高等数学 上

电信各专业自学读本

北京邮电学院函授部编 · 人民邮电出版社出版

内 容 提 要

《高等数学》自学读本这一套书，是为读者自学或作函授教学用书而编写的。编者根据自学的需要向读者提示了一般学习方法，并在预篇中向读者介绍了学习高等数学所需要的一些预备知识。为了检验和巩固学习效果，除了每章都有要点总结外，每章、每节都有思考题和习题，并附有习题答案。本书可供工程技术人员和高中文化程度的读者阅读，大专院校有关专业的师生参考。

高 等 数 学

电信各专业自学读本

上 册

北京邮电学院函授部编

*

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

北京印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32　1979年4月第一版

印张：14 24/32　页数：236　1979年4月北京第一次印刷

字数：338千字　印数：1—202,100册

统一书号：15045·总2293-有5118

定价：1.15元

目　　录

第二篇　一元函数的微积分学

一般学习方法提示

一、自　学

使用本书以自学为主。在学习高等数学的过程中，不仅要把数学知识学到手；而且还要在这过程中逐步炼出刻苦自学、独立钻研、循序渐近、坚韧不拔的自学习惯和自学能力，以便学好后面的各科专业读物。

二、阅　读

1．在阅读每一章之前，应当根据自己的业余时间，参照本书内容订出自学计划。

自学计划必须严格执行，才能逐渐地使自己善于抓时间、合理安排时间进行不间断地学习。要注意，只有挤出更多的时间来钻研，才有可能将知识学到手。

2．本书应当仔细阅读，循序渐进。不要着急，不要贪多图快；应力求懂得每一句话、每一个推演步骤；必须依照本书已编排好的顺序，认真地做完思考题和习题。

要注意，任何一本书，都是按照一定的系统、一定的顺序来讲述的。因此，要学好后面的内容，就必须完全掌握前面的主要内容〔至于某些个别的句子或推演步骤实在看不懂时，可记下来，以便请人解答〕。

3．每学一部份不仅要仔细地阅读，而且要反复地进行。

只有多看几遍，才能比较深刻地领会其中的内容。

4．多思考，要有钻研的态度。阅读并不是单纯的看，要多加思考。特别是遇到看不懂的地方，就须要加以分析，并且联系上下文反复思考。实在不能解决时，可以请人帮助解答。

5．在阅读时要手脑并用。应当自己动手来核实其中的推演步骤（包括那些因简单而略去以及某些有意留给读者自己去独立完成的在内）；**复制书中所有说明概念的图形**（特别是空间的立体图）。

这样，就可以加强对内容的理解，也可以加强运算能力。

6．要特别注意基本概念的定义。应当对这些概念有清楚的了解，否则，就不可能理解有关的逻辑推理过程，学不好数学。要仔细思考书中对某些定义所举的例子。

7．在阅读教材的同时作笔记——摘要——是很有益的。

8．应该记住，每一个定理都是由假设、结论与证明所组成的。所有的假设在证明中都必须利用到。要能准确地指出定理中每一项假设在证明中的什么地方被利用到。作复杂定理的证明的概要是有益的。

三、思 考 题

在每一章或某些节之后附有思考题，它是根据中心内容、基本概念、特别是不易弄清的问题给出来的。因此，必须认真回答这些思考题。

解答时最好不要先去翻书，只有在回答不出或对答案感到怀疑时才去查阅。

解答思考题应当是有根据的，确切知道自己的解答是正确的。

四、习　　题

习题对学习的内容起着巩固和深化的作用。

必须防止两种极其有害的倾向：

1．单动脑不动手。如果不作一定数量的基本题，所学的内容就不巩固；不作一定数量的基本题来积累一些基本技巧，某些综合性的习题也就做不出来。

过去有很多读者，在开始学习时没有认识到这一点，阅读时，只是浏览一遍，运算不推导，习题做得少，以致后来阅读的困难越来越多，动手做更是困难，学习上化的时间不少，学习效果还是不好。这种现象说明对前面的知识学得不巩固，没有学到手。

