

西安交通大学学术专著丛书

强度理论 新体系

俞茂铨 著

西安交通大学出版社

(陕)新登字 007 号

强度理论新体系

俞茂宏著

责任编辑 路江

西安交通大学出版社出版

邮政编码:710049

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店经销

开本 850×1168 1/32 印张 7.375 字数:166 千字

1992 年 6 月第 1 版 1992 年 6 月第 1 次印刷

印数:1—1500

ISBN7-5605-0436-1/O·76 定价:5.20 元

目 录

前言

《强度理论新体系》主要符号表

第 1 章 绪论

§ 1-1 概述	(1)
§ 1-2 强度理论研究的特点	(2)
§ 1-3 强度理论新体系	(5)
§ 1-4 双剪强度理论的发展	(6)
参考文献	(8)

第 2 章 各向同性强度理论

§ 2-1 概述	(11)
§ 2-2 各向同性屈服函数的一般性质	(12)

§ 2-3 各向同性极限面的极限范围	(16)
§ 2-4 十二边形极限面和光滑化的角隅模型	(18)
参考文献	(19)

第 3 章 统一强度理论——广义双剪强度理论体系

§ 3-1 概述	(20)
§ 3-2 广义双剪强度理论	(21)
§ 3-3 广义双剪强度理论体系	(23)
§ 3-4 双剪强度理论的进一步研究	(26)
§ 3-5 双剪强度理论的极限面	(33)
§ 3-6 加权双剪强度理论(十二边形双剪强度理论)	(37)
§ 3-7 双剪强度理论的实验验证	(41)
§ 3-8 广义双剪强度理论体系——本章小结	(43)
参考文献	(47)

第 4 章 双剪角隅模型

§ 4-1 概述	(49)
§ 4-2 极限面的柱坐标表示	(53)
§ 4-3 双剪角隅模型	(56)
§ 4-4 双剪角隅模型的极限面	(59)
参考文献	(62)

第 5 章 双剪应力屈服准则

§ 5-1 概述	(63)
§ 5-2 双剪应力屈服准则——双剪单参数准则	(64)
§ 5-3 双剪应力屈服准则的两个新定义	(66)
§ 5-4 双剪应力屈服准则的平衡条件	(70)
§ 5-5 其他学者有关研究介绍	(72)
§ 5-6 双剪应力函数	(75)
§ 5-7 双剪应力屈服面	(78)
§ 5-8 子应力空间屈服面	(80)

§ 5-9 主剪应力空间屈服面	(82)
§ 5-10 广义平面问题的双剪应力屈服面	(84)
§ 5-11 加权双剪应力屈服准则(十二边形双剪应力屈服准则) ...	(88)
§ 5-12 二次型加权双剪应力屈服准则	(93)
§ 5-13 双剪单参数准则的推广	(94)
§ 5-14 广义双剪应力强度准则的另一推导	(96)
参考文献	(98)

第 6 章 双剪应变屈服准则

§ 6-1 概述	(100)
§ 6-2 Drucker 公设和 Ильюшин 公设	(101)
§ 6-3 应变屈服函数 双剪应变屈服准则	(103)
§ 6-4 加权双剪应变屈服准则	(107)
§ 6-5 应变加载面	(110)
参考文献	(113)

第 7 章 双剪应力三参数准则及其角隅模型

§ 7-1 概述	(115)
§ 7-2 双剪应力三参数准则	(117)
§ 7-3 双剪应力三参数准则角隅模型	(120)
§ 7-4 双剪应力三参数准则与实验资料的比较	(123)
§ 7-5 双剪应力三参数准则的应用	(124)
参考文献	(128)

第 8 章 双剪四参数准则和双剪五参数准则

§ 8-1 应力空间强度极限面的一般形式	(129)
§ 8-2 双剪应力五参数准则	(131)
§ 8-3 双剪应力四参数准则	(135)
§ 8-4 双剪应力五参数准则角隅模型	(136)
§ 8-5 双剪应力五参数准则和双剪五参数角隅模型的极限面 ...	(138)
§ 8-6 关于多参数准则的讨论	(139)

第 1 章

绪 论

§ 1-1 概述

材料在复杂应力作用下发生屈服和破坏的规律一般可用力学量和材料强度参数的关系式表示为

$$\Phi(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, t, T, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (1-1)$$

