全国高等院校民族班教材

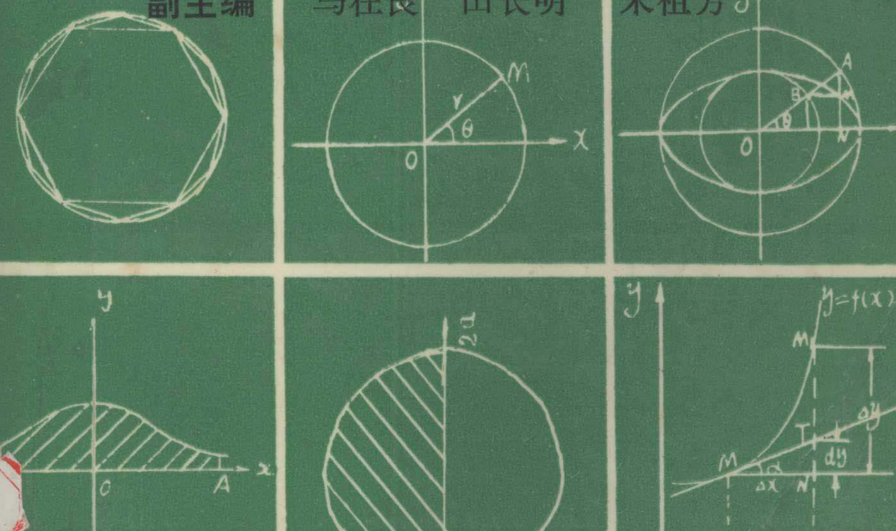
数 学

乙种本(下册)

微 积 分

主 编 张应族

副主编 马在良 田长明 朱祖芳



中央民族学院出版社

全国高等院校民族班教材

数 学

乙种本（下册）

微 积 分

主　编　张应族

副主编　马在良　田长明　朱祖芳

中央民族学院出版社

O172
Z39

（京）新登字184
责任编辑：邱　立
封面设计：金　文

数学（乙种本下册）
微积分
中央民族学院出版社出版
（北京西郊白石桥路27号）
（邮政编码：100081）
新华书店北京发行所发行
北京昌平亭自庄福利印刷厂印刷

787×1092毫米 32开 8.3125印张 177千字
1993年7月第1版　1993年7月第1次印刷
印数：01-5000册

ISBN7-81001-501-X/G·222
定价：4.00元

前　言

在国家民委，教委民族司的支持下，根据“普通高校预科工作会议”和1990年元月北京“民族院校预科数学教材修改会议”的精神，为了培养我国少数民族各类专门人才，适应预科教育的进一步发展，提高预科教学水平，决定对1985年编写的全国高等院校民族班数学教材进行修改，并由中央民族学院，中南民族学院，西南民族学院，云南民族学院，贵州民族学院，西北民族学院预科部数学教研室分工修改编写。根据学生程度和培养目标，教材分为甲，乙种本，即甲种本（全一册）《微积分》和乙种本《初等数学》（上册）及《微积分》（下册）。

乙种本（下册）《微积分》，第一，二章分别由贵州民族学院周如银，马在良编写，由马在良统稿。第三，四章由西南民族学院梁乃珍（§3-1-§3-5）唐敏（§3-6-§3-8），钱兆芳（§3-9），田长明（§4-1§-§4-2）王清华（§4-3-§4-8）编写，由田长明统稿；第五，六章由中南民族学院孙宜南（§5-1-§5-3），刘书英（§5-4-§5-6），胡常芳（§6-1-§6-3），张应族（§6-4-§6-5），朱祖芳（§6-6）编写，由朱祖芳统稿。全书由张应族统稿。图由田长明（第三、四章）、朱祖芳（第一、二、五、六章）绘制。

参加教材审稿会议的有：中央民族学院程永芳，中南民族学院张应族，西南民族学院田长明，云南民族学院谢冬梅，贵州民族学院马在良、周如银，广西民族学院黄华贤、梁汉光，青海民族学院韩洪潮、西北民族学院黄继峰、常靖国、马艳琳、闫景壁。

在教材的编审过程中，得到中央民族学院，西北民族学

院、青海民族学院领导的关怀和支持，深表感谢！全教材由中央民族学院程永芳主持编写，审稿工作。

本教材不仅可供各民族院校大学预科班、各高等院校民族班使用，还适用于师范专科、中学教师进修、培训和青年自学使用，参考。

对书中可能出现的差错、不当之处，除欢迎批评指正外，还希望为进一步完善本教材提出宝贵的意见。

编　者

1992年7月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.

