飞机外形计算的数学基础

国防工业出版社

飞机外形计算的数学基础

《飞机外形计算的数学基础》编写组　编

国防工业出版社

前　　言

文化大革命以来，在毛主席无产阶级革命路线指引下，我国的电子计算机和数控机床的数量日益增多，在各个生产技术部门中得到了广泛的应用。我国航空工业的各生产和科研单位，在飞机设计和制造中普遍采用了这些新设备和新技术，已经取得了可喜的成绩。

为了更进一步在飞机制造中推广数控技术和电子计算机的应用，争取早日实现“四个现代化”，国营云马机械厂、北京航空学院、南京航空学院、西北工业大学和中国科技大学联合编写了《电子计算机和数控技术在飞机制造中的应用》与《飞机外形计算的数学基础》两书，本书是其中之一，作为各航空院校有关专业的教学参考书，也可供飞机工厂的工人和技术人员阅读。

目前，我国不同的单位采用了多种不同的数学方法来作飞机外形计算，涉及的数学知识也比较宽广。本书无法包含上述全部内容。但是，只要掌握了本书所介绍的这些内容，再去学习其它的数学方法，也就不会有什么大的困难了。

本书作为一本教学参考书，编写时注意到了它的系统性。一般说来，前面讲过的知识在后面的章节中要经常用到，学习时要循序渐进。书中标有“*”的内容，课堂教学中与初次阅读时可以跳过，这不会影响对于后续内容的理解。在有些章节后，附有用ALGOL-60算法语言写出的一些算法的程序，供读者参考使用。

本书在编写过程中，曾将初稿分送有关厂、校审阅，还分别在学校和工厂进行了试用，征求意见。在最后定稿之前，有关厂、校的同志又在一起进行了认真的讨论。但是，由于水平有限，实践不多，书中必然存在不少缺点和错误，希望读者批评指正。

目　录

第一章　矩阵与线性代数方程组

线性代数方程组是解决科学技术、生产实践中数学问题所经常遇到的，某些数学问题的解决，往往归结为解线性代数方程组。例如在建立飞机外形的数学模型时，事先给出一组型值点，根据飞机外形的气动要求，要用曲线和曲面进行拟合，这时就需要解线性代数方程组。在电子计算机出现后，原来难以计算的高阶线性代数方程组的求解，可以很快地用计算机算出来，这又促进了这种线性代数方法的广泛应用和发展。

矩阵是解线性代数方程组的一个有力工具。而矩阵本身也是研究线性问题中的一个重要内容之一。它在工程技术和一些数学、物理分支中，也已经有了比较广泛的应用。

本章只能着重讨论一些比较简单而常用的线性代数方程组的解法，在讨论解法以前，我们介绍了有关矩阵和行列式的一些必要知识，这对我们深入讨论线性代数方程组的解法和学习本书其他章节都是有益的。

第一节　矩阵的概念

$m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）按照一定的方式排成 m 行 n 列，形如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的矩形格式的数表，称为矩阵。

例如 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，m 个方程的线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=d_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=d_m \end{cases} \tag{1-1}$$

左边各系数排成数表，可用矩阵表示，并以 **A** 记之

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$，其中 a_{ij} 称为矩阵 **A** 的元素，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$。通常称 **A** 为 m 行 n 列的矩阵，简称 $m\times n$ 阶矩阵。

行数 $m=1$ 的矩阵，称为行阵；列数 $n=1$ 的矩阵，称为列阵。前面线性方程组中未知量 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 和右端量 d_1，d_2，$\cdots$，d_m，就可以用两个列阵 **x** 和 **d** 分别表示，如

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$$

将矩阵 **A** 的行和列的位置互换而组成的另一个矩阵，称为矩阵 **A** 的转置矩阵，以 $\mathbf{A}^T$ 记之，如：

$$\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

由定义可知，**A** 与 $\mathbf{A}^T$ 互为转置矩阵，即：

$$(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$$

为了节省书写版面，上面的列阵 **x**、**d**，就可以写成行阵的转

置，即

$$\mathbf{x}=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]^T \qquad \mathbf{d}=[d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_m]^T$$

行数和列数相同的矩阵，称为方阵，阶数为正整数 n 的方阵，常称为 n 阶方阵。这里由 a_{11} 到 a_{nn} 联成的直线，称为方阵的主对角线。

方阵中，除位于主对角线上的元素而外，其他元素均为 0 时，称为对角方阵。

对角方阵中，各元素均为 1 时，称为单位方阵，以 $\mathbf{I}$（或 E）表示。即

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

方阵中，如果它的对称于主对角线的元素两两相等，即 $a_{ij}=a_{ji}$，则称为对称方阵。若 $a_{ij}=-a_{ji}$，则称为反对称方阵。显然，对称方阵具有性质

$$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$$

方阵中，主对角线以下全部元素为 0 时，称为上三角方阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

主对角线以上全部元素为 0 时，称为下三角方阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

第二节　矩阵的运算

从矩阵的定义知道，矩阵不是一个数，而是按照一定次序排列的数表，因此矩阵的运算就与数字的运算不同，只能在规定的法则之下进行。

一、矩阵的相等与加减法

设两个 $m\times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ 与 $\mathbf{B}=[b_{ij}]$，它们的对应元素相等时，即 $a_{ij}=b_{ij}$，$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$，则称两矩阵相等。记为

