普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学

（下册）

唐月红 曹荣美 王正盛 主 编

刘 萍 王东红 曹喜望 赵一鹗 副主编

科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学（下册）

唐月红　曹荣美　王正盛　主编

刘　萍　王东红　曹喜望　赵一鹗　副主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是按照新形势下教材改革的精神，结合国家工科类本科数学课程教学基本要求，以及国家重点大学的教学层次要求，汲取国内外教材的长处而编写. 本书分上、下两册. 下册内容包括多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程. 内容与中学数学相衔接，满足“高等数学课程教学基本要求”，还考虑到了研究生入学考试的需求.

本书注重教学内容与体系整体优化；重视数学思想与方法，适当淡化运算技巧；充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力；安排数学实验，使数学教学与计算机应用相结合.

本书可作为高等院校非数学专业本科生的“高等数学”课程教材，还可供从事高等数学教学的教师和科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/唐月红，曹荣美，王正盛主编. —北京：科学出版社，2009
普通高等教育“十一五”规划教材
ISBN 978-7-03-023545-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①唐…②曹…③王 Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 189232 号

责任编辑：赵 靖 / 责任校对：刘小梅
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双 青 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 1 月第一次印刷 印张：17
印数：1—6 000 字数：320 000

定价：26.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

前　　言

本教材是根据教育部颁发的工科类本科数学基础课程教学基本要求编写而成，也兼顾了“研究生入学数学的考试大纲”的内容，分上、下两册. 上册内容为一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何学；下册内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程，以及贯穿整个高等数学始终的极限理论. 每章除了配有一定数量的练习题外，还配备了作为内容归纳、总结的总复习题和作为检查的自测题，书末对这些题目都给出了答案和提示. 在教材(上册)的最后给出了四个附录，绝大部分内容是一些中学未学过，但又是高等数学不可缺少的预备知识. 编写这部分的目的是方便读者随时查阅. 部分加有“*”的内容可供读者选学，不必讲授. 各章还安排了相应内容的数学实验，学生通过学习掌握数学软件的使用完成数学实验课题，可进一步生动直观地深入理解高等数学的基本概念与基本理论，了解相关的数值计算方法，循序渐进地培养数学建模的能力，以培养解决实际问题的意识和能力. 本书重点放在基本概念、基本方法和数学知识的应用上，授课以 160～176 学时为宜.

本教材的第 1,11 章由曹喜望编写，第 2,8 章由王东红编写，第 3,12 章由曹荣美编写，第 4,9 章和附录 4 由刘萍编写，第 5,6 章由赵一鹗编写，第 7,10 章和附录 1,2,3 由唐月红编写，数学软件和实验部分由王正盛编写. 刘萍和王东红在初稿的排版和审阅方面做了大量工作. 全书由唐月红组织、协调编写工作，由安玉坤教授统稿. 陈芳启教授对本教材的编写给予了直接指导和关心，并提出了很多宝贵的建议.

由于时间仓促及编者水平有限，错误缺点在所难免，欢迎大家批评指正.

编　者

2008 年元月

目　　录

第 8 章　多元函数微分学及其应用

上册所讨论的函数都是只依赖于一个自变量的函数，即一元函数. 但是，在实际问题中常常会遇到一个变量依赖于多个自变量的情况，于是需要讨论多元函数. 本章将一元函数微分学推广到多元函数. 因为从一元函数到二元函数将会产生一些本质上的差别，但从二元函数到三元函数或更多元函数，则没有原则上的不同，所以本章讨论以二元函数为主.

8.1　多元函数

讨论一元函数时，曾用到邻域、区间等概念，它是实数集 $\mathbf{R}$ 的两类特殊子集. 为了将一元函数的理论和方法推广到多元的情形，本节先引入 n 维空间以及 $\mathbf{R}^2$ 中的一些基本概念，将有关概念从 $\mathbf{R}^1$ 推广到 $\mathbf{R}^2$ 中，进而推广到一般的 $\mathbf{R}^n$ 中.