读者应当及时做完书中规定的习题。

2．只做题，不钻研的倾向也必须防止。

做习题并不是学习的最终目的，它主要还是作为巩固和深化书中基本内容的一种手段。

不弄清基本理论与方法，就不能做好习题、不能很好地达到做题的目的。

因此，在做习题以前，要弄清楚书中的内容，彻底理解书中所举的例题；作题要从所述的原理、方法出发，必须确切知道自己解题的每一步骤的根据。

另外，做题时能注意到下面几点是有益的。

1．引用公式时，最好试试能否回忆出该公式，只有在回忆不出的时候才去查书。这样，有助于记忆。

2．做习题时，不要先看答案，最好做到完全不依靠答案。

如果只靠核对答案来证实自己做得是否正确，那末，独立

工作能力必将受到很大的损害，限制了独立工作能力的发展。

应当自己来检查演算中的每一步骤是否合理，并设法来核实所得的结果确实是正确的。

五、笔　　记

1. 记笔记——摘要——对培养独立工作有很大的意义。建议在第一遍阅读本书时，在笔记本中记下定义、定理的表述，定理的证明，公式和例题的解法。

在笔记本的边上空白处标出问题，以便在反复阅读的过程中加以解决或请人帮助解决。

2. 书写的修饰工作有很重要的意义。笔记本的书写必须清楚、整洁并有条理。这不仅使自己习惯于有秩序地工作（这对任何工作都是很必要的）并且还可以使得避免许多错误，这些错误都是由于潦草紊乱的书写而发生的。

3. 建议作笔记时，在以公式的形式所得的结论下打上重点记号或画上一小框，以便在复习时能一望而知，且能更好地记住这些公式。

预　篇

我们准备在这一篇里向读者介绍一些预备知识：部分分式、行列式、实数、区间和绝对值等。

第一章所讲述的部分分式将首先在第二篇不定积分一章中要用到。

第二章讲述行列式。行列式不仅能用来解决有关线性方程组的问题，而且在其它许多问题中，也带来了很大的方便。在本书中我们将多次用到它。

第三章讲述实数、数轴、区间和绝对值等。虽然其中大部分内容读者可能已学过，但由于它们是学习数学分析必须具备的知识，所以我们在这一章里顺便地将它们作一扼要的叙述。

经常用到的一些初等数学公式以及希腊字母表，均附于书末以供读者查阅。

第一章　部分分式

多项式

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

也叫做**有理整式**；两个有理整式 $P(x)$和 $Q(x)$[$Q(x)$ 不恒为零]的商

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

叫做**有理分式**。

在有理分式中，如果分子 $P(x)$的次数低于分母 $Q(x)$的次数，则称有理分式为**真分式**；否则，称为**假分式**。

例如

$$\frac{2}{x^2-1},\ \frac{x-5}{x^3-3x^2+x+4}$$

是真分式；而

$$\frac{x-1}{x+1},\ \frac{x^3-x+3}{x^2+1}$$

是假分式。

如果有理分式的分子和分母没有公因子，则称有理分式是**既约的**。上述四个例子都是既约的有理分式。

既约的真分式有时还能化成一些最简单的真分式之和，例如$\frac{2}{x^2-1}$可化成

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}$$

(请读者将右端通分、求和，来验证上式两端是恒等的)。

下列四类真分式叫做**最简分式**：

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

其中 A、M、N、a、p、q 都是实数，n 是正整数，而且二次三项式 x^2+px+q 只有复数根，即 $p^2-4q<0$。

把既约真分式化成最简分式之和，叫做把既约真分式分解成**部分分式**。把既约真分式分解成部分分式有很大的现实意义。

本章的目的就是向读者介绍如何把既约真分式化成最简分式之和的方法。

分解既约真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

为部分分式，最关键的一步是：根据分母 $Q(x)$ 所含的因式来决定分解后的结构（由怎样一些最简分式来组成）。决定分解后的结构，其要点如下：

1. 如果分母 $Q(x)$ 中含有因子 $(x-a)^k$——a 是实数、k 是正整数，则分解后有下列 k 个真分式之和

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}。$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数。特别，如果 $Q(x)$ 仅含 $x-a$ 的一次因子 $(k=1)$，则分解后有

$$\frac{A}{x-a}。$$

2. 如果分母 $Q(x)$ 含有因子 $(x^2+px+q)^k$，而且其中的二次三项式没有实根，则分解后有下列 k 个最简分式之和

$$\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q},$$

其中 M_k、N_k、M_{k-1}、N_{k-1}、$\cdots$、M_1、N_1 等等都是常数。特别，如果 $k=1$，则分解后有

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}.$$

用定理来表明这两个要点是：

定理 如果既约真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

的分母可表成

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}, \tag{1}$$

其中 a、b、p、q、r、s 等是实数，α、β、λ、μ 等是正整数，而且其中所有的二次三项式都没有实根，则此既约真分式可以表为

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_1}{x-a}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\frac{B_1}{x-b}\\&+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\frac{M_{\lambda-1}x+N_{\lambda-1}}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}+\frac{R_{\mu-1}x+S_{\mu-1}}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}\end{aligned}$$

