Probability and Statistics

概率统计

（第三版）

耿素云　张立昂　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

概 率 统 计

（第三版）

耿素云　张立昂　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率统计/耿素云,张立昂编著. —3 版. —北京：北京大学出版社，2016.8

ISBN 978-7-301-27419-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①耿…②张… Ⅲ. ①概率统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 190139 号

书　　名	概率统计（第三版） GAILÜ TONGJI
著作责任者	耿素云　张立昂　编著
责任编辑	曾琬婷
标准书号	ISBN 978-7-301-27419-4
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62765014
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	890 毫米×1240 毫米　A5　10.625 印张　302 千字 1987 年 10 月第 1 版　1998 年 12 月第 2 版 2016 年 8 月第 3 版　2016 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	34.00 元

内容简介

本书介绍概率论与数理统计的基本概念、理论、方法和应用，共分十章，它们是随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析.

阅读本书只需要具备高等数学的知识. 本书侧重概念、理论和方法的应用，有大量的例子，特别是一些具有实际背景的例子，能帮助理解和提高阅读兴趣. 本书每章都配有相当数量的习题，书末附有习题答案与提示.

本书适合作为高等院校理工科非数学类专业本科生“概率论与数理统计”课程的教材，也可以作为学习这门课程的自学教材和科技人员的参考书.

第三版前言

这次修订是根据笔者多年来以本书为教材在北京大学信息科学技术学院讲授“概率论与数理统计”课程所积累的经验与素材进行的，并考虑了大多数高等院校的教学需要. 第三版教材基本保持第二版教材的内容和风格不变，除了更正发现的错误外，主要修改内容如下：

(1) 添加了不少有实际背景的例子，如孟德尔遗传模型、蒙特卡罗方法、随机数的生成、敏感问题调查的随机回答法等.

(2) 改写了第一章和第五章的部分内容，删去了第一章中概率的公理化定义，在第五章中增加了随机变量序列的极限. 掌握随机变量序列极限的概念有利于更好地理解大数定律和中心极限定理.

(3) 删去了几个关于统计量的定理的证明. 这几个证明都比较复杂，要使用较高的线性代数证明技巧，对于以应用为主要目的的学习者不是必要的.

(4) 增添了不少习题.

本书是作为高等院校理工科非数学专业本科生“概率论与数理统计”课程的教材编写的，阅读本书只需要具备高等数学的知识. 本书每章都配有相当数量的习题，书末附有习题答案与提示.

作　者

2015 年于燕园

第二版前言

这次再版除进行必要的文字修改和勘误之外，在内容上主要做了下述变动：

1. 删去“特征函数”一章. 这部分内容超出使用本书的多数读者的需要.

2. 按照中华人民共和国国家标准，对正态分布、χ^2 分布、t 分布和 F 分布统一使用(下侧)分位数表(附表 2～5). 在本书第一版和其他一些书中，对正态分布和 t 分布使用双侧分位数表，对 χ^2 分布和 F 分布使用上侧分位数表，请读者注意两者的区别.

阅读本书只需要具备高等数学和线性代数的知识. 本书是北京市高等教育自学考试计算机软件专业“概率论与数据统计”的教材，也完全适合作为普通高校非数学专业(特别是理工科专业)的本科教材和参考书.

在编写本书和这次修订过程中，我们参考了许多有关教材和著作，并且从中摘取了一些例题和习题，书中没有一一注明，在此一并向有关作者致谢!

由于作者的水平所限，不妥与谬误难免，恳请读者批评指正.

