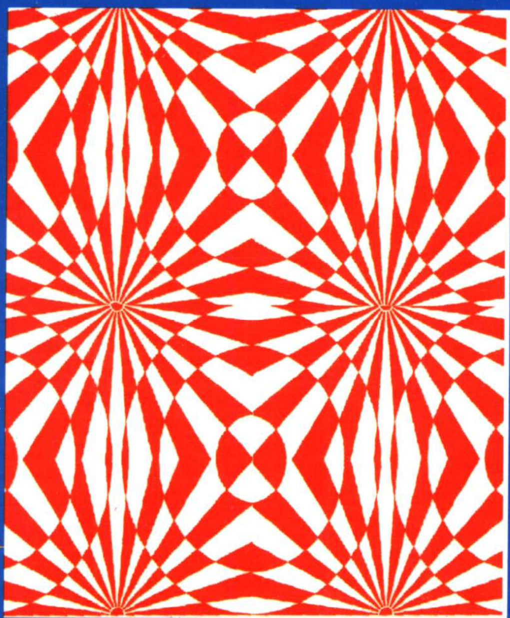
北京大学数学丛书

代数曲线

〔美〕P·格列菲斯 著



北京大学出版社

北京大学数学丛书

代 数 曲 线

P·格列菲斯 著

北 京 大 学 出 版 社

内容简介

本书是根据美国科学院院士、著名数学家P·格列菲斯在北京大学讲课的讲稿整理写成的。本书篇幅虽不大，但内容丰富，阐述精炼，引人入胜。书中深入浅出地介绍了正则化定理、Riemann-Roch定理、Abel定理等代数曲线论的重要结果，以及这些定理的应用和重要的几何事实。读者只要具有大学复变函数论和抽象代数的基础知识即可阅读此书。

本书可作为大学数学系高年级学生和研究生教材，也可供数学工作者参考。

书　　名：代数曲线
著作责任者：〔美〕P·格列菲斯　著
责任编辑：邱淑清
标准书号：ISBN 7-301-00808-2/O·145
出 版 者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752021
电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排 版 者：北京大学印刷厂
印 刷 者：北京大学印刷厂
发 行 者：北京大学出版社
经 销 者：新华书店
850×1168　32开本　7.75印张　188千字
1985年6月第1版　2000年6月第2次印刷
印　　数：15001—18000册
定　　价：12.00元

序　　言

1. 作者个人的说明

1982年夏天，我荣幸地在北京大学讲授了一个关于代数曲线的课程。这课程进行了六周，每周六学时，本书是由课堂笔记经过全面重新整理写成的。

在代数几何这一学科的研究之中，代数曲线和紧 Riemann面是发展得最成熟并且或许还是最精采的论题。不幸的是，这方面已经写出的大多数著述，都分别地去讲述代数曲线与紧 Riemann面，把它们分别视为更一般的理论的一部分。这样就不得不花费许多时间分别去舖述各方面的基本的材料。此外，曲线论的初等课本和大学生的教程，几乎总是以 Riemann-Roch 定理为终结。其实代数曲线论正是从这一定理开始才真正进入了引人入胜的部分。

在北京大学讲授这一课程时，我决定从最低限度的技术工具准备开始，直接通往基本的 Riemann-Roch 定理和 Abel 定理。特别是，我希望能够留下时间去应用这些结果，因为从这里开始人们才真正看到了代数曲线是怎样的。由于学生们的极好的质量和他们的刻苦努力，我感到这样的目的在很大程度上是达到了。本书的目录准确地反映了在课堂上讲述的内容。

在结束这一部分说明的时候，作者以极其愉快的心情感谢北京大学数学系邀请我讲述代数曲线的课程；感谢听这一课程的学生们为我提供了这样一个令人鼓舞的机会；感谢课程的助手张筑生、赵春来和周青，他们做了非常杰出的工作——从课堂笔记整理成本书；感谢吴宪，他对笔记的英文稿进行了极认真的校对并做了订正。

