MPA 联考高分突破

数学分册

胡显佑 褚永增 编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

MPA 联考高分突破.数学分册/胡显佑,褚永增编著.2 版.
北京:中国人民大学出版社,2002

ISBN 7-300-04114-0/G·858

Ⅰ.M…
Ⅱ.①胡… ②褚…
Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 032791 号

MPA 联考高分突破

数学分册

胡显佑　褚永增　编著

出版发行:中国人民大学出版社
(北京中关村大街 31 号　邮编 100080)
发行部:62514146　门市部:62511369
总编室:62511242　出版部:62511239
E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销:新华书店
印　　刷:北京密兴印刷厂

开本:890×1240 毫米 1/32　印张:10
2000 年 12 月第 1 版
2002 年 5 月第 2 版　2002 年 5 月第 1 次印刷
字数:280 000

定价:19.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

MPA 联考系列图书
编写说明

2002 年 10 月进行的“公共管理硕士（MPA）专业学位联考”的考试科目发生了很大的变化，其中，“英语”不再单独命题，而是参加由国务院学位委员会办公室组织的“在职攻读硕士学位全国联考英语考试”。“数学与逻辑”改为“综合知识”，并增加了语文部分的内容。“管理学”和“行政学”科目不变，但是对考试内容进行了调整。为配合考试科目的改革，帮助广大考生尽快适应新的考试要求和掌握新的考试内容，帮助考生全面、系统、有针对性地复习各门课程，我们特邀请有关的联考院校的辅导名师编写了这套丛书。丛书包括：《MPA 联考高分突破数学分册》、《MPA 联考高分突破逻辑分册》、《MPA 联考高分突破语文分册》、《MPA 联考高分突破管理学分册》、《MPA 联考高分突破行政学分册》、《MPA 联考标准化模拟试卷·综合知识》、《MPA 联考标准化模拟试卷·管理学》、《MPA 联考标准化模拟试卷·行政学》、《MPA 联考院校考前模拟试卷集》、《中国 MPA》等。

该系列的特点：

是大纲的继续和延伸 本系列图书是国务院学位委员会办公室、教育部研究生工作办公室、人事部公务员管理司组织编写，中国人民大学出版社出版的《公共管理硕士（MPA）专业学位联考考试大纲及考试指南》系列图书在内容上的继续和延伸。凡是《公共管理硕士（MPA）专业学位联考考试大纲及考试指南》已经详细论述的知识点，本系列图书不再赘述，以节约广大考生的时间、精力和财力。其主要定位于对考试重点的精解精练以及对难点的突破。

名师主笔 本系列图书的编写者，是多年从事硕士研究生教

学、命题研究和考试辅导的专家、学者。他们熟悉专业学位的命题和考试，大纲和教材，考生需要和考试辅导，深谙命题的原则、思路和最新考试动态，经过精心研究，认真组织，编写出了这套高水平的辅导书。

内容权威 本系列图书紧扣考试大纲，结合多年命题研究经验编写而成，具有很强的权威性、实战性和针对性。

体系新颖 本系列图书体例设计一改过去辅导书仅仅讲授知识点的方式，将大纲要求、逻辑结构、考试要点、强化训练等巧妙地结合在一起，大大方便了考生复习之用。整个系列，体系新颖，知识脉络分明，条理清楚，重点内容突出，便于考生全面复习，重点把握。

知识全面 本系列图书在编写过程中，特别注意了不同分册之间的协调和衔接。既注重知识的全面系统，又注重知识在考试中的应用。注重册册完美，章章优秀，力求不多、不重、不漏。

专项突破 本系列图书在内容全面的基础上突出重点，力求将各专项的重点、难点和考点讲清、讲透，便于考生在薄弱环节下功夫。

同步训练 本系列图书结合知识点讲解，设计了大量的同步训练题，考生可以边学边练，巩固复习成果。

解题详尽 本系列图书根据在职考生的复习实际和阅读习惯，对所有练习题都进行了详尽的解析，便于考生自学。

标准化模拟试卷模拟考场 针对在职考生对目前的考试形式、考场要求、考场氛围和考试节奏等不甚了解的状况，编者根据大纲要求，精心编制了模拟试题，题型、题量和试卷结构与真题完全一致，并给出答案和解析。这一方面便于考生定期检查，巩固复习成果，另一方面可满足考生感受真实考场、熟悉考试氛围的需要。标准化模拟试卷是广大考生真实考试的演练场，考生在使用该资料时应根据考场要求，认真备考，真实感受考场氛围，临战不慌，取得高分。