式中: σ_{ij} 为应力张量, ϵ_{ij} 为应变张量, $\dot{\epsilon}_{ij}$ 为应变速率张量, t 为时间, T 为温度, k_1, k_2 等为有关的材料力学性能参数。在不考虑时间和温度效应的情况下, 上式中不包含 $\dot{\epsilon}_{ij}, t$ 和 T 。如果材料在破坏前处于弹性状态, 应力-应变间有一一对应的关系, 则上式又可简化为应力状态各分量的函数。即

$$F(\sigma_{ij}, k_i) = 0 \quad (1-2)$$

但是, 由于复杂应力状态组合的无穷性, 要完全由实验来确定材料

在复杂应力状态下的强度十分困难。因此必须通过材料变形和破坏规律的深入研究和观察,提出一定的假说,推导出材料在复杂应力状态下产生屈服和断裂的强度计算准则,这就是工程结构强度计算所必须的强度理论(有时也称为宏观强度理论或力学强度理论)。

另一方面,强度理论的提出必须建立在科学论证的基础上。对于一个有实用价值的强度理论,一般要求它具有明显的物理意义,简单的数学表达式,并且符合实验结果。近年来,由于计算机的广泛采用,已有可能在工程数值计算中采用数学形式较为复杂的强度理论。

§ 1-2 强度理论研究的特点

强度理论的研究历史悠久,经久不衰,并且具有以下一些特点

一、简单而复杂

强度理论的研究对象是一个微小的单元体,研究它在空间应力 $\sigma_i (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 作用下屈服和破坏的规律,并建立相应的计算准则。它牵涉到力学、材料科学、固体物理和工程应用等很多领域。强度理论的实验验证则要求实验设备能产生一个各点应力状态均相同的均匀应力场,这对机器、测试仪器、试件加工、实验技术等的要求都较高。因此强度理论研究的命题虽然明了简单,但问题却十分广泛而复杂。

二、古老而年青

强度理论的研究最早是从 1638 年 G. Galileo 的名著《两种新科学》开始的。它是 G. Galileo 开辟近代自然科学研究的两大重要主题之一。但由于这一问题的研究没有遇到教会强力的反对,因此

它不像地球和太阳运行规律,即动力学研究那样为大家所熟知。

G. Galileo 之后各个世纪都有很多新理论和新模型出现^{[1-1]~[1-4]}。如 20 世纪初的歪形能理论,30 年代的八面体剪应力理论和广义八面体剪应力理论,40 年代的联合强度理论,50 年代的屈服面公设和分段线性屈服面,60 年代的剑桥帽子模型,70 年代的角隅模型和真三轴试验,80 年代的各种本构模型以及多参数准则和双剪强度理论等。持续不断的大量实验研究、计算机模拟分析和工程应用,都使强度理论的内容得到不断的发展和丰富,并正在逐步形成一个新的分支学科,它是一门既古老而又年青的学科。

三、学科交叉综合

强度理论的研究涉及很多领域和很多方面,有的以理论研究为主,有的以实验研究为主;有的采用微观或细观手段,有的则从宏观现象和规律出发;有的以金属物理为基础,有的又以热力学或连续介质力学为基础,或者以工程应用为基础进行研究。强度理论研究的各个方面相互结合,形成一个范围十分广泛的交叉性学科。苏联著名科学家、科学院院士 А. А. Ильющин 多年前在全苏力学大会上发言谈到塑性力学时曾指出:“宏观力学性质的研究,不但不会由于对物质中分子晶体、晶块、多晶体的基本过程及交互作用的更进一步的物理研究而被否定,而且在固体物理中,为了推导宏观力学性质,要作一些假设、简化、统计处理及平均的方法,宏观塑性变形的力学性质还会成为一些准则,在一定的准确度上来判断它的正确性”。由于学科的交叉综合也促进了强度理论及其应用的研究不断深入发展。

四、研究众多 进展缓慢

由于这一问题在理论上的普遍性和实践中的重要性,从 17 世纪到现在,都广泛吸引着各种不同领域的研究者,其中包括很多著

名学者,如 17 世纪的 G. Galileo (1564-1642), E. Mariotte (1620-1684), 18 世纪的 C. Coulomb (1736-1806), 19 世纪的 J. C. Maxwell (1831-1879), Saint-Venant (1797-1886), H. Tresca (1814-1885), W. J. M. Rankine (1820-1872), O. Mohr (1835-1918), 20 世纪的 von Mises, L. Prandtl, W. Prager, A. L. Nadai, von Karman, 当代的 D. C. Drucker, P. G. Hodge, A. A. Ильюшин, Н. Н. Давиденков, Я. Ъ. Фридман 等等。他们进行过很多研究,提出过多种设想和理论,做过大量的实验,为强度理论的发展作出了卓越的贡献^[1-11]。著名力学家 Timoshenko 于 1904 年发表他的第一篇论文就是以“各种强度理论”为题的^[1-5]。

