21世纪应用型本科院校规划教材

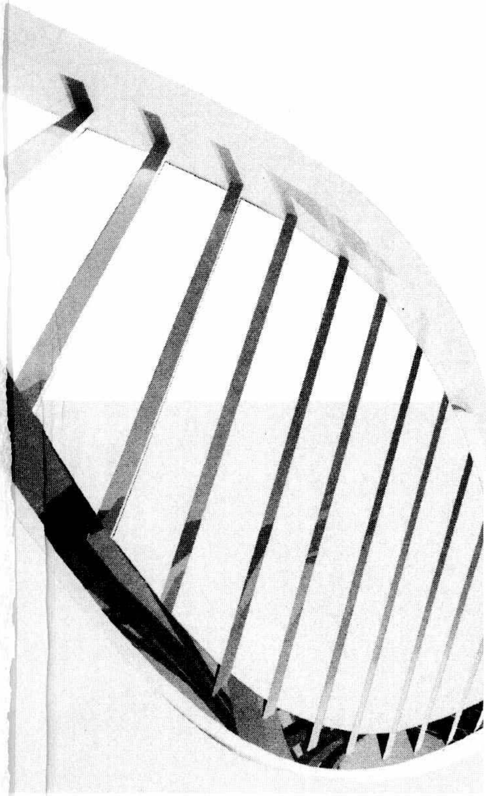
Linear Algebra

线性代数

袁中阳　张云霞　主编

南京大学出版社

21世纪应用型



线性代数

袁中阳　张云霞　主编

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 袁中阳，张云霞主编. -- 南京：南京大学出版社，2015.8

21 世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-305-15464-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①袁… ②张… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 144244 号

出版发行 南京大学出版社

社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093

出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 21 世纪应用型本科院校规划教材

书　　名 线性代数

主　　编 袁中阳 张云霞

责任编辑 刘亚丽 苗庆松　　编辑热线 025-83592146

照　　排 南京南琳图文制作有限公司

印　　刷 南京理工大学资产经营有限公司

开　　本 787×960 1/16 印张 10.75 字数 176 千

版　　次 2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-305-15464-5

定　　价 24.00 元

网址：http://www.njupco.com

官方微博：http://weibo.com/njupco

官方微信号：njupress

销售咨询热线：(025) 83594756

前　言

本书参照国家教育部高等学校工科数学教学指导委员会拟定的线性代数课程教学基本要求，及全国硕士研究生入学统一考试线性代数部分考试大纲编写而成.

本书主要包含行列式、矩阵及其运算、线性方程组与向量组的线性相关性、特征值、特征向量与矩阵的相似对角化，二次型、向量空间，共六章内容。教材涵盖了理、工、经、管的教学大纲要求，主要面向独立学院理（非数学专业）、工、经、管各专业（经、管专业，第六章不要求）；同时也可作为一般本科院校理、工、经、管各专业数学公共课的教材和教学参考书.

基于独立院校培养高级应用型人才的目标，结合独立院校学生特点，本教材在保留传统的知识体系的前提下，以降低难度、理论够用为尺度，淡化数学上抽象的理论和证明、注重具体和实用；主要以激发学生的学习兴趣、提高学生的学习热情、培养学生的学习方法为突破点，训练学生的抽象思维能力、逻辑思维能力、运算能力以及利用本课程知识解决实际问题的能力. 教材从概念的引入到具体的例子，从定理的证明到定理的应用，力求从实际背景进行介绍和论述，并给出详尽的计算方法和丰富的例题，力求体现内容的可读性，做到由浅到深，深入浅出，便于教学和学生自学.

本教材的书稿虽几经认真的修改及校对，但仍会存在一些错误或不足之处，我们衷心地希望能得到各位专家、同行和读者的批评、指正，使本书在使用过程中不断完善.

编　者

2015 年 4 月 10 日

目　录

第一章　行列式

行列式是常用的数学工具之一，本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法. 此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1　二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

可得等价方程组

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=(b_1a_{22}-b_2a_{12}) \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=(a_{11}b_2-a_{21}b_1) \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组(1.1.1)有唯一解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.1.2}$$

引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

则线性方程组(1.1.1)的解可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

定义 1.1.1　由 2^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2)$排成一个 2 行 2 列的数表，即形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1.3}$$

称(1.1.3)式为**二阶行列式**，而 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 表示二阶行列式的值，也称为二阶行列式的**展开式**. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1.4}$$

其中 a_{ij} 称为二阶行列式的**元素**，a_{ij} 的下标表示其在行列式中的位置，第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列.