作　者

1996 年夏于燕北园

目　　录

第一章　随机事件与概率

§1　随机事件的直观定义及其运算

一、必然现象与随机现象

在自然界里，在生产实践和科学试验中，人们所观察到的现象大体上可分为两类. 有一类现象，在一定的条件下必然发生（或必然不发生）. 例如，上抛的石子必然下落；在一定条件下，氢和氧化合成水；人总是要死的；太阳从东方升起；等等. 我们将上述诸现象称为**确定性现象**或**必然现象**. 微积分、线性代数等就是研究必然现象的数学工具. 与此同时，人们还发现具有不同性质的另一类现象. 例如，在相同的条件下，抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面（我们常常把有币值的一面称作正面，而另一面称作背面）朝上，也可能是正面朝下；一个射手向同一个目标连射几发子弹，各次弹着点的位置不尽相同，并且每颗子弹弹着点的准确位置都是无法事先预测的. 这一类现象我们称之为**偶然性现象**或**随机现象**. 起初，人们把这种现象称为“不正常”“出乎意料”“原因不明”的现象，并且认为这些现象是无规律的现象. 人们长时期的观察和实践的结果表明，这些现象并非是杂乱无章的，而是有规律可循的. 例如，大量重复抛一枚质地均匀的硬币，得正面朝上的次数与正面朝下的次数大致都是抛掷总次数的一半；同一射手射击同一目标，弹着点按着一定的规律分布；等等. 这种在大量地重复试验或观察中所呈现出的固有的规律性，就是我们以后所说的统计规律性. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

二、随机试验与随机事件

我们将对自然现象的观察或科学试验统称为**试验**. 如果试验可以在相同条件下重复进行,并且每次试验的结果是事先不可预言的,则称这样的试验为**随机试验**. 以下我们所说的试验均指随机试验.

进行一次试验总有一个需要观察的目的,根据这个目的,试验可能被观察到各种不同的结果. 例如,抛一枚硬币,我们的目的是观察哪面朝上,这里当然只有两种可能的结果:正面朝上或背面朝上. 至于硬币落在桌面的哪个位置以及朝哪个方向滚动等,都不在我们的目的之列,不将它们算作结果.

在随机试验中,可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**,简称**事件**. 常常用字母 $A,B,C,\cdots$表示事件.

例 1.1 抛一枚质地均匀的硬币,可有两种不同的结果:"正面朝上"和"背面朝上". 这两种结果都是随机事件,可用 A 和 B 分别表示它们,写成:$A=$"正面朝上";$B=$"背面朝上".

例 1.2 袋中装有 10 个大小相同的小球,编号分别为 $0,1,2,\cdots,9$. 每次从袋中取出一球,看过编号后再放回袋中. 取出一球,它的编号有 10 种可能的结果:"编号为 0""编号为 1"……"编号为 9". 这 10 种结果的每一种都是随机事件,我们可用 $A_i=$"编号为 i"$(i=0,1,\cdots,9)$表示它们. 除了以上 10 个事件外,还可以考虑另外的事件. 例如,$B=$"编号为奇数",$C=$"编号为偶数",$D=$"编号$\leqslant 4$"都是随机事件. 但事件 $A_i(i=0,1,\cdots,9)$与事件 B,C,D 是有所不同的. A_0 到 A_9 这 10 个事件中,每个事件只含一种试验结果,而在事件 B 和 C 中,各含 5 种试验结果. 我们称只包含一种试验结果的事件为**基本事件**,由两个或两个以上基本事件复合而成的事件为**复合事件**.

例 1.3 连续投掷两颗质地均匀的骰子,观察每颗骰子朝上的一面的点数,这是一个随机试验. 事件"第一颗骰子出现 i 点,第二颗骰子出现 j 点"$(1\leqslant i\leqslant 6,1\leqslant j\leqslant 6)$是基本事件. 本例中共有 36 个基本事件. "每一颗骰子出现偶数点""第二颗骰子出现奇数点""两颗骰子出现的点数之和为 10"等事件均为复合事件.