超值服务 凡购买图书者，经填写购买本系列图书的“购书服务卡（复印无效)”，并即时寄出，将会在考前获得《考前自测试卷

及答案》一套，全套购书者，获赠考前串讲光盘一套。该资料属“内部资料”，不公开发行。我们还将通过www. easyky. com对读者进行指导。

配套资料丰富 为配合英语考试改革，我们还出版了“在职攻读硕士学位全国联考英语考试系列”辅导书，共10册：《高分指导》、《写译专项突破》、《语法、词汇、完型填空专项突破》、《阅读200篇》、《听力专项突破》、《词汇随身听》、《语法、词汇、完型填空1000题训练》、《阅读1000题训练》、《写译100段训练》、《模拟考场》。

我们相信，广大考生在认真学习本系列图书的基础上，一定能够提高专业水平和应试能力。

前　言

公共管理硕士(MPA)自2001年实行全国统一联考.数学作为联考的必考科目之一,要求考生系统地掌握微积分和概率统计的基础知识,要求考生具有一定的抽象概括能力、逻辑推理能力、空间想像能力、基本运算能力和综合运用能力.这对于工作多年、尤其是工作中不系统运用数学的考生来说确实是一个相当高的要求.

为了帮助有志攻读MPA的考生顺利通过数学联考,我们建议,考生在复习数学时应有计划地分为三个阶段:在第一阶段,应根据联考数学考试大纲和考试指南,系统地复习有关概念、定理和公式.每复习一单元的内容,必须完成必要的基本练习,达到基本掌握考试内容的目的.在第二阶段,则应在第一阶段的基础上,总结问题,将考试重点和题型进行归纳,通过适量的综合练习达到融会贯通的目的.在第三阶段,则进行适量的考前模拟测验,检查自己复习的效果,补救复习中的漏洞.

本书是为第二阶段的复习编写的.根据考试大纲的要求,本书将各章节的重点题型加以归纳总结.各类题型均有适量的典型例题,并做了详细解答.书中还对各类解题方法做了小结,并在各章都附有自测练习.例题和自测练习既注重循序渐进,又强调数学概念、定理和方法的综合运用.这将使考生的应试能力有较大的提高.

本书第1版出版后,得到了广大考生的欢迎,成为许多辅导班的必备教材.根据新颁布的MPA联考数学考试大纲,本书进行了较大的修改:

1. 增加了例题的数量和类型;增加了各节自测练习题.

2. 书后的附录系统地总结了与考试内容有关的初等数学基础知识,可随手查阅常用的概念和公式.考虑到许多考生在较长时间内没有系统地运用数学.在这部分仍附有少量例题和练习题.

我们希望本书修订后，将更便于广大考生使用，书中不足之处请广大考生赐教.

本书在编写过程中，得到了中国人民大学出版社马胜利同志和相关部门的大力支持，在此我们表示衷心的感谢.

编者

2002 年 4 月

目　录

第一章　函数、极限与函数的连续性

第一节　函　　数

[考点归纳]

1. 函数的概念、函数的定义域和值域.
2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 反函数.
4. 复合函数.
5. 基本初等函数的性质和图形.

[考点突破]

命题趋势

函数是微积分学的研究对象，有关函数性质的讨论将贯穿整个微积分学，在本节中，有关的重点题型为：求函数的定义域；求反函数；求复合函数；判断函数的奇偶性.

难点剖析

1. 分段函数. 分段函数的定义域是各段定义域的并集；其反函数、复合函数应分段求出.

2. 函数的有界性与单调性. 函数的这两个性质可应用导数进行讨论，我们将在第三章讨论这一问题. 一些简单的初等函数的有界性、单调性可根据基本初等函数的性质直接判定.

3. 函数的周期性. 有关三角函数周期的讨论请参阅附录.

[典型例题]

题型1：求函数的定义域

基本初等函数的定义域可直接得出；分段函数的定义域为各段

定义域的并集;复合函数的定义域,则应根据基本初等函数的定义域,得到一个不等式组,解不等式组可得复合函数的定义域.

例 1(填空题)　函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$ 的定义域为________.

解　由已知函数,自变量 x 应满足

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\ x+2>0\\ x+2\neq 1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\ x>-2\\ x\neq -1\end{cases}$$

在数轴上表示(图 1—1)

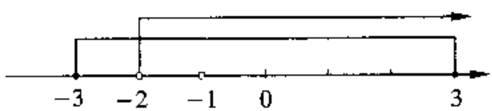

图 1—1

由此可得,定义域

$$D(f)=(-2,-1)\cup(-1,3]$$

例 2(填空题)　设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$,则 $f(\ln x)$ 的定义域为________.