其中 A_α、B_β、M_λ、N_λ、R_μ、S_μ 等都是实数。

这个定理的证明颇为冗长，所以不再写出。

上述定理完全确定了既约真分式分解成部分分式的**形式**，若能再求出部分分式中所有分子里的常数 A、B、M、N 等，则分解手续便全部完成。

确定部分分式里的常数可用**待定系数法**。现举例说明如下。

例 1. 将分式

$$\frac{x^2-x+2}{x(x-3)(x+2)}$$

分解成部分分式。

解 这是既约真分式（读者自行验证）。

由于分母含有因子 x，故部分分式中含有$\frac{A}{x}$（对照前述的第 1 项要点，$a=0$，$k=1$）；

由于分母含有因子 $x-3$，故部分分式中含有$\frac{B}{x-3}$；

又由于分母含有因子 $x+2$，故部分分式中含有$\frac{C}{x-2}$。

于是可设

$$\frac{x^2-x+2}{x(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+2},$$

其中 A、B、C 为待定之常数。

将右端通分，得

$$\frac{x^2-x+2}{x(x-3)(x+2)}=\frac{A(x-3)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x+2)}。$$

由两端的分子应该恒等这一事实即知

$$\begin{aligned}x^2-x+2&=A(x-3)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-3)\\&=(A+B+C)x^2+(-A+2B-3C)x-6A;\end{aligned}\qquad(2)$$

比较两端同次项的系数，得

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -A+2B-3C=-1 \\ -6A=2 \end{cases}$$

解此方程组，得

$$A=-\frac{1}{3}, \qquad B=\frac{8}{15}, \qquad C=\frac{4}{5}。$$

所以，

$$\frac{x^2-x+2}{x(x-3)(x+2)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{x}+\frac{8}{15}\frac{1}{x-3}+\frac{4}{5}\frac{1}{x+2}。$$

注 如果在(2)式的第一恒等式中依次令 $x=0$、3、-2，则可较简便地算出系数 A、B、C（请读者自己算一算）。但须注意，并不是在任何场合下这方法都能如此有效（直接地全部确定出未知系数）。读者只要留意就可以看出，如果分式的分母 $Q(x)$ 所包含的因式都是一次的（当然是互不相同的），此法确为有效。

不过，在其它的场合下，配合比较系数法而使用这种方法，也可以较方便地预先确定出几个系数，从而减少未知系数的个数。

例 2. 将分式

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)^3}$$

分解为部分分式。

解 这是既约真分式，可应用本节的定理来分解。

由于分式的分母含有因子 $(x-1)^2$，故部分分式中含有

$$\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1};$$

又由于分式的分母含有因子 $(x-2)^3$，故部分分式中含有

$$\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{(x-2)^2}+\frac{E}{x-2}。$$

于是根据定理，应设

$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x-2)^3}$$

$$=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{(x-2)^2}+\frac{E}{x-2}。$$

其中的 A、B、C、D、E 均为待定之常数。

将上式右端通分后，比较两端的分子，得恒等式

$$1=A(x-2)^3+B(x-1)(x-2)^3+C(x-1)^2$$
$$+D(x-1)^2(x-2)+E(x-1)^2(x-2)^2。$$

比较恒等式两端同次项的系数可得五个方程，解这方程组即可确定五个待定之常数。

如果采用下面的方法，则较便利些。

依次令 $x=1$，$x=2$，则得

$$A=-1,\quad C=1。$$

故上述恒等式可写成

$$1=-(x-2)^3+B(x-1)(x-2)^3+(x-1)^2$$
$$+D(x-1)^2(x-2)+E(x-1)^2(x-2)^2$$

(注意，现在未知数已减少两个，还剩三个)。

比较两端 x^4、x^3、x^2 的系数，得到含 B、D、E 的方程组

$$\begin{cases} B+E=0 \\ -1-7B+D-6E=0 \\ 7+18B-4D+13E=0, \end{cases}$$

解之，得 $B=-3$，$D=-2$，$E=3$。

所以