高等学校试用教材

工 程 数 学

线性代数

（第二版）

上海交通大学线性代数编写组编

高等教育出版社

本书第二版是由上海交通大学线性代数编写组的同志，参照1980年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《工程数学教学大纲》有关线性代数部分教学大纲修订而成的。本书修订稿仍由栾汝书教授任主审，经工科数学教材编审委员会于1981年5月召开的工作会议上审阅了全稿，并定为高等学校试用教材出版。

本书第二版作了较大的修改和补充，内容比较适当，层次也较清楚，超过大纲部分用小号字排印，因而课时掌握上有一定的伸缩性。全书内容为行列式及其性质、向量空间、线性变换与矩阵、矩阵的秩和线性方程组、内积与正交变换、二次型等，书末还附有习题答案，便于教学，可作为高等工业院校教材，也可作为工程技术人员自学用书。

责任编辑　丁鹤龄

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复“高等教育出版社”;本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校试用教材

工程数学——线性代数

（第二版）

上海交通大学线性代数编写组编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 5.5　字数 128,000

1978年10月第1版

1982年9月第2版　　1983年7月第8次印刷

印数　607,001—636,000

书号 13010 0207　　定价 0.52元

目　录

第一章 行列式及其性质

在线性代数和后继课程里，以及工程技术上有很多问题都需要用到“行列式”这个数学工具. 本章在复习二阶、三阶行列式的基础上把行列式的概念推广到高阶行列式中去.

§1. 二阶与三阶行列式

在高中数学中，已由解线性方程组问题引出了二阶与三阶行列式. 它们的展开式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{2}$$

其中元素a_{ij}的两个下标 i 与 j 分别表示a_{ij}所在的行与列的序数.

利用二阶与三阶行列式，可以把二元与三元线性方程组的解表达为简洁的形式.

设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{3}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{又设 } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

其中 D_1 与 D_2 分别是在 D 中把第一列与第二列元素换成(3)式中

的常数项得到的．则当 $D\neq 0$ 时，方程组(3)有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D},\qquad y=\frac{D_2}{D}. \tag{4}$$

同样，设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \tag{5}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \text{又设 } D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中 D_1, D_2, D_3 分别是在 D 中把第一列，第二列，第三列元素换成(5)式中的常数项得到的，则当 $D\neq 0$ 时，方程组(5)有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D},\qquad y=\frac{D_2}{D},\qquad z=\frac{D_3}{D} \tag{6}$$

这就是解二元与三元方程组(3)与(5)的克莱姆(Cramer)法则．

如果把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的行列互换而不改变各行、各列的顺序，得到的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

叫做行列式 D 的转置行列式．

利用三阶行列式的展开式，容易得出下面八个性质.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 交换行列式的任意两行或两列，行列式仅改变符号.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

性质 3 把一个行列式的某行(列)的所有元素乘上某数 k，等于用 k 乘行列式.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 4 行列式中有两行(列)的对应元素相等，则行列式等于零.

性质 5 如果行列式的某行(列)的各元素是二项之和，那么这个行列式等于两个行列式的和.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的任一行(列)的元素乘以同一个数后，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

在三阶行列式中，划去 a_{ij} 所在的行和列的元素，余下的元素构成的一个二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 我们把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}. 例如在三阶行列式(2)中元素 a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

性质 7　行列式 D 中任一行(列)中各元素与其代数余子式的乘积之和等于该行列式. 即

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{ik}=D,\ i=1,2,3; \quad (7)$$

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}A_{kj}=D.\ j=1,2,3. \quad (8)$$

(7)式与(8)式分别叫做行列式 D 按第 i 行的展开式及按第 j 列的展开式.

性质 8　在行列式 D 中，任一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,3; (9)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{kj}=0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,3. (10)$$

(7)式与(9)式及(8)式与(10)式可分别合并为

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ D, & i=j.\end{cases}\quad i,j=1,2,3;$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ D, & i=j.\end{cases}\quad i,j=1,2,3.$$

§2. 高阶行列式

一、n 阶行列式的定义

学习了二阶与三阶行列式，很自然会问，能否把行列式推广到四阶、五阶以至更一般的 n 阶呢？为了能从三阶行列式类推出 n 阶行列式的定义，我们来观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\qquad(11)$$

中每一项构成的规律.