2. 一般的说明

这是一本论述代数曲线的书，只假定读者熟悉初等的复函数论和代数。它不同于这方面许多新近的著述之点在于：从一开始就将解析的方法与几何的方法融为一体，以便于使读者最有效地得到这一领域的基本结果。虽然这使得我们能够很早就讨论有趣的几何结果(这里，我愿再一次强调，Riemann-Roch定理应是代数曲线研究的真正开始，而绝不是其终结)，这种处理方式也有一些缺点，其中主要的是：沒有引入在一般代数几何研究中所需要的层论、上同调、可换代数、多复变、Hermite微分几何等技术工具。然而，理解了本书之后，大学生将有可能去研究关于一般代数几何、复流形、黎曼曲面，以及代数曲线的更进一步的著述，以下仅仅举例式地选出了其中一小部分。

一般代数几何

1. Algebraic Geometry, by R.Hartshorne.
(采取代数方法的一本极好的书，要求较强的交换代数基础。)
2. Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties, by D. Mumford.
(直观地解释许多现代概念的一本很好的引论。)
3. Elementary Algebraic Geometry, by K. Kendig.
(另一很好的引论。)
4. Principles of Algebraic Geometry by P. Griffiths and J.Harris.
(解析的方法同时强调几何的实例。)
5. Introduction to Algebraic Geometry, by J. Semple and L. Roth
(经典代数几何的一个非常好的表述。)

复 流 形

1. Complex Manifolds without Potential Theory, by S. S. Chern.
(一个极好的导引。)
2. Differential Analysis on Real and Complex Manifolds, by R. O. Wells.
(一本有用的参考书。)
3. Analysis on Real and Complex Manifolds, by R. Narasimhan.
(许多基本论题的极好的表述。)
4. Complex Manifolds by K. Kodaira and J Marrow
(包含了形变理论的一个很有价值的讨论。)
5. Several Complex Variables by R. Gunning and H. Rossi.
(这书的第一章对于开始学习多复变的人特别有用。)

黎 曼 曲 面

1. 紧黎曼曲面引论，伍鸿熙等著，科学出版社版。
(一本极好的教程。)
2. Riemann Surfaces, by H. Farkas and I. Kra.
(也许是近来关于黎曼面方法的一个最好的表述。)
3. Lectures on Riemann Surfaces, by R Gunning.
(要想知道一般的工具怎样应用于黎曼面的研究，这本书是很有用的。)
4. Introduction to Riemann Surfaces, by G. Springer
(这方面的一本经典的书。)

代 数 曲 线

1. Algebraic Curves, by R. Walker.
(至今仍是我所钟爱的一本书。)
2. Algebraic Curves, by W. Fulton.
(对代数方法的一个极好的导引。)
3. A Treatise on Plane Algebraic Curves, by J. L. Coolidge
(代数曲线经典理论的一个非常好的讨论。)
4. Curves and their Jacobians, by D. Mumford.
(一个极好的综述。)
5. Topics in the Theory of Algebraic Curves, by E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, and J. Harris.
(代数曲线这一历史悠久的论题，目前仍然是许多研究的中心。这方面的发展记录于这本将于1984年出版的书之中。)

P・格列菲斯

1983年1月于美国哈佛大学

目　　录

第一章　基本概念

§1　复射影平面P^2C上的代数曲线

设$f(x,y)$是二元实系数多项式。在$\boldsymbol{R}^2$上由方程

$$f(x,y)=0 \tag{1.1}$$

给出的图形称为**实代数曲线**；$f(x,y)$的次数称为这代数曲线的**次数**。读者已经熟悉了一次和二次的实代数曲线——直线、椭圆、双曲线、抛物线等。但是，限制在实数范围内讨论更一般的代数曲线，会有若干不方便之处，难以获得整齐的结果。这主要是因为实数域不是代数封闭域。例如，我们欲讨论这样的问题：一条任意直线L与由(1.1)给出的代数曲线C有多少交点。不失一般性，可设L通过坐标原点(经过适当的坐标变换很容易满足这一要求)，它的参数方程可以写成