三、事件的集合表示,样本空间

为了研究事件之间的关系及运算,用集合表示事件是方便的,又是相当直观的.为此,先给出样本点的概念:称随机试验中每一种可能的结果为一个**样本点**,用 ω 表示.由全体样本点组成的集合称作**样本空间**或**基本空间**,用 Ω 表示.Ω 的子集就是**随机事件**,只含一个样本点的随机事件就是**基本事件**.注意,每一次试验的结果只能是一个样本点,而不能有两个或两个以上样本点同时出现.

在例 1.1 中,样本点有两个:正面朝上,背面朝上;基本事件也为两个:{正面朝上},{背面朝上};样本空间为{正面朝上,背面朝上}.若用 ω_0 与 ω_1 分别表示"正面朝上"和"背面朝上",则基本事件为 $\{\omega_0\}$ 和 $\{\omega_1\}$,样本空间为 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1\}$.

在例 1.2 中,样本点为 0 号,1 号,2 号,…,9 号;基本事件为{0 号},{1 号},{2 号},…,{9 号};样本空间为 $\Omega=$ {0 号,1 号,2 号,…,9 号}.随机事件"编号为奇数"={1 号,3 号,…,9 号},"编号为偶数"={0 号,2 号,…,8 号}.

在例 1.3 中,样本点为 $(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(1,6),\cdots,(6,6)$,共 36 个;基本事件也有 36 个,即 $\{(1,1)\},\{(1,2)\},\{(1,3)\},\cdots,\{(1,6)\},\cdots,\{(6,6)\}$;样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(6,6)\}$.随机事件"两颗骰子出现的点数之和为 10"$=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$.

对于随机事件 A,如果试验出现的结果 $\omega\in A$,则称事件 A **发生**;否则,称事件 A **未发生**.例如,在例 1.2 中,若取到 4 号球,则事件"编号为偶数"发生,而"编号大于 5"未发生.

例 1.4 一个圆盘可以绕它的中心轴旋转,在圆盘的边缘刻有 0~360 度.置一固定的指针指向圆盘的边缘.任意地转动圆盘,当它停止转动后,观察指针所指的刻度.这是一个随机试验,其中

样本点:$x,0\leqslant x<360$;

基本事件:$\{x\},0\leqslant x<360$;

基本空间:$\Omega=\{x\mid 0\leqslant x<360\}$.

设随机事件 $A=\{x\mid 90\leqslant x\leqslant 120\}$,那么当圆盘停止转动后,若指针指向 100 度,则事件 A 发生;若指针指向 250 度,则事件 A 未

发生.

将随机事件表示成由样本点组成的集合,就可以将事件之间的关系及运算归结为集合之间的关系和运算.这不仅对研究事件的关系和运算是方便的,而且对研究随机发生的可能性大小的数量指标——概率的运算也是非常有益的.

四、事件之间的关系及运算

1. 必然事件与不可能事件

称不可能发生的事件为**不可能事件**,必然发生的事件为**必然事件**.作为样本空间的子集,不可能事件不能包含任何样本点.不含任何元素的集合为空集$\varnothing$.因此,不可能事件是空集,也记作$\varnothing$.当且仅当表示事件的集合包含所有样本点时,试验结果一定落入这个集合,从而事件一定发生.因此,必然事件就是整个样本空间,仍用Ω表示.

在例1.1中,"正面朝上且背面也朝上"为不可能事件$\varnothing$."正面朝上或背面朝上"为必然事件Ω.在例1.2中,"编号$\geqslant 10$"为不可能事件$\varnothing$,"编号$\geqslant 0$"为必然事件Ω.

2. 子事件(事件的包含关系)

如果事件A发生必然导致事件B发生,则称事件A是事件B的**子事件**,或称事件B**包含**事件A,记作$A\subseteq B$.如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$,即A与B同时发生或同时不发生,则称事件A与事件B**相等**,用$A=B$表示.

如果将事件用集合表示,则"A是B的子事件"即为"A是B的子集"(集合B包含集合A),因而可用图表示事件之间的包含关系,如图1.1(a)所示.这样的图叫作**文氏图**.