首先注意其中每一项为三个元素的乘积 $a_{1j}a_{2k}a_{3l}$，并带有一定的符号. 这三个元素的第一个下标分别为 1, 2, 3, 这说明了在行列式的每一行中各取一个元素相乘. 由于数的乘法满足交换律，所以这里元素按行的自然顺序(从小至大的顺序) 排列是人为的，这样，我们只须将注意力集中在第二个下标 j,k,l 的变化上. 下面我们写出各项中第二个下标的排列

$$(123),\quad (312),\quad (231);\qquad(12)$$
$$(321),\quad (132),\quad (213).\qquad(13)$$

它们恰好是 1, 2, 3 的所有全排列. 这说明从三个行中所取的元素是取自各个不同的列，也就是说，各项的乘积是由每一行，每一列各取一个且仅取一个元素相乘得到的. 对于 1, 2, 3 的每一个全排列 j,k,l. 对应有一乘积 $a_{1j}a_{2k}a_{3l}$. 1, 2, 3 一共有六个全排列，所以三阶行列式一共有六项. 如(11)式的右边.

其次分析各项所带的符号．由于各项的第一个下标都按自然顺序排列，所以各项所带符号只与第二个下标的排列有关．为了说明其中的关系，下面引进逆序数的概念．

定义 1 **如在** $1, 2, \cdots, n$ **的一个全排列(称为** n **级排列)** $(s_1 s_2 \cdots s_n)$ **中，有** $i<j$ **时** $s_i>s_j$**，这时** s_i, s_j **违反了自然顺序，就说它们构成了一个逆序．排列** $(s_1 s_2 \cdots s_n)$ **中逆序的总数称为该排列的逆序数．**

易知排列 $(s_1 s_2 \cdots s_n)$ 的逆序数 $=$ (s_1 后面比 s_1 小的数字的个数) $+$ (s_2 后面比 s_2 小的数字的个数) $+\cdots\cdots$ $+$ (s_{n-1} 后面比 s_{n-1} 小的数字的个数)．

例如在排列(34152)中，3 后面有两个数比 3 小，4 后面也有两个数比 4 小，5 后面有一个数比 5 小，故

$$(34152)\text{的逆序数}=2+2+1=5.$$

如果一个排列的逆序数是偶数，就称该排列为偶排列，否则称为奇排列．读者容易验证(12)式中的排列都是偶排列，(13)式中的排列都是奇排列．于是不难看出(11)式中各项所带的符号是由第二个下标排列 (jkl) 的奇偶性决定的．当 (jkl) 是偶排列时项带正号；(jkl) 是奇排列时项带负号．如用 J 表示排列 (jkl) 的逆序数，则各项所带的符号为 $(-1)^J$．

于是三阶行列式的定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^J a_{1j} a_{2k} a_{3l}, \tag{14}$$

其中 J 为排列 (jkl) 的逆序数，“Σ”是对所有三级排列 (jkl) 求和．

读者不难验证二阶行列式的定义也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Sigma\,(-1)^J a_{1j} a_{2k} \tag{15}$$

其中 J 为排列 (jk) 的逆序数，“Σ”是对所有二级排列 (jk) 求和. 由于二级排列只有一个偶排列(12)和一个奇排列(21)，故二级行列式只有两项，一项带正号，一项带负号.

至此，我们不难把行列式的概念推广到 n 阶.

定义 2　设有 n^2 个数，排列成 n 行 n 列如下

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{16}$$

其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数(称为元素). 今在每一行中取出一个数，并且要求取出的 n 个数都在不同的列上. 把所取元素的行数按自然顺序排列，相应的列数设为 $j_1 j_2 \cdots j_n$. 作出这 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，然后按第二个下标排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性，将乘积乘以 $+1$ 或 -1. 如 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 是偶排列则乘以 $+1$，否则乘以 -1. 如把 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的逆序数记作 J，则各乘积所带的符号为 $(-1)^J$，然后对所有 n 级排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 求和，这个和数称为与(16)式中数表相应的 n 阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma\,(-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{17}$$

其中“Σ”是对所有 n 级排列求和.