$$\begin{cases}x=\alpha t,\\ y=\beta t.\end{cases} \tag{1.2}$$

又设

$$f(x,y)=f_n(x,y)+f_{n-1}(x,y)+\cdots+f_0,$$

其中$f_k(x,y)$是k次齐次多项式。把(1.2)代入(1.1)得

$$f_n(\alpha,\beta)t^n+f_{n-1}(\alpha,\beta)t^{n-1}+\cdots+f_0=0. \tag{1.3}$$

在实数范围内要判断这样的方程有多少根，不是一件轻而易举的事，而且结论也很不整齐——视系数的不同情形，实根的数目可以多少不一。但是，如果考虑复系数的二元多项式$f(x,y)$而把(1.1)视为$\boldsymbol{C}^2$上的代数曲线，再来讨论复直线(1.2)与复代数曲线(1.1)的交点，也得到方程(1.3)。由熟知的代数基本定理，只要$f_n(\alpha,\beta)\neq 0$，方程(1.3)恰有n个根(重根重复计数)，也就是说n次复代数曲线C与复直线L相交于n个点（对应于重根的交点视为重

交点)．上面的讨论中还有一种例外的情形：如果

$$f_n(\alpha,\beta)=f_{n-1}(\alpha,\beta)=\cdots=f_{m+1}(\alpha,\beta)=0,$$
$$f_m(\alpha,\beta)\neq 0,$$

那么L与C在$\boldsymbol{C}^2$上将只有m个交点。这时可以认为有$n-m$个交点在无穷远处。这种观点可作如下解释：在(1.3)中作替换$t=1/s$，并以s^n乘等式两边就得到

$$f_n(\alpha,\beta)+f_{n-1}(\alpha,\beta)s+\cdots+f_0s^n=0, \tag{1.3$'$}$$

如果$f_n(\alpha,\beta)\neq 0$，那么$s=0$（相当于$t=\infty$）不是(1.3)′的根；如果

$$f_n(\alpha,\beta)=f_{n-1}(\alpha,\beta)=\cdots=f_{m+1}(\alpha,\beta)=0,$$

而

$$f_m(\alpha,\beta)\neq 0,$$

那么$s=0$（相当于$t=\infty$）就是(1.3)′的$n-m$重根，这时我们说L与C在无穷远处有$n-m$重交点。因此，为了讨论方便，需要给$\boldsymbol{C}^2$添加“无穷远直线”以构成复射影平面$P^2\boldsymbol{C}$。本书讨论的主要对象，将是复射影平面$P^2\boldsymbol{C}$上的代数曲线。

为给$\boldsymbol{C}^2$添加无穷远直线，最方便的办法是通过齐次坐标。对于点$(x,y)\in\boldsymbol{C}^2$，其**齐次坐标**(ζ,ξ,η)是满足下式

$$x=\frac{\xi}{\zeta},\qquad y=\frac{\eta}{\zeta} \tag{1.4}$$

的复数组。如果(ζ,ξ,η)是(x,y)的齐次坐标，显然，$(\lambda\zeta,\lambda\xi,\lambda\eta)$ ($\lambda\in\boldsymbol{C}$，$\lambda\neq 0$)也是(x,y)的齐次坐标。

要使(1.4)有意义，必须$\zeta\neq 0$。但如果ξ,η不全为0，当$\zeta\to 0$时，点$x=\xi/\zeta$，$y=\eta/\zeta$沿$\xi:\eta$方向趋向无穷远，因而我们认为$(0,\xi,\eta)$表示$\xi:\eta$方向的无穷远点。这样，通过齐次坐标，我们给$\boldsymbol{C}^2$中每一方向添加了一个无穷远点。所有的无穷远点组成一条**无穷远直线**$L_\infty:\zeta=0$。添加了无穷远直线的$\boldsymbol{C}^2$称为是复射影平面$P^2\boldsymbol{C}$。下面我们更严格地叙述这一过程。

在集合 $\boldsymbol{C}^2\backslash\{(0,0,0)\}$ 中建立一个关系"$\sim$"：

$$\left.\begin{array}{c}(\zeta,\xi,\eta)\sim(\zeta',\xi',\eta')\text{当且仅当存在}\\ \lambda\in\boldsymbol{C},\ \lambda\neq0,\ \text{使得}\\ \zeta'=\lambda\zeta,\ \xi'=\lambda\xi,\ \eta'=\lambda\eta.\end{array}\right\}\qquad(1.5)$$