在例1.2中,设$A=$"编号为1或3",$B=$"编号为奇数",则A是B的子事件.事实上,$A=\{1号,3号\}$,$B=\{1号,3号,5号,7号,9号\}$,所以$A\subseteq B$.

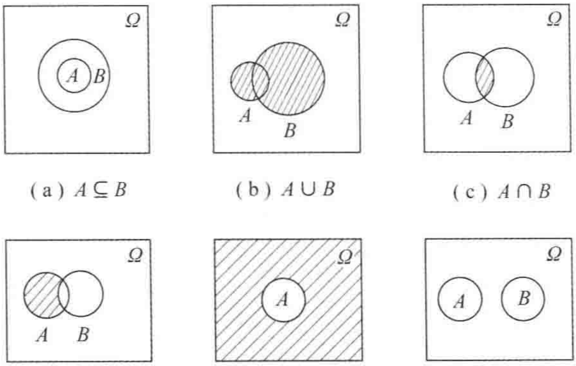
设A,B,C为任意三个事件,事件之间的包含关系有下列性质:

(1) $\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$;

(2) $A\subseteq A$(自反性);

(3) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$(传递性);

(4) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$(反对称性).



(a) $A\subseteq B$　(b) $A\cup B$　(c) $A\cap B$

(d) $A-B$　(e) $\overline{A}$　(f) A,B 不相容

图 1.1

3. 和事件

设事件 C 表示"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生",则称 C 为事件 A 与事件 B 的**和事件**,记作 $C=A\cup B$.

如果将事件用集合表示,则事件 A 与事件 B 的和事件 C 即为集合 A 与集合 B 的并,如图 1.1(b)所示.

在例 1.2 中,$A_1=$"编号为 1",$A_2=$"编号为 2",则

$$A_1\cup A_2=\text{"编号为 1 或 2"}.$$

两个事件的和事件可以推广到有限个或可数个事件的情形. 用 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生";用 $A_1\cup A_2\cup\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件"$A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生".

4. 积事件

设事件 D 表示"事件 A 与事件 B 同时发生",则称 D 为事件 A 与事件 B 的**积事件**,记作 $D=A\cap B$ 或 $D=AB$.

如果将事件用集合表示,则事件 A 与事件 B 的积事件 D 即为

集合 A 与集合 B 的交,如图 1.1(c)所示.

在例 1.2 中,“编号为 1 或 2 或 3”与“编号为偶数”的积事件为“编号为 2”.

也可以将两个事件的积事件推广到有限个或可数个事件的情形.用 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示事件“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”;用 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示事件“$A_1, A_2, \cdots$ 同时发生”.

5. 差事件

设事件 E 表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”,则称 E 为事件 A 与事件 B 的**差事件**,记作 $E=A-B$.

差事件 $A-B$ 可用图 1.1(d)所示的集合关系来形象表示.

由差事件的定义可知,对于任意的事件 A,有

$$A-A=\varnothing, \quad A-\varnothing=A, \quad A-\Omega=\varnothing.$$

6. 互不相容

如果两事件 A 与 B 不能同时发生,则称 A 与 B 是**互不相容**的,或称为**互斥**的.

显然,事件 A 与 B 互不相容当且仅当 A 与 B 的积事件是不可能事件,即 $A \cap B=\varnothing$.

若用集合表示事件,则“A 与 B 是互不相容的”即为“A 与 B 是不相交的”,如图 1.1(f)所示.

在例 1.2 中,“编号为偶数”与“编号为奇数”,“编号为 1,2,3”与“编号大于 5”都是互不相容的,而“编号为 1,2,3”与“编号为偶数”不是互不相容的.

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个都是互不相容的,则称它们是**两两互不相容**的.

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 不能同时发生,即 $A_1 A_2 \cdots A_n=\varnothing$,则称它们是**互不相容**的.

例如,基本事件 $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \cdots, \{\omega_n\}$ 是两两互不相容的,也是互不相容的.