解　由例 1. $f(x)$ 的定义域为

$$D(f)=(-2,-1)\cup(-1,3]$$

所以,对于 $f(\ln x)$,有

$$-2<\ln x<-1 \text{ 或 } -1<\ln x\leqslant 3$$

即　$e^{-2}<x<e^{-1}$ 或 $e^{-1}<x\leqslant e^3$

于是 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(e^{-2},e^{-1})\cup(e^{-1},e^3]$.

例 3(选择题)　下列各选项中,两个函数相同的是(　　).

(A) $f(x)=\cos x, g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$

(B) $f(x)=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}, g(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

(C) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}, g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

(D) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$

解 (A) $f(x)$和 $g(x)$的定义域均为$(-\infty,+\infty)$,但是

$$g(x)=|\cos x|$$

即 $f(x)$与 $g(x)$的对应规则不同. $f(x)$与 $g(x)$是不同的函数.

(B) 两函数有相同的定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,当 $x\neq0$ 时, $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$,故 $f(x)$与 $g(x)$是相同的两个函数.

故本题应选(B).

小结 1. 两个函数 $f(x),g(x)$的定义域相同,且对应规律相同时,两个函数相同.

2. 如果已知函数 $y=f(x)$的解析表达式,求其定义域. 应考虑:

(1)分母不能是零;(2)偶次根式下,被开方数非负;

(3)对数函数中底数大于 0,且不等于 1,而真数应大于 0.

(4)在反正弦、反余弦函数 $\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 中,$|x|\leqslant1$.

根据这些要求,列出不等式组,即可求出定义域.

例 4(填空题) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}-4x^2, & -3\leqslant x<0\\ x, & 0<x\leqslant4\\ \dfrac{x^2}{4}, & x>4\end{cases}$$

则函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域为______.

解 函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域就是函数 $y=f(x)$的值域,故只需求 $f(x)$的值域.

对于 $y=f(x)$,

当 $-3\leqslant x<0$ 时,有 $-36\leqslant f(x)<0$;

当 $0<x\leqslant4$ 时,有 $0<f(x)\leqslant4$;

当 $x>4$ 时,有 $f(x)>4$.

由此得 $f(x)$的值域为$[-36,0)\cup(0,+\infty)$,即 $f^{-1}(x)$的定义

域为$[-36,0)\cup(0,+\infty)$

小结 求函数的定义域的方法.

(1) 根据基本初等函数的定义域,列出不等式组,求出其解集,一般,用区间表示. 如例 1.

(2) 对于分段函数,其定义域是各段定义域的并集,如例 4.

(3) 对于复合函数 $f(g(x))$的定义域,应先求出 $f(x)$的定义域,再列出关于 $g(x)$的不等式,此不等式的解集就是 $f(g(x))$的定义域,如例 2.

题型 2:求反函数

求函数 $y=f(x)$的反函数,只需解出 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上,需将 x 换为 y,y 换成 x,即得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 5(填空题) 函数 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$的反函数为________.

解 由已知函数,得

$$e^x y+y=e^x$$

$$e^x=\frac{y}{1-y}$$

即, $$x=\ln\frac{y}{1-y}$$

所以 $f(x)$的反函数 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$.

例 6 求函数

$$y=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 0\\ -\sqrt{4-x^2}, & 0<x<2\\ \ln x-\ln 2, & x\geqslant 2\end{cases}$$

的反函数.

解 由 $x\leqslant 0$,$y=x-2$,得

$$x=y+2,y\leqslant -2$$

由 $0<x<2$ 和 $y=-\sqrt{4-x^2}$,得

$$x=\sqrt{4-y^2},-2<y<0$$

由 $x\geqslant 2$ 和 $y=\ln x-\ln 2$,得

$$x=2e^y,y\geqslant 0$$

即

$$x=\begin{cases}y+2, & y\leqslant -2\\ \sqrt{4-y^2}, & -2<y<0\\ 2e^y, & y\geqslant 0\end{cases}$$

故所求反函数

$$y=\begin{cases}x+2, & x\leqslant -2\\ \sqrt{4-x^2}, & -2<x<0\\ 2e^x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

注意　分段函数的反函数应分段求出，再合写在一起.

例 7　求函数 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ 的值域.