这显然是一个等价关系。按这关系把 $\boldsymbol{C}^2\backslash\{(0,0,0)\}$ 分成等价类，$(\zeta,\xi,\eta)\in\boldsymbol{C}^2\backslash\{(0,0,0)\}$ 所在的等价类记为 $[\zeta,\xi,\eta]$。显然有

$$[\zeta,\xi,\eta]=[\lambda\zeta,\lambda\xi,\lambda\eta]\quad\forall\lambda\in\boldsymbol{C}\backslash\{0\}.$$

按这等价关系作成的商空间(等价类的空间)

$$(\boldsymbol{C}^2\backslash\{(0,0,0)\})\Big/\sim$$

称为**复射影平面**，记为 $P^2\boldsymbol{C}$(在不至于引起混淆时也可简单地记为 $\boldsymbol{P}^2$)。作为商空间，$P^2\boldsymbol{C}$ 带有商拓扑结构。在本章§7中，我们还将讨论 $P^2\boldsymbol{C}$ 的复流形结构，那时我们对它将会有更进一步的理解。

我们来考察(1.1)给出的曲线 C 在齐次坐标下的表示。把

$$x=\frac{\xi}{\zeta},\qquad y=\frac{\eta}{\zeta}$$

代入(1.1)并以 ζ^n 乘该式两边得

$$F(\zeta,\xi,\eta)=f_n(\xi,\eta)+f_{n-1}(\xi,\eta)\zeta+\cdots+f_0\zeta^n=0.$$

这方程的左端是一个关于 ζ,ξ,η 的齐次多项式。

一般地，如果 $F(\zeta,\xi,\eta)$ 是关于 ζ,ξ,η 的齐次多项式，那么

$$F(\zeta,\xi,\eta)=0\qquad(1.6)$$

表示 $P^2\boldsymbol{C}$ 上的一条**代数曲线**，F 的次数称为这曲线的**次数**，(1.6)称为这曲线的**齐次方程**。限制在 $\boldsymbol{C}^2=P^2\boldsymbol{C}\backslash L_\infty$ 上，这曲线满足**仿射方程**

$$f(x,y)=0,\qquad(1.7)$$

其中

$$f(x,y)=F(1,x,y).$$

这样，一条曲线的齐次方程决定这曲线在 $\boldsymbol{C}^2=P^2\boldsymbol{C}\backslash L_\infty$ 上的仿射方程。反过来，曲线的次数 n 和它在 $\boldsymbol{C}^2=P^2\boldsymbol{C}\backslash L_\infty$ 上的仿射

方程 $f(x,y)=0$ 也唯一地决定它的齐次方程

$$F(\zeta,\xi,\eta)=0,$$

这里

$$F(\zeta,\xi,\eta)=\zeta^n f\left(\frac{\xi}{\zeta},\frac{\eta}{\zeta}\right).$$

如果代数曲线 C 由方程

$$F(\zeta,\xi,\eta)=0$$

给出，而 F 分解为不可约齐次多项式的乘积

$$F=F_1^{m_1}\cdot F_2^{m_2}\cdot\cdots\cdot F_l^{m_l},$$

则记

$$C=m_1C_1+m_2C_2+\cdots+m_lC_l,$$

这里

$$C_j=\{(\zeta,\xi,\eta)\in P^2\mathbf{C}\mid F_j(\zeta,\xi,\eta)=0\}$$
$$(j=1,2,\cdots,l)$$

称为是 C 的**不可约分支**。特别地，如果 F 本身是不可约的，则称 C 为**不可约曲线**。

§2 Riemann 面

紧 Riemann 面与代数曲线的研究有密切的关系。具体说来就是：任何不可约的平面代数曲线，都有全纯的参数表示，这参数表示的定义域是一紧 Riemann 面。更准确的陈述，就是下面的**正则化定理**(这定理的证明将在下一章给出)。

定理2.1 对任一不可约代数曲线 $C\subset P^2\mathbf{C}$，存在一个紧 Riemann 面 $\tilde{C}$ 和一个全纯映射

$$\sigma:\ \tilde{C}\to P^2\mathbf{C},$$

使得 $\sigma(\tilde{C})=C$，并且 σ 在 C 的光滑点之上是一对一的。

这样的紧 Riemann 面 $\tilde{C}$ 连同全纯映射 σ 称为是 C 的**正则化**(Normalization)。正则化是研究代数曲线的强有力的工具。