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}$$

由此可知，不同阶的矩阵没有相等的概念。

设矩阵 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$，$\mathbf{B}=[b_{ij}]$同阶，则这两个矩阵的相加或相减，是一个新矩阵 $\mathbf{C}$，$\mathbf{C}$ 的元素等于 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 对应元素相加或相减。即：

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\pm\mathbf{B}=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

同样地，不同阶的矩阵也是不能进行加、减的。

若一个 $m\times n$ 阶矩阵，它的元素全是 0，则称为零矩阵，以 $\boldsymbol{\theta}$ 记之。有时也简记为 0。

二、矩阵的数乘

所谓矩阵的数乘，就是用一个数 λ 去乘某矩阵的所有元素，使矩阵 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ 的各元素 a_{ij} 成为 λa_{ij}。数 λ 与矩阵 $\mathbf{A}$ 的数乘记为 $\lambda\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}\lambda$。即

$$\lambda\mathbf{A}=\mathbf{A}\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

根据以上定义，设 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$ 是同阶矩阵，λ，μ 是数，则有下面性质：

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
2. $\mathbf{A}-(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}-\mathbf{B})-\mathbf{C}$
3. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$
4. $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$
5. $\lambda(\mu\mathbf{A})=(\lambda\mu)\mathbf{A}$
6. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$

〔例 1〕：设矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 4\end{bmatrix}\qquad \mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

$$3\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 3\\ 9 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}^T=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\\ 2 & 4\end{bmatrix}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T$$

此时 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 是不能进行加减的。

三、矩阵的乘法

设一个 $m\times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 和一个 $n\times p$ 阶矩阵 $\mathbf{B}$。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

其中矩阵 **A** 的列数与矩阵 **B** 的行数 n 相等，这时才能定义矩阵的乘法。矩阵 **A**与 **B** 的积为 **C**，是一个新的$m\times p$ 阶矩阵，其形式如下

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=[C_{ij}]=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mp} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} i&=1,2,\cdots,m \\ j&=1,2,\cdots,p \end{aligned}$$

其中元素 C_{ij} 等于 **A** 的第 i 行各元素与 **B** 的第 j 列各对应元素两两乘积的和。即

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

常将矩阵乘法列成如下算式

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & & b_{np} \end{pmatrix}=\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} & \vdots & \\ & \vdots & \\ \cdots\cdots & C_{ij} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}=\mathbf{C}$$

可见 **C** 的行数等于**A** 的行数，**C** 的列数等于 **B** 的列数。

〔例 2〕：设 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

计算

$$C=AB$$

解：因为 A 是 2 × 3 阶矩阵，B 是 3 × 3 阶矩阵，A 的列数与 B 的行数相等，故可做乘法。

$$C=AB=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ 6 & -2 & 9\end{bmatrix}$$

得到的矩阵 C 是一个 2 × 3 阶矩阵。

由于矩阵 A 与矩阵 B 相乘时，要在矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时，才能做二者的乘积 AB，否则不能做乘积，因此，如果可做乘积 AB，却不一定能做乘积 BA。

例 2 中 C＝AB，但 BA 是不能做的。因为 B 的列数（3 列）和 A 的行数（2 行）不相等，所以不能做乘积 BA。

即使 A 与 B 能做乘积，B 与 A 也能做乘积，但 AB 也不一定等于 BA，通常总是 AB≠BA。因此，矩阵乘法次序不能随意颠倒，即矩阵乘法没有交换律。

〔例 3〕：设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -4 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

试求 AB 和 BA

解：

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -6\\ -10 & -4\end{bmatrix}$$

而

$$BA=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 9 & -1\end{bmatrix}$$

所以 $$AB\neq BA$$

除了矩阵乘法不具有交换律这一性质外，还有下面一些与数的乘法运算不同的性质。

1．若 $\mathbf{AB}=\theta$，不能断言 $\mathbf{A}=\theta$ 或 $\mathbf{B}=\theta$

〔例 4〕：设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

则 $\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

显然 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 都不是零矩阵。

2．由矩阵等式

$$\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$$

一般不能断言

$$\mathbf{B}=\mathbf{C}$$

〔例 5〕：设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

由于

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{AC}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以，$\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$，但显然 $\mathbf{B}\neq\mathbf{C}$。

除此以外，还可以证明下列性质。

3．$\lambda(\mathbf{AB})=(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}$ 其中 λ 是常数。

$$=\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$$

4．$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$

5．$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

6．$\mathbf{AI}=\mathbf{IA}=\mathbf{A}$，这里 $\mathbf{I}$ 是单位阵。由此可见，单位阵 $\mathbf{I}$ 在矩阵乘法中所起的作用，类似于数 1 在数的乘法中起的作用。