8.1.1　n 维空间

实数的全体常用 $\mathbf{R}$ 表示，有序二元实数组 (x,y) 的全体用 $\mathbf{R}^2$ 表示，有序三元实数组 (x,y,z) 的全体用 $\mathbf{R}^3$ 表示，它们分别与数轴、直角坐标系下的平面（坐标平面）及空间上的点建立了一一对应. 一般地，设 n 为取定的一个自然数，有序 n 元实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体所构成的集合用 $\mathbf{R}^n$ 表示，即

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

称 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**点**或一个 **n 维向量**，并称数 x_i 为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标. 特别地，当点 $\boldsymbol{x}$ 的所有坐标都为 0 时，称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元，记为 $\mathbf{0}$，也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的**坐标原点**或 **n 维零向量**.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个点，$\lambda\in\mathbf{R}$，规定

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

定义了如上线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n 维空间.

$\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的距离，记作 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. 规定

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.\tag{1}$$

当 $n=1,2,3$ 时，(1)式便分别是数轴上，坐标平面及空间上两点间的距离公式.

8.1.2 $\mathbf{R}^2$ 中的一些概念

$\mathbf{R}^2$ 上具有某种性质 P 的点的集合,称为**平面点集**,记作

$$E=\{(x,y)\mid(x,y)\text{ 具有性质 }P\}.$$

在平面 $\mathbf{R}^2$ 上,设任意一点 $P(a,b)\in\mathbf{R}^2$,任意一个平面点集 $E\subset\mathbf{R}^2$,有如下的一些概念:

(1) **邻域** 与点 P 的距离小于正实数 δ 的点的全体称为点 P 的 δ **邻域**,记为 $U(P,\delta)$,即

$$U(P,\delta)=\{(x,y)\mid(x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2\}.$$

点集 $\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\}$ 称为点 P 的**去心 δ 邻域**,记为 $\mathring{U}(P,\delta)$.

如果不需要强调半径 δ,则 $U(P,\delta)$ 和 $\mathring{U}(P,\delta)$ 可分别简记为 $U(P)$ 和 $\mathring{U}(P)$.

(2) **内点** 若存在点 P 的某个邻域 $U(P)$,使 $U(P)\subset E$,则称 P 为 E 的**内点**.

(3) **外点** 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\cap E=\varnothing$,则称 P 为 E 的**外点**.

(4) **边界点** 对任意给定的 $\delta>0$,$U(P,\delta)$ 内既含有属于 E 的点,又含有不属于 E 的点,则称 P 为 E 的**边界点**.

(5) **聚点** 对任意给定的 $\delta>0$,有 $\mathring{U}(P,\delta)\cap E\neq\varnothing$,则称 P 为 E 的**聚点**.

(6) **边界** E 的边界点的全体,称为 E 的**边界**.

(7) **开集** 若 E 中的每一点都是内点,则称 E 为**开集**. 如点集 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<3\}$.

(8) **闭集** 若 E 包含它的边界,则称 E 为**闭集**. 如点集 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 3\}$.

(9) **连通集** 如果 E 内任何两点都可以用一条完全位于 E 中的折线联结起来,则称 E 为**连通集**.

(10) **区域(或开区域)** 若 E 是连通的开集,则称 E 为**区域**. 如点集 $\{(x,y)\mid x+y\neq 0\}$ 不是区域,但点集 $\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 和 $\{(x,y)\mid x+y<0\}$ 是区域.

(11) **闭区域** 开区域连同它的边界一起构成**闭区域**. 如点集 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 3\}$.

(12) **有界集** 设 O 为原点,对于区域 E,若存在某一常数 $M>0$,使得 P 到 O 的距离 $|PO|\leqslant M$ 对一切 $P\in E$ 都成立,则称 E 为**有界集**,否则称为**无界集**.

例如,点集 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 3\}$ 是有界集,点集 $\{(x,y)\mid y>0\}$ 为无界集.

以上 $\mathbf{R}^2$ 中的概念可以推广到 $n(n\geqslant 3)$ 维空间中来. 例如,与点 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$ 的距离小于正实数 δ 的点的全体称为点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ **邻域**,即

$$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta\}.$$

8.1.3　多元函数的概念

1. 定义

函数是一种对应关系,例如,对一个半径为 r 的圆,其面积 $A=\pi r^2$ 是自变量 r 的一元函数,该函数的定义域为 $(0,+\infty)$. 在许多实际问题中,经常会遇到多个变量之间的依赖关系,例如对一个底半径为 r,高为 h 的圆柱体,其体积为 $V=\pi r^2 h$,表面积为 $S=2\pi rh+2\pi r^2$,其中 $r\in(0,+\infty)$,$h\in(0,+\infty)$. 二维空间

定义 1　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集,若对 D 中的每一点 $P(x,y)$,按照某一对应法则 f,都有惟一的实数 z 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的**二元函数**,记作

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

或

$$z=f(P),\quad P\in D,$$

其中点集 D 称为该二元函数的**定义域**,x,y 称为**自变量**,z 称为**因变量**,数集 $\{z|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**,记作 $f(D)$.