另一方面,强度理论的进展是缓慢的,以现在常用的几个著名屈服准则为例,1773 年 Coulomb 发表土体的最大剪应力屈服准则,1864 年—1872 年 Tresca 提出金属最大剪应力屈服条件,1913 年 Mises 给出屈服圆条件,前后相差为 49—140 年。再以教材和工程中常用的四个古典强度理论为例,第一强度理论从 1638 年 Galileo 的初步概念到 1858 年 Rankine 在他的《应用力学手册》进行全面阐述;第二强度理论从 1682 年 Mariotte 的伸长断裂概念、Poncelet (1788—1867) 的最大应变假设,到 1856 年 Saint-Venant 建议以最大应变作为材料极限强度的设计依据;第三强度理论,从 1773 年的 Coulomb、1864 年的 Tresca 到 1900 年的 Guest 的最大剪应力强度理论;第四强度理论,从 Huber 的歪形能准则 (1904)、Mises 的屈服圆方程 (1913) 到 1937 年 Nadai 提出八面体剪应力理论,每个强度理论的发展和完善都经过几十年以至上百年的时间。

五、百家争鸣 景象繁荣

由强度理论研究的以上特点可见,这一领域必然呈现一种百家争鸣、百花齐放的景象,这种情况在其它学科中见之不多。到目前为止,各国学者所提出的假设和理论几乎有几百个之多。所发表

的论文,包括理论、实验研究、应用等,数以千计。国外一个学者所写的一本有关专著中各章参考文献累计达 3 209 种之多,虽然各章有部分重复,但足以说明这方面文献之多。直到 90 年代,各国有关的学报和期刊仍经常有关于强度理论的最新研究论文发表。

随着历史的发展,经过生产实践的检验,有些理论和假设已被逐步淘汰,例如应变能理论于 1885 年由 E. Beltrami 提出,因为与实验结果不符,于 1904 年被波兰力学家 Huber 修正为形状改变比能理论,并于 1937 年由 Nadai 提出为八面体剪应力理论;有的则被逐步修正,如最大正应力理论被修正为最大拉应力理论;有的则被进一步推广和发展,出现了帽子模型、角隅模型、多重屈服面、界面等很多新的概念。

进入 20 世纪 80 年代,由于材料本构关系成为力学和有关工程科学的研究热点,更促进了强度理论的研究和发展。复合应力试验机 and 高压真三轴机的不断改进,得出很多新的试验结果,提出了众多的多参数计算准则^[1-4]。电子计算机的推广有可能采用形式较为复杂的强度理论进行工程计算,并采用多种计算准则进行分析对比。角点奇异性问题在弹塑性有限元计算中巧妙而简单的解决,使分段线性强度理论得到更广泛的应用。这一切使强度理论的研究出现了更为繁荣的景象。

§ 1-3 强度理论新体系

双剪强度理论的概念较为广泛。它由一系列涵义不同而又相互联系的新概念和各种应用范围不同的新准则所组成^{[1-8]—[1-22]},形成了一个统一的理论体系。从大的方面讲,它包括:

(1) 双剪强度理论。包括双剪应力屈服准则、双剪应变屈服准则、纯剪切双剪准则和双剪应力(应变)强度理论^{[1-9]—[1-12]}。

(2) 加权双剪强度理论。包括加权双剪应力(应变)屈服准

则、加权双剪强度理论、二次式加权双剪屈服准则^{[1-21],[1-22]}。

(3) 双剪多参数准则。包括三参数、四参数和五参数双剪准则^{[1-16]—[1-18]}。

(4) 双剪角隅模型和帽子模型^{[1-13]—[1-18]}。

(5) 晶体多滑移双剪条件和广义双剪条件^{[1-19],[1-20]}。

双剪强度理论的一系列准则不仅自成体系,而且可以从这些准则中简化得出相应的单剪应力屈服准则(Tresca 准则)、Mohr-Coulomb 强度理论、Drucker-Prager 准则以及 Schmid 剪应力定律,从而建立起一个较为完整的强度理论新体系,如图 1-1 所示。