行列式(17)也可简记为 $|a_{ij}|$. 显然(14)式与(15)式是(17)式中 n 等于 2 与 3 的特例.

为了证明行列式的性质，先讲两个定理.

定理 1　一排列中的任两个数调换，它的逆序数变更奇偶性.

证　先考虑调换相邻两数的情况. 设排列为 $PabQ$, P 表 a 前的 p 个数，Q 表 b 后的 q 个数. 调换相邻两数 a、b 为 $PbaQ$, P、Q 中各数的位置不变. 经过调换，显然在该排列中除了 a、b 两数的顺序改变外，其他任意两数的顺序并没有变. 若 a、b 原为自然顺序，经调换后，a、b 两数将构成逆序. 因此排列的逆序数增加 1. 反之，若 a、b 原构成逆序，经调换后，则成为自然顺序，于是排列的逆序数就减少 1. 故调换 a、b 改变 $PabQ$ 逆序数的奇偶性.

再考虑调换排列中任意两数的情况. 设排列为 $PaQbR$, Q 表 a、b 两数间的 q 个数，R 表 b 后的 r 个数. 今用下面的方法调换 a、b. 先把 $PaQbR$ 调换成 $PQabR$，要作 q 次相邻两数的调换；再把 $PQabR$ 调换成 $PbQaR$，要作 $q+1$ 次相邻两数的调换，一共调换了 $2q+1$ 次，所以 a、b 换位改变了逆序数的奇偶性. ∎

我们知道，在二阶行列式中，有一项带正号，一项带负号；在三阶行列式中则有三项带正号，三项带负号. 一般地，在 n 阶行列式 $(n>1)$ 中也恰有 $\frac{n!}{2}$ 项带正号，$\frac{n!}{2}$ 项带负号. 按行列式的定义，只需证明在 $n!$ 个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，有一半是偶排列，一半是奇排列. 这可利用定理 1 证得.

事实上，在所有 n 级排列中，将最前面两个数字调换位置. 如果 $i_1i_2\cdots i_n$ 为偶排列，则调换后即为奇排列. 而且对于不同的偶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $i_1'i_2'\cdots i_n'$ 在最前面的两数调换后，得到的奇排列 $i_2i_1i_3\cdots i_n$ 与 $i_2'i_1'i_3'\cdots i_n'$ 也不相同，因此奇排列的个数应不小于偶排列的个数. 同理，偶排列的个数也不小于奇排列的个数，所以两者个数相等.

由于数的乘法是可交换的，所以行列式各项中 n 个元素的顺序也可以任意交换. 例如在 4 阶行列式中，乘积 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 也可写成 $a_{31}a_{23}a_{44}a_{12}$. 一般地，乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可交换因子顺序成为 $a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}$，其中 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 与 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 都是 n 级排列.

定理 2　n 阶行列式的项可以写成

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda},$$

其中 S 与 T 分别为 n 级排列 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 与 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 的逆序数.

证 该项任意二元素互换，两个下标也同时调换，由定理 1 知排列 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 与 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 的逆序数将同时改变奇偶性，于是 $S+T$ 的奇偶性仍旧不变。如果将行的排列顺序 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 调换为按自然顺序 $12\cdots n$ 的排列（它的逆序数为 0），而列的排列 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 随之变换为 $j_1j_2\cdots j_n$（它的逆序数为 J），则有

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}=(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \quad \blacksquare$$

例如乘积 $a_{31}a_{23}a_{44}a_{12}$ 是 4 阶行列式中的一项，排列 3241 的逆序数 $S=4$，排列 1342 的逆序数 $T=2$，$S+T=6$ 所以该项带正号.

