正确的.

2. 設这假設当 $n=k$ 的时候（k 是任意自然数）正确，也就是說

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots\cdots+\frac{1}{4k^2-1}=\frac{k}{2k+1},$$

我們从这一点出发証明这假設对于 $k+1$ 正确. 把和 $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots\cdots+\frac{1}{4k^2-1}$ 加上数列的第 $(k+1)$ 項 $\frac{1}{4(k+1)^2-1}$，得到：

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots\cdots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4(k+1)^2-1}$$

$$=\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots\cdots+\frac{1}{4k^2-1}\right]+\frac{1}{4(k+1)^2-1}.$$

方括号內的和用 $\frac{k}{2k+1}$ 代替，得

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{4(k+1)^2-1}\\
&\quad=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{[2(k+1)+1][2(k+1)-1]}\\
&\quad=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+3)(2k+1)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+3)(2k+1)}\\
&\quad=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+3)(2k+1)}=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}.
\end{aligned}$$

因此，如果这假設对于 $n=k$ 正确，那末它对于 $n=k+1$ 也正确. 根据数学归納原理可以断定，我們起初所作的假設对于任意自然数 n 都正确.

例 2 已知等差数列

$$\div a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n{}^{①},$$

① 符号 $\div$ 表示等差数列，$\div\!\!\div$ 表示等比数列. ——譯者.

乜的公差等于 d, 試用 a_1 和 d 表示这数列的第 n 項.

先作假設. 根据等差数列的定义, 我們可以写出一系列的等式:

$$a_2=a_1+d;$$
$$a_3=a_2+d=a_1+d+d=a_1+2d;$$
$$a_4=a_3+d=a_1+2d+d=a_1+3d.$$

从这些等式可以得出假設: 等差数列的任何一項等于首項加上公差同这項以前的項数的乘积, 写成式子就是:

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

1. 当 $n=1, n=2, n=3, n=4$ 的时候, 这个假設是正确的.

2. 設这个假設当 $n=k$ 的时候是正确的 (n 是任意自然数), 也就是說:

$$a_k=a_1+(k-1)d,$$

我們根据这一点来証明乜对于 $n=k+1$ 也正确.

根据等差数列的定义, 这数列的第 $(k+1)$ 項等于第 k 項加上 d:

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+(k-1)d+d=a_1+kd-d+d$$
$$=a_1+kd=a_1+[(k+1)-1]d.$$

这样一来, 如果等差数列的第 k 項, 等于首項加上公差同这項以前的項数的乘积, 那末第 $(k+1)$ 項的公式也是这样. 因此根据数学归納原理, 最初所作的假設对于任意正整数都是正确的.

利用数学归納法也可以証明等比数列 $\div b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots, b_n, \cdots\cdots$ 的通項公式

$$b_n=b_1q^{n-1}$$

的正确性.

例 3 已知等比数列

$$\div b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots, b_n, \cdots\cdots,$$

它的公比等于 q ($q\neq 1$). 用数学归納法証明，这数列前 n 項的和 S_n 可以用下面的公式求出：

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{1}$$

解这个題目并不需要作假設，因为假設已經用公式(1)表示出来了. 因此只要作数学归納法的第一、二两步的証明.

1. 显然，当 $n=1$ 和 $n=2$ 的时候，这个假設是正确的. 事实上，

$$S_1=\frac{b_1(1-q)}{1-q}=b_1;$$

$$S_2=\frac{b_1(1-q^2)}{1-q}=b_1(1+q)=b_1+b_1q=b_1+b_2.$$

2. 假定这个假設对于 $n=k$ 已經正确(k 是任意自然数)，也就是說，

$$S_k=\frac{b_1(1-q^k)}{1-q}.$$

我們証明当 $n=k+1$ 的时候，它也是正确的. 这一点可以从下面的計算得到：

$$S_{k+1}=b_1+b_2+\cdots\cdots+b_k+b_{k+1}=S_k+b_{k+1}=\frac{b_1(1-q^k)}{1-q}+b_1q^k$$

$$=\frac{b_1-b_1q^k+b_1q^k-b_1q^{k+1}}{1-q}=\frac{b_1(1-q^{k+1})}{1-q}.$$

因此，根据数学归納原理可以断定，公式 (1) 对于任意正整数 n 都是正确的.

例 4 計算数列