图 1-1 中的统一强度理论从双剪单元体模型出发,考虑到作用于单元体上的全部应力分量以及它们对材料屈服和破坏的不同影响,得出了广义双剪强度理论。由此出发,可以蜕化得出图 1-1 所示的各种强度理论,并建立起它们之间的联系,形成统一的强度理论。在本书第三章和第十二章中将作进一步的阐述。

§ 1-4 双剪强度理论的发展

(1) 双剪强度理论从双剪单元体模型、双剪概念到理论和各种计算准则,形成了一个内容较为广泛的强度理论新的体系。

(2) 单剪强度理论从 1773 年 Coulomb 的土体剪应力定律至 1964 年剑桥大学的帽子模型,前后历经 191 年;八面体剪应力强度理论研究,如果从 1856 年 Maxwell 给 Kelvin 的一封信开始到 1964 年提出的帽子模型也有 108 年;而双剪强度理论从 1961 年提出至今不到 30 年,目前这一理论在深化和推广应用等方面都得到了一定的发展。

(3) 单剪强度理论由法国、德国、英国等国科学家的长期研究而发展形成;八面体剪应力强度理论由德国、英国、美国等国科学家所逐步形成;而双剪强度理论的概念、模型、参数和计算准则

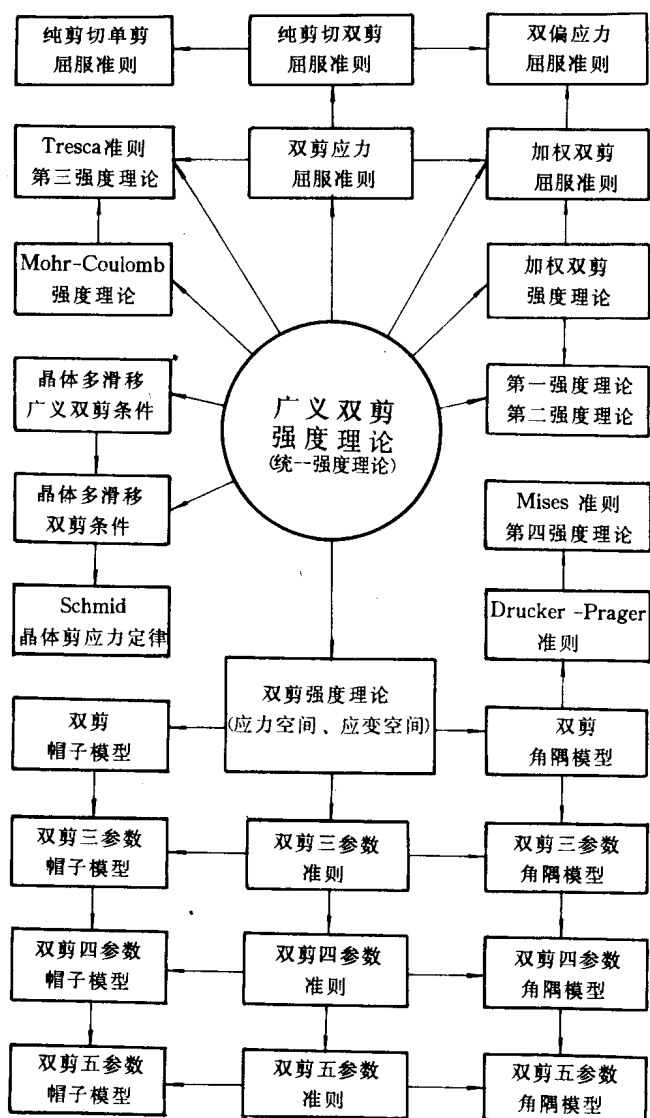


图 1-1 广义双剪强度理论体系

均由我国研究者所提出,并形成了一个较为完整的体系。现在,这一工作已扩展到有关高等学校、研究所和设计院等单位,使双剪强度理论的研究进一步深入和发展,今后可望有更多的研究成果出现。