7．$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

即二矩阵乘积的转置矩阵，等于两矩阵分别转置以后的乘积，但次序必须加以转置。这是矩阵乘积的转置法则。

〔例 6〕：设

$$\mathbf{A}=[1,-1,2] \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=[9,2,-1]$$

而

$$(\mathbf{AB})^T=\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

所以

$$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

四、逆方阵

设 $\mathbf{A}$ 是一个 n 阶方阵，如果存在一个 n 阶方阵 $\mathbf{B}$，使得 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}$，则称方阵 $\mathbf{B}$ 为方阵 $\mathbf{A}$ 的逆方阵，常用 $\mathbf{A}^{-1}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的逆方阵。即

$$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$$

对于逆方阵，可以证明下列性质：

1．$(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$

2．$(\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T$

证：因为 $\qquad (\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T=(\mathbf{AA}^{-1})^T=\mathbf{I}$

同理 $\qquad \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T=\mathbf{I}$

所以$(\mathbf{A}^{-1})^T$ 是 $\mathbf{A}^T$ 的逆方阵。即

$$(\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T$$

3．若 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 为二同阶方阵，且皆有逆方阵 $\mathbf{A}^{-1}$、$\mathbf{B}^{-1}$，则有

$$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

证：因为

$$(AB)B^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=I$$

而 $$(B^{-1}A^{-1})AB=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}IB=I$$

所以 $$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

五、矩阵分块及其运算

有时为了简化计算，须将矩阵分块。即将一个矩阵分成 n 个低阶矩阵的组合。例如，可将矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

分块而得：

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

其中诸低阶矩阵

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}=[a_{31} \quad a_{32}] \qquad \mathbf{A}_{22}=[a_{33} \quad a_{34}]$$

称为原矩阵 $\mathbf{A}$ 的子矩阵。亦可将矩阵$\mathbf{A}$分成如下形式：

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

由此可见，同一矩阵分块的方式可有多种。分块时所用的沿竖直和水平分块虚线，都规定取贯穿全矩阵的直线。

〔例 7〕：设矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{I}_2$ 表示二阶单位方阵，$\mathbf{0}_2$ 表示二阶零方阵，$\mathbf{A}_1$ 表示二阶方阵。即

$$\mathbf{I}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{0}_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}&\mathbf{B}_{12}\\\mathbf{B}_{21}&\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{B}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}_{12}=\begin{bmatrix}3&2\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{21}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}_{22}=\begin{bmatrix}4&1\\2&0\end{bmatrix}$$

按分块作加法的正确性是很容易验证的。

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_2+\mathbf{B}_{11}&\mathbf{0}_2+\mathbf{B}_{12}\\\mathbf{A}_1+\mathbf{B}_{21}&\mathbf{I}_2+\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{cc:cc}2&0&3&2\\-1&3&0&1\\\hdashline 0&2&5&1\\0&0&2&1\end{array}\right)$$

由上面例子可以看到，在矩阵分块运算中，可将子矩阵当作一个元素对待，其结果与未分块一样。但矩阵在分块时，每个子矩阵阶数的多少，必须注意到矩阵运算规则。即加法运算的矩阵，在分块时，必须使相应的子矩阵具有相同的阶数；对乘法运算的矩阵，在分块时，必须注意相应的子矩阵相乘时所要求符合的乘法规则。

〔例 8〕：分块矩阵的乘法的计算。设矩阵

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc:c}1&1&1\\2&-1&1\\\hdashline 1&2&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 6 & 3\\ \hdashline 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}\\ \mathbf{B}_{21}\end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}\\ \mathbf{B}_{21}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}\\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{11}\\ \mathbf{C}_{21}\end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{C}_{11}=\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 6 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}[2\ \ 1]=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{21}=\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}=[1\ \ 2]\begin{bmatrix}4 & 2\\ 6 & 3\end{bmatrix}+2[2\ \ 1]=[20\ \ 10]$$

所以

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 4 & 2\\ \hdashline 20 & 10\end{bmatrix}$$

这与直接求 **AB** 的结果是一致的。读者可自行验算。

一般地说，对于一个矩阵 **A**，用一些夹在相邻两行中的横线以及一些夹在两列中的竖线把 **A** 分成许多个子矩阵，设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1s}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2s}\\ \hdashline \mathbf{A}_{r1} & \mathbf{A}_{r2} & \cdots & \mathbf{A}_{rs}\end{bmatrix}$$

又设 **B** 是与**A**同阶的矩阵，将 **B** 和 **A** 作同样方式的分块，如

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{B}_{1s}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{B}_{2s}\\ \hdashline \mathbf{B}_{r1} & \mathbf{B}_{r2} & \cdots & \mathbf{B}_{rs}\end{bmatrix}$$