目　录

第一章 极 限

极限概念是微积分中最重要的基本概念，从极限概念出发产生的极限方法是微积分最基本的方法。从历史上看，这种方法一出现，就引起了数学上的重大变革，解决了一系列初等数学无法解决的问题。

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的。例如，我国魏末晋初数学家刘徽，曾用他所创造的割圆术计算过圆的面积。他从计算圆的内接正六边形，正十二边形，…，正九十六边形的面积，得出圆周率的近似值（半径为1的圆的面积等于π）$\pi=3.14$。这是我国古代数学家的光辉成就之一。按照这个思想，每次把内接正多边形的边数加倍，边数越多，其面积就越接近圆的面积。但边数一但取定，算出的

图 1-1

仍是多边形的面积，仅只能作圆的面积的一个近似值。因而设想，当边数无限增多时，正多边形的面积也就无限接近圆的面积了。这个“无限接近”的过程就是一个极限过程。

§1-1 数列的极限

一、数列的概念

1. 数列

按照一定顺序排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

叫做数列，记为 $\{x_n\}$。第一个数叫做数列的第一项或首项，第二个数叫做第二项，第 n 个数叫做一般项或通项。如果每一项后面都有跟随着的项，则此数列叫无穷数列。如果某项以后不再有跟随着的项，则此数列就叫做有穷数列。

例如 $1, -3, 5, \cdots, (-1)^{n-1}(2n-1), \cdots$ 为无穷数列，通项公式为 $x_n=(-1)^{n-1}(2n-1)$；2，4，6，8，10 为有穷数列，通项公式为 $x_n=2n$ $(n=1, 2, \cdots, 5)$。

数列 $\{x_n\}$ 可看成整序变量的函数，写作

$$x_n=f(n), (n\in N)。$$

2. 子列

若在数列 $\{x_n\}$ 中，保持原来的先后顺序，自左往右任取其中不重复的无穷多项：

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots,$$

这样得到的数列 $\{x_{n_k}\}$ 称为原数列 $\{x_n\}$ 的子列。x_{n_k}中的 k 表示 x_{n_k}是子列中的第 k 项，且下标适合以下条件：

1° $1\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$；

2° $n_k\geqslant k$.

例如数列 $2, 4, 8, \cdots, 2^k, \cdots$ 是数列 $2, 4, \cdots, 2n, \cdots$ 的一个子列，子列的第 k 项为 $x_{n_k}=2^k$，它是原数列的第 2^{k-1}项。

3. 单调数列

在数列 $\{x_n\}$ 中，如果

1°对于一切 n 均有 $x_{n+1}\geqslant x_n$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 为单调上升数列。

2°对于一切 n 均有 $x_{n+1}\leqslant x_n$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 为单调下降数列。

例如，对无穷数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1}\cdots,$$

我们有

$$x_{n+1}-x_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}>0,$$

即 $x_{n+1}>x_n$，所以这个数列是单调上升数列。

数列 $3,\ -3,\ 3,\ \cdots,\ (-1)^{n-1}3,\ \cdots$不是单调数列，它交替地上升或下降，称为摆动数列。

4. 有界数列

如果存在（记作“$\exists$”）一个正数 M，使得对于数列 $\{x_n\}$ 的一切项均有

$$|x_n|\leqslant M,$$

则称此数列为有界数列，否则称它为无界数列。

如果存在常数 M，使得对于数列 $\{x_n\}$ 的一切项均有

$$x_n\leqslant M\ （或\ x_n\geqslant M）,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 有上界 M（或有下界 M）。否则称数列 $\{x_n\}$ 无上界（或无下界）。

例如数列 $2,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ 1+\frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots$是有界数列（$|x_n|\leqslant 2$）。而数列 $1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots$是无界数列，它只有下界而无上界。再如数列 $1,\ -3,\ 5,\ \cdots,\ (-1)^{n-1}(2n-1),\ \cdots$

也是无界数列，它既无上界，也无下界。

显然，一个数列有界的充要条件是它既有上界又有下界。

二、数列的极限

我们来考察几个数列当 n 无限增大（记作 $n\to\infty$）时 x_n 的变化趋势。

例 1　$x_n=(-1)^{n-1}$.