(4) 双剪强度理论可以说明单剪强度理论所无法说明的中间主应力效应以及中间主应力效应的区间性,并且能够解释一些复合应力实验结果大于单剪强度理论的现象,以及在一定应力状态下减小或增加中间主应力引起岩石破坏和地震的现象。复杂应力试验的设备、试件加工、试验技术的要求都较高,而试件加工精度、同心度、载荷偏心等因素都会使试验的结果偏低。近年来,由于复杂应力试验技术的提高,实验得出的材料强度极限面已较前扩大,并接近于双剪强度理论的极限面,因而双剪强度理论与国外近期的一些实验结果较为接近。用这种独立于理论之外的实验结果来论证理论的正确性是十分理想的。从单剪强度理论(包括 Tresca 屈服准则、Mohr-Coulomb 强度理论和 Schmid 剪应力定律)到双剪强度理论(包括双剪应力屈服准则、双剪应力强度理论和双剪多滑移条件),经历了半个多世纪漫长而艰辛的过程,突破了现有各种强度理论的极限范围,并与单剪强度理论形成了外凸极限面的上下限,使屈服准则和强度理论在理论上更为完整,这是强度理论研究中的一个较为系统的重大的进展。

(5) 双剪强度理论的极限面为所有可能的强度极限面的上限,与单剪强度理论和八面体剪应力强度理论相比,对于适合双剪强度理论的材料,可分别提高材料强度极限最高达 15% 和 33%。因而应用双剪理论可以更好发挥材料强度潜力,减轻结构重量,取得较大的经济效益。

(6) 单剪应力强度理论、八面体剪应力强度理论、双剪应力强度理论和其他一些强度理论,都只能适用于某一类材料,而不能普遍适用于各类材料。统一强度理论(广义双剪强度理论)不仅建

立起各种强度理论之间的相互联系,并且可以普遍适用于各类材料,极限面则从外凸扩展到包含外凸和非凸的更为宽广的范围。从单一强度理论到统一强度理论,这是强度理论研究中的又一重大进展。统一强度理论目前初步形成体系,关于它的进一步研究和推广应用还有很多工作可做。

参考文献

- [1-1] Timoshenko S. P. : *History of Strength of Materials* , McGraw - Hill Publishing Co. , 1953
- [1-2] Rowlands R. E. : *Strength (Failure) Theories and their Experimental Correlation* , *Failure Mechanics of Composites* , Sih G. C. , Skudra A. M. ed, Elsevier Science Publishing Company, Inc. , 1985
- [1-3] Г. С. 皮萨林科, А. А. 列别捷夫:《复杂应力状态下的材料变形与强度》,江明行译,科学出版社,1983
- [1-4] Chen W. F. : *Plasticity in Reinforced Concrete* , McGraw-Hill Book Company, 1982
- [1-5] 钱令希,钱伟长等:《中国大百科全书》,力学,中国大百科全书出版社,1985
- [1-6] 蒋彭年:《土的本构关系》,科学出版社,1982
- [1-7] 徐积善:《强度理论及其应用》,水利电力出版社,1984
- [1-8] 俞茂宏:《双剪应力强度理论研究》,西安交通大学出版社,1988
- [1-9] Yu Maohong: *Twin Shear Stress Yield Criterion* , *Int. J. Mech. Sci.* , Vol. 25, 1983, No. 1, pp. 71-74
- [1-10] 俞茂宏,何丽南,宋凌宇:双剪应力强度理论及其推广,《中国科学》,A 辑,第 28 卷,1985,第 12 期(中文版),第 1 113-1 120 页;No. 11 (英文版),pp. 1 174-1 183
- [1-11] 俞茂宏:应变空间和应变屈服函数,《双剪强度理论研究的新进展》,西安交通大学出版社,1991。
- [1-12] 俞茂宏:古典强度理论及其发展,《力学与实践》,第 2 卷,1980,第 2 期,第 20-25 页