如果将行列式中各项的第二个下标按自然顺序排列，则相应的第一个下标排列记作 $i_1i_2\cdots i_n$，于是由定理 2，行列式又可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma\,(-1)^I a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \tag{18}$$

其中 I 为排列 $i_1\,i_2\cdots i_n$ 的逆序数，“Σ”为对所有第一个下标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和.

例 1 计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式，在展开式中应有 $4!=24$ 项，但在每一项中的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中只要有一个元素等于 0，乘积就为 0，所以只要计算展开式中不明显为 0 的项. 由于第 4 行除了 a_{44} 外都为 0，故只须考虑 $j_4=4$ 的项. 第三行中除了 a_{33}, a_{34} 外都是 0，现已取 $j_4=4$，所以必须取 $j_3=3$. 同理只能取 $j_2=2, j_1=1$.

就是说行列式中不为 0 的乘积只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，而排列 1234 的逆序数为 0，所以这一项所带的符号是正的，因此该行列式等于 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

在行列式中，从左上角到右下角的直线叫做主对角线. 例 1 的行列式中，主对角线以下的元素均为 0(即当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$)，这种行列式叫做上三角形行列式. 它等于主对角线上各元素的乘积.

同样，主对角线以上的元素均为 0(即当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$)的行列式叫做下三角形行列式. 同理可证它也等于主对角线上各元素的乘积. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

作为三角形行列式的特殊情况，有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = d_1d_2d_3d_4,$$

在这个行列式中，除了主对角线上的元素外，其他元素均为 0，这种行列式叫做对角形行列式.

同理，读者可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

但是我们知道

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = -a_{12}a_{21}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31},$$

一般地,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

证明与例 1 相同,读者可以自己证明.

二、 n 阶行列式的性质与计算

三阶行列式的 8 个性质对 n 阶行列式也是正确的. 下面仅就性质 1 , 2, 7, 8 给出证明, 其余性质读者可以自己证明.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

转置后为

$$D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}$, $i, j=1, 2, \cdots, n$.

将 D 与 D' 分别按(17)式与(18)式展开. D 中任一项设为

$$(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

在 D' 中有相应项为

$$(-1)^J b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}.$$

由于 $b_{ij}=a_{ji}$, 所以 $b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}=a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 它们所带的符号又相同, 因此对于$D$中任一项, 在 D' 中必有一项与之相等. 又D与 D' 的项数也相同(都是 $n!$项),故 $D=D'$.

性质 2　交换行列式的任意两行或两列, 行列式仅改变符号.

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

交换 p,q 两列得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将 D 与 D_1 按(18)式展开. 对于 D 中任一项

$$(-1)^I a_{i_1 1}\cdots a_{i_p p}\cdots a_{i_q q}\cdots a_{i_n n}$$

(其中 I 为排列 $i_1\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n$ 的逆序数), 在 D_1 中必对应有一项

$$(-1)^{I_1} a_{i_1 1}\cdots a_{i_q q}\cdots a_{i_p p}\cdots a_{i_n n}$$

(当 $j\neq p,q$ 时, 第 j 列取元素 $a_{i_j j}$. 第 p 列取元素 $a_{i_q q}$, 第 q 列取 $a_{i_p p}$.)其中 I_1 为行数排列 $i_1\cdots i_q\cdots i_p\cdots i_n$ 的逆序数. 而排列 $i_1\cdots i_q\cdots i_p\cdots i_n$ 与 $i_1\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n$ 只经过一次 i_p 与 i_q 的调换, 由定理 1 知 $(-1)^I$ 与 $(-1)^{I_1}$ 相差一个符号, 又因

$$a_{i_1 1}\cdots a_{i_q q}\cdots a_{i_p p}\cdots a_{i_n n}=a_{i_1 1}\cdots a_{i_p p}\cdots a_{i_q q}\cdots a_{i_n n},$$

所以对于 D 中任一项, D_1 中必有一项与它绝对值相同而符号相反. 又 D 与 D_1 的项数相同, 所以 $D=-D_1$. ▮

为了证明性质 7, 先证明以下两个等式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \qquad (19)$$