将定义 1 中的 D 换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的点集,就可以类似地定义 n 元函数. 当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为**多元函数**,记作

$$u=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

或

$$u=f(P),\quad P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D.$$

和一元函数的情况一样,求多元函数定义域的一般办法是:当自变量具有实际意义时,其实际变化的范围就是多元函数的定义域;当自变量没有具体的意义,但多元函数有明显的表达式 $u=f(x)$ 时,使得表达式中的运算都有意义的变元 $\boldsymbol{x}$ 的值所组成的点集就是多元函数的定义域,这个定义域也称为多元函数的**自然定义域**.

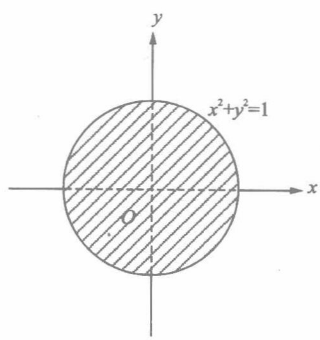

图 8.1

例如,函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$(图 8.1),又如函数 $z=\arccos(x+y)$ 的定义域为 $\{(x,y)||x+y|\leqslant 1\}$(图 8.2).

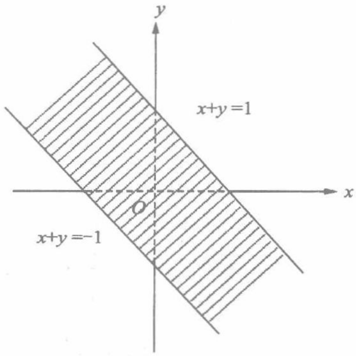

图 8.2

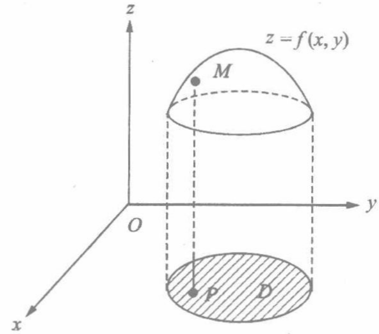

图 8.3

2. 二元函数的图形

与一元函数类似,二元函数除了可以用解析法、表格法表示外,还可以用图形法表示. 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D,对于 D 中的每一点 $P(x,y)$,依函数关系 $z=f(x,y)$,就有空间中的一点 $M(x,y,f(x,y))$ 与之对应. 当 (x,y) 取遍 D 上的一切点时,得到一个空间点集,这个点集称为**二元函数的图形**. 事实上,这个点集中的点的坐标均满足三元方程:

$$z-f(x,y)=0.$$

所以二元函数的图形通常是一张曲面(图 8.3).

例如,函数 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}}$ 的图形为 xOy 面上方的椭球面,而函数 $z=2x$ 的图形为过 y 轴的平面.

8.1.4 多元函数的极限

定义 2 设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点,如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于适合不等式 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点 $P(x,y)\in D$,都有 $|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的**极限**,记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,$$

或

$$f(x,y)\to A \quad ((x,y)\to(x_0,y_0)).$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A,$$

或

$$f(P)\to A \quad (P\to P_0).$$

通常称这样定义的二元函数的极限为**二重极限**，并且当自变量(x,y)趋于无限时，也可以写出相应的定义.

例 1　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

证　对任意 $\varepsilon>0$，由于

$$|f(x,y)-0|=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{\frac{1}{2}(x^4+y^4)}{x^2+y^2}\leqslant\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

取 $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$，当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，都有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

特别注意，二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 是指点 $P(x,y)$ 以任意方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都趋向于 A. 因此，如果 $P(x,y)$ 以某一特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋向于 A，并不能判定函数的极限存在.