- [1-13] 俞茂宏,刘凤羽:广义双剪应力准则角隅模型,《力学学报》,1990,第2期
- [1-14] 俞茂宏:塑性理论中的三大系列屈服准则,《双剪应力强度理论研究》,西安交通大学出版社,1988,第1—34页
- [1-15] 俞茂宏,李跃明:广义剪应力双椭圆帽子模型,《全国第五届土力学和基础工程学术会议论文选集》,中国建筑工业出版社,1990,第165—169页
- [1-16] 俞茂宏,刘凤羽:双剪应力三参数准则及其角隅模型,《土木工程学报》,第21卷,1988,第3期
- [1-17] 俞茂宏,刘凤羽:双剪应力四参数准则和五参数准则,《西安交通大学学报》,1989,第3期
- [1-18] 俞茂宏,刘凤羽等:一个新的普遍形式强度理论,《土木工程学报》,第23卷,1990,第1期
- [1-19] 俞茂宏,何丽南:晶体和多晶体金属塑性变形的非 Schmid 效应和双剪应力准则,《金属学报》,第19卷,1983,第5期
- [1-20] 俞茂宏:复杂应力状态下材料屈服和破坏的一个新模型及其系列理论,《力学学报》,1989年增刊,第42—49页
- [1-21] 俞茂宏,何丽南:材料力学中强度理论内容的历史演变和最新发展,《力学与实践》,第16卷,1991,第1期,第59—61页
- [1-22] Yu Maohong, He Linan: A New Model and Theory on Yield and Failure of Materials under the Complex Stress State, *Mechanical Behaviour of Materials — VI*, Ed. M. Jono and T. Inoue, Vol. 3 pp. 841 — 846, Pergamon Press, 1991

第 2 章

各向同性 强度理论

§ 2-1 概述

强度理论一般是指材料在复杂应力状态下产生塑性屈服或脆性断裂的规律性的理论。其中最基本、最重要的,也是应用最广的是常温静载下的各向同性强度理论。这时强度理论的一般表达式(1-2)可用主应力函数表示为

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, K_1, K_2, \dots) = 0 \quad (2-1)$$

或写为应力不变量、平均应力、八面体应力或十二面体应力的关系式:

$$F(I_1, I_2, I_3, K_1, K_2, \dots) = 0 \quad (2-2)$$

$$F(I_1, J_2, J_3, K_1, K_2, \dots) = 0 \quad (2-3)$$

$$F(\sigma_m, \tau_m, \theta, K_1, K_2, \dots) = 0 \quad (2-4)$$

$$F(\sigma_8, \tau_8, \theta, K_1, K_2, \dots) = 0 \quad (2-5)$$

$$F(\tau_{13}, \tau_{12}, \tau_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, K_1, K_2, \dots) = 0 \quad (2-6)$$

在以上各种强度理论一般表述式中,都含有三个独立的应力分量,强度理论的计算准则中也要求能反映各应力分量对材料屈服和破坏的作用。

§ 2-2 各向同性屈服函数的一般性质

在应力空间中,屈服函数表示为屈服面。如应力点 σ_{ij} 总在屈服面内,即 $f(\sigma_{ij}) < 0$,材料为弹性;如应力点 σ_{ij} 达到屈服面,即 $f(\sigma_{ij}) = 0$,则材料开始屈服。屈服函数的性质说明它在应力空间 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 中的屈服面形状应符合一定的规律。

一、屈服面必须同时通过拉伸和压缩的六个基本实验点

对各向同性材料,应力坐标变换对材料屈服没有影响。因此在应力空间中屈服面与 π 平面相交的屈服曲线在 $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ 三轴上必有相同的矢径长度。如果在 σ'_1 方向拉伸至 1 点 ($\sigma'_1 = \sigma'_0, \sigma'_2 = \sigma'_3 = 0$) 发生屈服,则 2 点 ($\sigma'_1 = \sigma'_3 = 0, \sigma'_2 = \sigma'_0$) 和 3 点 ($\sigma'_1 = \sigma'_2 = 0, \sigma'_3 = \sigma'_0$) 也必是屈服面上的一点,如图 2-1 中的 1, 2, 3 点所示。同理如果在 σ'_1 负方向上压缩至 1' 点 ($\sigma'_1 = -\sigma'_0, \sigma'_2 = \sigma'_3 = 0$) 发生屈服,则 2' 点 ($\sigma'_1 = \sigma'_3 = 0, \sigma'_2 = -\sigma'_0$) 和 3' 点 ($\sigma'_1 = \sigma'_2 = 0, \sigma'_3 = -\sigma'_0$) 也必是屈服面上的一点。在 π 平面上,相应于拉伸点和压缩点的矢长分别为 r_t 和 r_c ,令它们之比为 $K = \frac{r_t}{r_c}$,则 K 与材料拉伸极限应力 σ_t 、压缩极限应力 σ_c 的拉压比 $\alpha = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}$ 之间的关系为

$$K = \frac{1 + 2\alpha}{2 + \alpha} \quad (2-7)$$

由于材料拉压比的变化为 $0 < \alpha \leq 1$,因此 K 的变化范围应为