行列式的记号是由凯莱(Cayley)于 1841 年给出的：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

由 a_{11} 到 a_{22} 这条直线称为行列式的**主对角线**，由 a_{12} 到 a_{21} 这条直线称为**副对角线**. (1.1.3)式可以表述为二阶行列式等于主对角线上元素的乘积减去副对角线上元素的乘积，并称为二阶行列式的**对角线法则**.

例 1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2=1 \\ x_1+2x_2=-10 \end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times2-(-3)=7\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -10 & 2 \end{vmatrix}=2-(-3)\times(-10)=-28$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}=2\times(-10)-1=-21$$

因此 $$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-28}{7}=-4,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

二、三阶行列式

类似于二阶行列式,可以定义三阶行列式.

定义 1.1.2　由 3^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成一个 3 行 3 列的数表,形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.1.5}$$

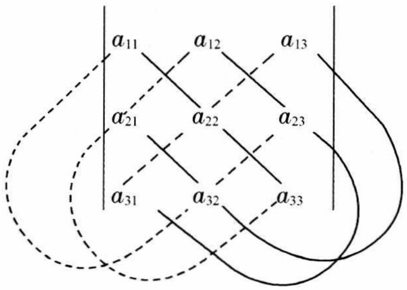
则称(1.1.5)式为**三阶行列式**,表达式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

表示三阶行列式的值,也称为三阶行列式的**展开式**,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1.6}$$

上式表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循下列所示的对角线法则:其中有三条实线看作是平行于主对角线的连线,三条虚线看作是平行于副对角线的连线,实线上三元素之积冠以正号,虚线上三元素之积冠以负号.



例 2　计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　由三阶行列式的对角线法则,有

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\times1\times2+0\times1\times1+1\times2\times3-1\times1\times3-0\times2\times2-1\times1\times1=4.$$

需要指出的是，只有二阶和三阶行列式具有对角线法则，四阶及以上的行列式不存在对角线法则. 为了把二阶和三阶行列式推广到 n 阶行列式，需要从另外的角度讨论二阶和三阶行列式结构，而这需要排列的相关知识.

§2 全排列及其逆序数

定义 1.2.1 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个不同元素的**全排列**（简称**排列**）.

由排列组合的知识，n 个不同元素全排列的种数，记作 P_n，有

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1 = n!$$

这里只讨论由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个不同元素排列的相关知识. 由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个不同元素构成的排列，一般形式为 $p_1p_2\cdots p_n$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中互不相等的数. 规定 $1,2,\cdots,n$ 各元素之间由小到大的顺序为标准次序.

定义 1.2.2 在 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，若某两个元素的先后次序与标准次序相反，称该排列产生一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记作

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)\text{或}\tau$$

如在排列 132 中，3、2 产生一个逆序，则 $\tau(132)=1$；在排列 312 中，3、1；3、2 产生逆序，则 $\tau(312)=2$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，如排列 132；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，如排列 312.

为了确定排列的奇偶性，需要讨论排列逆序数 τ 的计算方法.

设 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列为

$$p_1p_2\cdots p_{i-1}p_i\cdots p_n$$

对于 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，若排在 p_i 前且比 p_i 大的元素有 τ_i 个，称元素 p_i 的逆序数为 τ_i，则该排列的逆序数

$$\tau(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_n) = \tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_i+\cdots+\tau_n = \sum_{i=1}^{n}\tau_i.$$

例 1 求排列 3214 和 4213 的逆序数，并判断排列的奇偶性.

解　由上式，有

$\tau(3214)=0+1+2+0=3$，故排列 3214 为奇排列；

$\tau(4213)=0+1+2+1=4$，故排列 4213 为偶排列.

称排列 $12\cdots n$ 为**标准排列**，它的逆序数为零，是偶排列.

§3　对换及其性质

定义 1.3.1　在排列中，将某两个元素互换，其余元素不动，这种得到新排列的方式称为对换.

如排列 3214 将元素 3 与 4 互换得到排列 4213. 由 §2 例 1 知，它们改变了奇偶性，这种现象不是偶然的. 一般的有

定理 1.3.1　对换改变排列的奇偶性.

定理证明略.

推论　奇排列换成标准排列的对换次数为奇数；偶排列换成标准排列的对换次数为偶数.

证　注意标准排列为偶排列，由定理 1.3.1 知结论成立.

§4　n 阶行列式的定义

先讨论二阶行列式的结构. 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}+(-a_{12}a_{21})$$

仔细观察右边的两项，其共同点是：

1. 右边的每一项都是位于不同行不同列的两个元素的乘积，则每一项除正负号外均可写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}$，其中行标排成标准排列 12，列标排成 p_1p_2，是 1、2 的某个排列. 该式右端共有 $P_2=2!=2$ 项，通项可以写成 $(-1)^s a_{1p_1}a_{2p_2}$ 的形式.