通常可以用下面的两种方法来判断二元函数当 P 趋于 P_0 时极限不存在：

(1) 找一条特殊路径，使得 P 沿此路径趋于 P_0 时，$f(x,y)$ 的极限不存在.

(2) 找两条不同的路径，使得 P 沿这两条路径趋于 P_0 时，$f(x,y)$ 的极限都存在，但不相等.

从特殊线趋于某点 P_0

例 2　考察函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 当$(x,y)\to(0,0)$时极限是否存在.

解　当 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于$(0,0)$时，$y=0$　$\frac{0}{x^2}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0;$$

又当 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于$(0,0)$时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0.$$

虽然沿两坐标轴趋于原点时得到了相同的极限，但并不能说明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存

在. 因为当(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于点$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

该极限与 k 的值有关,因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

以上关于二元函数的极限概念,可相应地推广到 n 元函数上去. 与一元函数类似,多元函数的极限也具有四则运算法则、夹逼准则等,有时也将二重极限化成一元函数极限来计算.

例 3 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$. 错

解 令 $z=xy$,原式$=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\sqrt{z+1}-1}=\lim\limits_{z\to 0}(\sqrt{z+1}+1)=2$.

例 4 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

解 $0\leqslant\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}|y|\leqslant|y|\to 0\ ((x,y)\to(0,0))$,从而由夹逼准则得到 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

8.1.5 多元函数的连续性

定义 3 设二元函数 $z=f(x,y)$的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$是 D 的聚点,且 $P_0\in D$,若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处**连续**. 若函数在点 $P_0(x_0,y_0)$处不连续,则称点 $P_0(x_0,y_0)$为函数 $f(x,y)$的**间断点**或**不连续点**.

如果函数 $f(x,y)$在区域 D 内各点均连续,则称函数 $f(x,y)$在区域 D 内连续,或者称函数 $f(x,y)$是 D 内的**连续函数**.

以上关于二元函数连续性的概念,可以相应地推广到 n 元函数上去.

与一元初等函数类似,可以定义多元初等函数. **多元初等函数**是指由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算得到的,并可用一个解析式子表示的多元函数.

多元函数也具有与一元函数类似性质:

(1) 多元连续函数的和、差、积、商(在分母不为零处)仍是连续函数;

(2) 多元连续函数的复合函数也是连续函数;

(3) 多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓**定义区域**,是指包含在定义域内的区域或闭区域.

例 5　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(xy+1)+3}{x^2+y^3}$.

解　函数 $f(x,y)=\dfrac{\ln(xy+1)+3}{x^2+y^3}$ 是初等函数，由初等函数在定义区域内的连续性知

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(xy+1)+3}{x^2+y^3}=f(1,0)=3.$$

与闭区间上一元连续函数的性质类似，在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质.

性质 1(有界性与最大值最小值定理)　在有界闭区域 D 上连续的多元函数必定在 D 上有界，且能取得它在 D 上的最大值与最小值.

性质 2(介值定理)　在有界闭区域 D 上的连续函数 $f(P)$ 必在 D 上取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值，即对满足不等式 $m<\mu<M$ 的一切实数 μ，总存在 $P\in D$，使 $f(P)=\mu$.

习　题　8.1

1. 判定下列平面点集是否是区域，是开区域还是闭区域.

(1) $D=\{(x,y)\mid y>0,x>y,x<1\}$；开　　(2) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 1\}$；开

(3) $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<4\}$；非开非闭　　(4) $D=\{(x,y)\mid (x,y)\neq(0,0)\}$. 开

2. 设 $f(x,y)=xy+\dfrac{x}{y}$，求 $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$，$f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$. x^2+y^2

$\dfrac{1}{xy}+\dfrac{y}{x}$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；　　(2) $z=\arcsin\left(\dfrac{y}{x}-1\right)$；

(3) $z=\sqrt{x^2-\sqrt{y}}$；　　(4) $z=\ln(x^2+y^2-1)$；

(5) $u=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$；　　(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(e^x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；1　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\arctan(xy)}{\ln(1+xy)}$；1

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$；0　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin xy}{x}$；2

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}$；e　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{e^{x^2y^2}\sin(x^2+y^2)}$. 1

$e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

5. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.