解：　当 n 无限增大时，数列在 1 与 −1 两点上摆动，不趋于某一个固定的常数，如图 1-2。

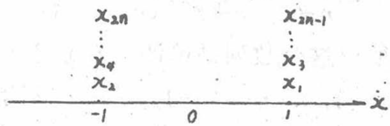


图　1-2

例 2　$x_n=\dfrac{1}{n}$。

解：　当 n 无限增大时，x_n 从原点的右边无限接近于 0，如图 1-3。

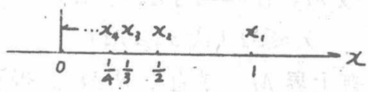


图　1-3

例 3　$x_n=\dfrac{n}{n+1}$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.

解： 当 n 无限增大时，x_n 从点 1 的左边无限接近于 1，如图 1-4。

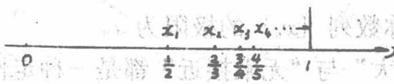


图 1-4

例 4 $x_n=1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$。

解： 当 n 无限增大时，x_n 从点 1 的左、右而无限接近于 1，如图 1-5。

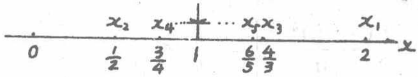


图 1-5

例 5 $x_n=(-1)^{n+1}2^n$。

解： 当 n 无限增大时，$|x_n|$ 无限增大，不趋于任何常数。

综上所述，数列的变化趋势可归结为：

(1) 绝对值无限增大；

(2) 在不同点上摆动；

(3) 无限接近于一个常数 $\begin{cases}\text{从某个常数的右边，}\\\text{从某个常数的左边，}\\\text{从某个常数的两边。}\end{cases}$

(1)、(2) 两种情况表明，它们不趋于任何一个常数，这时我们就说它们的极限不存在或没有极限。对于情形 (3)，我

们就说数列 $\{x_n\}$ 以这个常数为极限。

一般来说，当 n 无限增大时，若 x_n 无限接近于某一个常数 a，我们就称数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a。

"n 无限增大"与"无限接近"都是一种定性的描述，那么应如何更精确地作出定量刻划呢？由前面对数列变化趋势的讨论，x_n 与其极限 a 的接近程度可以用它们的差的绝对值 $|x_n-a|$ 的大小来衡量，所谓无限接近于 a 是指 $|x_n-a|$ 可以任意变小；而 n 无限增大是指 n 可以充分变大。但两者不是孤立的。要使 $|x_n-a|$ 小到某个预先指定的程度，只须 n 大到某个程度就可以实现。这里的"程度"均可用相应的数来加以刻划。例如在例 4 中，要使

$$|x_n-1|=\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{100},\text{只须 } n>100;$$

$$|x_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{1000},\text{只须 } n>1000;$$

$$|x_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10^k},\text{只须 } n>10^k(k\in N)。$$

这种接近程度的要求是可以任意提出的，而且都可以确定一个正整数 N，使其适合这一要求。我们用 ε 来表示给定的正数。要使

$$|x_n-1|<\varepsilon,\text{只须 } n>\frac{1}{\varepsilon}。$$

这里 $\frac{1}{\varepsilon}$ 不一定是整数，通常取这样一个正整数 $N\geqslant\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^*+1$，当 $n>N$ 时，就有

---

* 符号 [x] 表示不超过 x 的最大整数。

$\forall\varepsilon>0$

$\lim\limits_{x\to a} x_n=a$

$$|x_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon。$$

下面给出数列极限的精确定义。

定义 1 设 $\{x_n\}$ 为一数列。若对于任意给定的无论多么小的正数 ε（简记作：$\forall\ \varepsilon>0$），总存在一个正整数 N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，均有不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，或者说数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，并记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

或简记为 $x_n\to a$ $(n\to\infty)$。

如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就说数列 $\{x_n\}$ 是发散的。

为了进一步理解数列极限的定义，我们给它以几何解释。

因 $|x-a|<\varepsilon$，即 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$，这就是数轴上以 a 为中心，以 ε 为半径的一个开区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$，称这开区间是点 a 的 ε 邻域，记为 $N(a;\ \varepsilon)$。