另一方面，任何紧 Riemann 面也都可以表示为代数曲线，这就是本书将要多次用到的另一**基本事实**：

定理2.2 任意紧 Riemann 面 $\tilde{C}$ 都可以作为某平面代数曲线 C 的正则化，并可要求这代数曲线 C 至多只具有**通常二重点**（具体定义见第二章 § 1)。这就是说，存在全纯映射 $\sigma: \tilde{C} \to P^2 \mathbf{C}$，使得 $\sigma(\tilde{C})$ 是一条至多只有通常二重点的代数曲线[①]。

由此看来，紧 Riemann 面的研究与平面代数曲线的研究，实际上是一回事，都是贯串于本书中的主要内容。本节先介绍 Riemann 面的定义及有关拓扑分类的基本结果。

定义2.3 一个 Riemann 面是一个连通的 Hausdorff 拓扑空间 C，连同 C 的一族开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和一族映射

$$z_\alpha: U_\alpha \to \mathbf{C},$$

满足以下条件：

a) $z_\alpha: U_\alpha \to \mathbf{C}$ 是到 $\mathbf{C}$ 中开集 $z_\alpha(U_\alpha)$ 的同胚映射；

b) 只要 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，函数

$$z_\beta \circ z_\alpha^{-1}: z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

就是双全纯的(即：函数本身是全纯的，其反函数也是全纯的）。

$$\begin{tikzcd}
& U_\alpha \cap U_\beta \arrow[dl, "z_\alpha"'] \arrow[dr, "z_\beta"] & \\
z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[rr, "z_\beta \circ z_\alpha^{-1}"] & & z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)
\end{tikzcd}$$

这时我们把 (U_α, z_α) 称为**局部全纯坐标**，而把 $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ 称为**全纯坐标覆盖**。

本书讨论的主要对象是紧 Riemann 面，即作为拓扑空间是紧

---

① 这定理的证明要用到层的上同调理论。本书附录所作的讨论介绍了证明的梗概。完全的证明可以参看 P. Griffiths and J. Harris《Principles of Algebraic Geometry》, Chapter 2, 或者参看伍鸿熙等人所著的《紧致黎曼曲面引论》，第五章，§ 21, 科学出版社，1981。

数空间的 Riemann 面。

例1　扩充复数 $\Sigma = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$（复数的一点紧化）。

显然 $\Sigma = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 是紧致、连通、Hausdorff 拓扑空间。考虑覆盖 $\{U_0, U_1\}$：

$$U_0 = \Sigma \backslash \{\infty\} = \boldsymbol{C}, \qquad U_1 = \Sigma \backslash \{0\}$$

及映射

$$z_0: \quad U_0 \to \boldsymbol{C},$$

$$z \mapsto z;$$

$$z_1: \quad U_1 \to \boldsymbol{C},$$

$$z \mapsto \begin{cases} 0, & z = \infty, \\ \dfrac{1}{z}, & z \neq \infty. \end{cases}$$

显然

$$z_1 \circ z_0^{-1}: \ \boldsymbol{C} \backslash \{0\} \to \boldsymbol{C} \backslash \{0\},$$

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

是双全纯的，具有同样表达式的 $z_0 \circ z_1^{-1}$ 也是如此。这样 $\Sigma = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 成为一紧 Riemann 面。

通过**球极投影**可以把单位球面 S 与 $\Sigma = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 等同起来，因而 S 也自然地成为 Riemann 面。具体的坐标表示如下。记 $N = (0,0,1)$（北极），$P = (0,0,-1)$（南极），考虑 S 的覆盖 $\{U_0, U_1\}$ 及映射 Φ_0, Φ_1：

$$U_0 = S \backslash \{P\}, \qquad \Phi_0: \ U_0 \to \boldsymbol{C};$$

$$U_1 = S \backslash \{N\}, \qquad \Phi_1: \ U_1 \to \boldsymbol{C}.$$

这里 Φ_0 表示从南极 P 出发到 $\boldsymbol{C}$ 作球极投影，然后取共轭

$$\Phi_0(X, Y, Z) = \frac{X - iY}{1 + Z};$$

而 Φ_1 表示从北极N出发到 $\mathbf{C}$ 作球极投影

$$\Phi_1(X,Y,Z) = \frac{X+iY}{1-Z}.$$

我们有

$$\Phi_1 \circ \Phi_0^{-1}:\ \mathbf{C}\setminus\{0\} \to \mathbf{C}\setminus\{0\},$$