2. 右边带正号的列标排列是 12，它是偶排列；带负号的列标排列是 21，它是奇排列；即右边每项的正负号 $(-1)^s=(-1)^{\tau(p_1p_2)}$.

综上，二阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2} (-1)^{\tau(p_1p_2)} a_{1p_1}a_{2p_2} \tag{1.4.1}$$

其中 p_1p_2 是 1、2 的任一排列，$\sum\limits_{p_1p_2}$ 是对 1、2 的所有排列求和，和式共含有 2! ＝2 项.

再讨论三阶行列式的结构. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+(-a_{11}a_{23}a_{32})+(-a_{12}a_{21}a_{33})+(-a_{13}a_{22}a_{31})$$

显然也有

1. 右边的每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积，每一项除正负号外均可写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中行标排成标准排列 123，列标排成 $p_1p_2p_3$，是 1、2、3 的某个排列. 右边共有$P_3=3!=6$ 项，通项可以写成$(-1)^s a_{1p_1}a_{2p_2}\cdot a_{3p_3}$ 的形式.

2. 右边带正号的列标排列是 123、231、312，它们都是偶排列；带负号的列标排列是 132、213、321，它们为奇排列，即每项的正负号 $(-1)^s=(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

综上，三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} \tag{1.4.2}$$

其中 $p_1p_2p_3$ 是 1、2、3 的任一排列，$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 是对 1、2、3 的所有排列求和，和式共含有 3! ＝6 项.

根据以上的规律，四阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3p_4}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} \tag{1.4.3}$$

其中 $p_1p_2p_3p_4$ 是 1、2、3、4 的任一排列，$\sum\limits_{p_1p_2p_3p_4}$ 是对 1、2、3、4 的所有排列求和，和式共含有 4! ＝24 项.

n 阶行列式与二、三、四阶行列式有共同的规律.

定义 1.4.1 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成一个 n 行 n 列的数表，即形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.4.4}$$

称(1.4.4)式为 n 阶行列式,它等于(1.4.4)中所有带符号的不同行不同列的 n 个元素的乘积项

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.4.5}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 1、2、…、n 的任一排列, $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 是对 1、2、…、n 的所有排列求和,和式共含有 $n!$ 项.

n 阶行列式简记为 D,D_n,$|a_{ij}|_n$ 或 $\det(a_{ij})$,数 a_{ij} 称为 n 阶行列式的第 i 行第 j 列的元素.当 $n=1$ 时,规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

在定义 1.4.1 中,我们把(1.4.5)中乘积项的行标排成标准排列,列标是 1、2、…、n 的任一排列.从以上得到 n 阶行列式定义的过程可知,若把乘积项的列标排成标准排列,而行标是 1、2、…、n 的任一排列,则应得到 n 阶行列式的等价定义.

定义 1.4.2　n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn} \tag{1.4.6}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 1、2、…、n 的任一排列, $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 是对 1、2、…、n 的所有排列求和.

§5　几个特殊行列式

本章的主要内容是行列式的计算,而行列式的计算是非常灵活且复杂的.为了解决行列式的计算问题,必须牢记一些常见的特殊的行列式的值.

定义 1.5.1　形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的 n 阶行列式,称为**主对角行列式**;形如

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

的 n 阶行列式,称为**副对角行列式**.

根据 n 阶行列式的定义,可得

定理 1.5.1

(1)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}; \tag{1.5.1}$$

(2)

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \tag{1.5.2}$$

定义 1.5.2　形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的 n 阶行列式,称为**下三角行列式**;形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的 n 阶行列式,称为**上三角行列式**. 上、下三角行列式统称为**三角行列式**.

根据 n 阶行列式的定义,可得

定理 1.5.2　三角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad (1.5.3)$$

§6　行列式的性质及展开定理

一、行列式的性质

从上节可知,当 n 较大时,由 n 阶行列式的定义计算行列式(除某些特殊行列式外)是非常繁琐的. 本节将研究行列式的性质,在此基础上,介绍一些计算行列式的常用方法.

定义 1.6.1　设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将 D 中的行与列互换,所得到的 n 阶行列式称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T},即

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1　行列式与其转置行列式的值相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证　令 $D=|a_{ij}|_n$,设 $D^{\mathrm{T}}=|b_{ij}|_n$,则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 由(1.4.5)式,得

$$D^{\mathrm{T}} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

由(1.4.6)式,上式的右端等于 D.

性质 1 表明,在行列式中行与列的地位是对等的,即凡是对行成立的性质