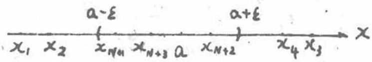


图 1-6

所以 $|x_n-a|<\varepsilon$（当 $n>N$ 时）的几何意义是：在数列 $\{x_n\}$ 中，从第 $N+1$ 项起，数列所有以后各项都落在 $N(a;\ \varepsilon)$ 里去了，如图 1-6。即

$$x_n\in N(a;\varepsilon)\quad（当\ n>N\ 时）。$$

根据数列极限的精确定义，可以严格证明某常数是某一

数列的极限。

例 6　证明数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的极限是 1。

证明：对于$\forall\ \varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$$

解此不等式得 $n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$，取正整数 $N\geqslant\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$（若$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}<0$，则取 $N\geqslant1$），于是当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}+1}=\varepsilon$$

成立，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\ .$$

例 7　给定数列 $x_n=\sqrt{\frac{n}{n^2+a^2}}$ $(a\neq0)$，试求数列 $\{x_n\}$ 的极限。

解：将通项变形得

$$x_n=\sqrt{\frac{1}{n+\frac{a_2}{n}}}.$$

当 $n\to\infty$时，观察出它无限接近于零。

对于$\forall\ \varepsilon>0$，要使

$$|x_n-0|=\left|\sqrt{\frac{n}{n^2+a^2}}-0\right|=\sqrt{\frac{n}{n^2+a^2}}<\varepsilon,$$

即要$\frac{n}{n^2+a^2}<\varepsilon^2$，解此不等式得

B370页

$$n > \frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2\varepsilon^4}}{2\varepsilon^2}\text{。}$$

上述不等式右边较繁，现采用“适当放大”的方法。我们有

$$\sqrt{\frac{n}{n^2 + a^2}} < \sqrt{\frac{n}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

于是，欲$\sqrt{\frac{n}{n^2+a^2}}<\varepsilon$，只须$\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$就可。解之得$n>\frac{1}{\varepsilon^2}$，取正整数$N\geqslant\frac{1}{\varepsilon^2}$，当$n>N$时，就有

$$\left|\sqrt{\frac{n}{n^2 + a^2}} - 0\right| < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

成立，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n^2 + a^2}} = 0\ .$$

例 8　设$|q|<1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

证明：若$q=0$，结论显然成立，故不妨设$q\neq0$ 。

证法 1　$\forall\ \varepsilon>0$，要使

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon\quad ,$$

两边取对数得

~~lim~~ $n\lg|q| < \lg\varepsilon$

$$n\lg|q|<\lg\varepsilon\quad ,$$

$n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$

由$\lg|q|<0$，可得$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$。取正整数$N\geqslant\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$，当$n>N$时，就有$|q^n-0|<\varepsilon$成立，所以

$$\lim_{n\to\infty}q^n = 0\ .$$

证法 2　因$|q|<1$，故存在$h>0$使$|q|=\frac{1}{1+h}$。由二项式

定理，并适当放大得

$$|q|^n=\left(\frac{1}{1+h}\right)^n=\frac{1}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}\cdot h^2+\cdots h^n}<\frac{1}{nh}.$$

$\forall\ \varepsilon>o$，要使$|q|^n<\varepsilon$，只须$\frac{1}{nh}<\varepsilon$，解得$n>\frac{1}{\varepsilon h}$。故取正整数$N\geqslant\frac{1}{\varepsilon h}$，当$n>N$时，将有

$$|q^n-0|=|q|^n<\frac{1}{nh}<\varepsilon$$

成立，所以

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0\ .$$

从以上各例不难看出，给定ε后，正整数N的取法不是唯一的。

习　题　一

1. 写出下列各数列的通项x_n：

(1) $1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ \cdots$；

(2) $1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{2},\ 3,\ \cdots$；

(3) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$；

(4) $3-1,\ 3-2,\ 3-2^2,\ 3-2^3,\ \cdots$；

(5) $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots$。

2. 确定下列数列的单调性与有界性：

(1) $x_n=-2^n$，$(n=1.\ 2,\ \cdots)$；

(2) $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，$(n=1,\ 2,\ \cdots)$；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com