$$z \mapsto \frac{1}{z},$$

$$\Phi_0 \circ \Phi_1^{-1}:\ \mathbf{C}\setminus\{0\} \to \mathbf{C}\setminus\{0\},$$

$$z \mapsto \frac{1}{z}.$$

显然 $\Phi_1 \circ \Phi_0^{-1}$ 和 $\Phi_0 \circ \Phi_1^{-1}$ 都是双全纯的。

扩充的复平面 $\Sigma = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ 或通过球极投影得到的复数球面 S（见图1.1），按上面的方式作成的紧 Riemann 面称为是Riemann 球面。

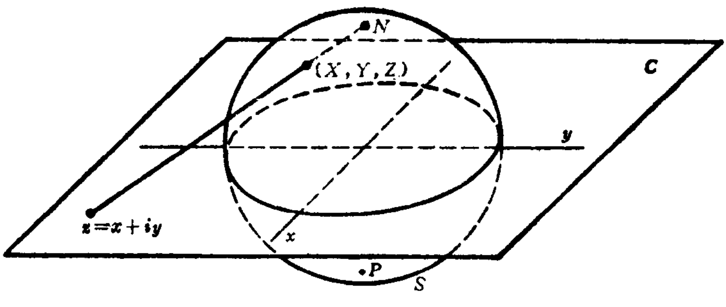


图1.1　球极投影

例2　复环面 $C = \mathbf{C}/\Lambda$。

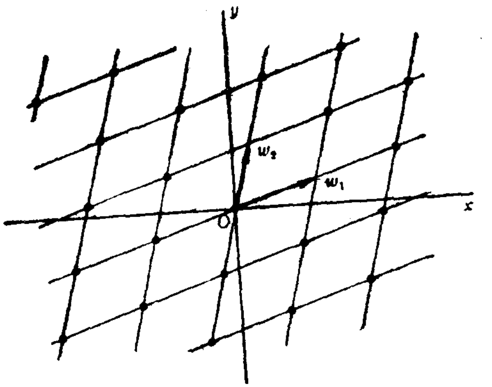


图1.2 格 Λ

设复数 w_1，w_2 实线性无关（即不存在实数 λ_1, λ_2,

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0,$$

使得

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0).$$

它们在 $\boldsymbol{C}$ 上定义了一个格（见图 1.2）：

$$\Lambda = \{m_1 w_1 + m_2 w_2 \mid m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z}\} \subset \boldsymbol{C}.$$

Λ 是由 w_1 和 w_2 生成的 $\boldsymbol{C}$ 的离散子群，它同构于 $\boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$. 考虑 $\boldsymbol{C}$ 上的等价关系"$\sim$"：

$$z \sim z' \Longleftrightarrow z - z' \in \Lambda.$$

对这等价关系的商空间 $C = \boldsymbol{C}/\Lambda$ 称为**复环面**. 容易看出这是一个紧致、连通、Hausdorff 拓扑空间. 只要 ε 充分小，$\boldsymbol{C}$ 上任意 ε 圆盘：$|w - w_0| < \varepsilon$ 与每一等价类至多相交于一点，因而这圆盘与 $C = \boldsymbol{C}/\Lambda$ 上的一个开集之间可建立一一对应关系. 用这种方式建立局部坐标，$C = \boldsymbol{C}/\Lambda$ 成为一个紧 Riemann 面. 细节的验证留给读者作为练习.

从 $\boldsymbol{C}$ 的开集 U 到 $\boldsymbol{C}$ 的开集 V 的全纯函数

$$w = f(z) \quad (w = u + iv, \ z = x + iy), \tag{2.1}$$

同时也给出从 $\boldsymbol{R}^2$ 的开集 U 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的开集 V 的光滑映射

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases} \tag{2.2}$$

由此看出紧 Riemann面同时也是一个紧的光滑的实二维流形——紧光滑曲面. 由全纯函数 (2.1) 引出的光滑映射 (2.2) 应满足 Cauchy-Riemann 方程