解　函数的值域为其反函数的定义域，由已知函数，有

$$y=\frac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}$$

可得其反函数为

$$y=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$$

解不等式 $\dfrac{1+x}{1-x}>0$，得 $-1<x<1$. 即函数 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ 的值域为 $-1<y<1$.

题型 3：求复合函数的表达式

若已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析表达式，求 $f(g(x))$ 的表达式，只需用 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 中的 x.

若已知 $f(g(x))$ 的解析表达式，求 $f(x)$ 的表达式，可令 $t=g(x)$，并将 $f(g(x))$ 化为 t 的一个式子.

例 8（填空题）　已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f'(x)=$________.

解　要求 $f'(x)$，需由已知条件先求出 $f(x)$，

令　　$t=x+\dfrac{1}{x}$，则 $t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$. 即

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

所以

$$f(t)=t^2-2$$

即 $$f(x)=x^2-2.$$ 由此易得

$$f'(x)=2x$$

例 9 已知 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

求 $f(x+1)$.

解 $f(x+1)=\begin{cases}(x+1)-1, & x+1<0\\ (x+1)^2, & x+1\geqslant 0\end{cases}$

即 $f(x+1)=\begin{cases}x, & x<-1\\ (x+1)^2, & x\geqslant -1\end{cases}$

例 10 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\qquad g(x)=\mathrm{e}^x$$

求 $f(g(x))$和 $g(f(x))$.

解 将 $f(x)$中的 x 代入 $g(x)$,得

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |\mathrm{e}^x|<1\\ 0, & |\mathrm{e}^x|=1\\ -1, & |\mathrm{e}^x|>1\end{cases}$$

即

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

类似可得

$$g(f(x))=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1\end{cases}$$

例 11 设函数 $f(x)$满足 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{x+1}$,则 $f(x)=$ ________.

解 $f(x)$与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$变量之间互为倒数,于是用$\dfrac{1}{x}$代替 x,有等式

$\frac{1}{x^2}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x}$，与原方程联立，可解得 $f(x)=\frac{2x-x^2}{3(x+1)}$

题型 4：判断函数的奇偶性、有界性和单调性

讨论函数 $y=f(x)$的奇偶性时，必须注意函数定义域的对称性. 例如，定义在$[0,+\infty)$上的函数 $y=x^2$ 就不是偶函数.

判断函数 $y=f(x)$是否为奇函数或偶函数的基本方法是利用函数奇偶性的定义.

例 12 设 $F(x)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$，$f(x)$为奇函数，判断 $F(x)$的奇偶性.

解 设 $g(x)=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned} g(-x)&=\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\\ &=\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{2}\\ &=\frac{2^x+1-1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\\ &=-g(x) \end{aligned}$$

即 $g(x)$为奇函数，又 $f(x)$为奇函数，故 $F(x)$为偶函数.

例 13（选择题） 函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$是[ ].

(A) 奇函数，但非偶函数

(B) 偶函数，但非奇函数

(C) 既是奇函数，也是偶函数

(D) 非奇、非偶函数

解法 1 因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-f(x)$$

故 $f(x)$为奇函数. 而 $f(x)$与 $f^{-1}(x)$的曲线关于 $y=x$ 成轴对称，因此 $f^{-1}(x)$必为奇函数. 本题应选(A).

解法 2 由 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 可得

$$e^{2x}-2ye^{x}-1=0$$

所以 $$e^{x}=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2-4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

由于 $e^x>0$,由上式舍去负号项,有

$$e^{x}=y+\sqrt{y^2+1}$$

所以 $$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

反函数 $f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

由于
$$\begin{aligned} f^{-1}(-x)&=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\ &=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})\\ &=-f^{-1}(x)\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(x)$为奇函数.

故本题应选(A).

例 14(选择题) 设 $f(x)=e^{\cos x}$,$g(x)=e^{-\sin x}$,则在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内[ ].

(A) $f(x)$是单调增函数,$g(x)$是单调减函数

(B) $f(x)$是单调减函数,$g(x)$是单调增函数

(C) $f(x)$,$g(x)$都是单调增函数

(D) $f(x)$,$g(x)$都是单调减函数

解 基本初等函数 $y=e^x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内为单调增函数,而 $y=\cos x$,$y=-\sin x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内均为单调减函数,所以 $f(x)$,$g(x)$都是单调减函数.

故本题应选(D).

例 15(选择题) 设定义在$(-\infty,+\infty)$的偶函数 $f(x)$存在导函数,下列函数可能既非奇函数也非偶函数的是[ ].

(A) $f'(x)$ (B) $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$

(C) $-f(2x)$ (D) $f(x)x^3$