圣才考研网
www.100exam.com

扫一扫 送本书 手机版
摇一摇 找学友互动学习
播一播 看名师直播答疑

国内外经典教材辅导系列·理工类

同济大学数学系《工程数学—线性代数》

（第6版）

笔记和课后习题（含考研真题）详解

主编：圣才考研网
www.100exam.com

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

国内外经典教材辅导系列·理工类

同济大学数学系《工程数学—线性代数》(第6版)笔记和课后习题(含考研真题)详解

主编：圣才考研网
www.100exam.com

中国石化出版社

内 容 提 要

国内外经典教材辅导系列是一套全面解析当前国内外各大院校权威教科书的辅导资料。本书是同济大学数学系《工程数学—线性代数》(第6版)的学习辅导书。本书基本遵循第6版的章目编排，共分6章，每章由三部分组成：第一部分为复习笔记，总结本章的重难点内容；第二部分为课(章)后习题详解，对第6版的所有习题都进行了详细的分析和解答；第三部分为考研真题详解，精选近年考研真题，并提供了详细的解答。

圣才考研网(www.100exam.com)提供同济大学数学系《工程数学—线性代数》网授精讲班【教材精讲+考研真题串讲】、3D电子书、3D题库(详细介绍参见本书书前彩页)。随书赠送大礼包增值服务【300元网授班+20元3D电子书+35元3D题库+55元手机版电子书/题库+20元圣才学习卡】。扫一扫本书封面的二维码，可免费下载本书手机版；摇一摇本书手机版，可找所有学习本书的学友，交友学习两不误；本书提供名师考前直播答疑，手机电脑均可观看，直播答疑在考前推出(具体时间见网站公告)。

图书在版编目(CIP)数据

同济大学数学系《工程数学—线性代数》(第6版)笔记和课后习题(含考研真题)详解/圣才考研网主编.—北京:中国石化出版社,2015.9
(国内外经典教材辅导系列.理工类)
ISBN 978-7-5114-3605-4

Ⅰ.①同… Ⅱ.①圣… Ⅲ.①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第214323号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
武汉市新华印刷有限责任公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 8.25印张 205千字
2015年9月第1版 2015年9月第1次印刷
定价:20.00元

《国内外经典教材辅导系列·理工类》
编　委　会

序　言

我国各大院校一般都把国内外通用的权威教科书作为本科生和研究生学习专业课程的参考教材，这些教材甚至被很多考试(特别是硕士和博士入学考试)和培训项目作为指定参考书。为了帮助读者更好地学习专业课，我们有针对性地编著了一套与国内外教材配套的复习资料，并提供配套的名师讲堂、3D电子书和3D题库。

同济大学数学系主编的《工程数学—线性代数》(高等教育出版社)是我国高校采用较多的线性代数权威教材之一。作为该教材的配套辅导书，本书具有以下几个方面的特点：

1. 整理名校笔记，浓缩内容精华。本书每章的复习笔记均对本章的重难点进行了整理，并参考了国内名校名师讲授该教材的课堂笔记。因此，本书的内容几乎浓缩了该教材的所有知识精华。

2. 解析课后习题，提供详尽答案。本书参考大量线性代数相关资料，对同济大学数学系《工程数学—线性代数》的课(章)后习题进行了详细的分析和解答，并对相关重要知识点进行了延伸和归纳。

3. 精选考研真题，巩固重难点知识。为了强化对重要知识点的理解，本书精选了近几年考研数学中关于线性代数部分的真题，并提供详细的解答。所选考研真题基本涵盖了各个章节的考点和难点。

与本书相配套，圣才考研网提供同济大学数学系《工程数学—线性代数》网授精讲班【教材精讲+考研真题串讲】、3D电子书、3D题库(免费下载，送手机版)(详细介绍参见本书书前彩页)。

购买本书享受大礼包增值服务，手机扫描本书封面大礼包二维码或登录圣才考研网(www.100exam.com)，刮开所购图书封面防伪标的密码，即可享受大礼包增值服务：①23小时网授精讲班【教材精讲+考研真题串讲】(价值300元)；②本书3D电子书(价值20元)；③3D题库【考研真题(视频讲解)+课后习题+章节题库+模拟试题】(价值35元)；④手机版【电子书/题库】(价值55元)；⑤圣才学习卡(价值20元)，可在圣才学习网旗下所有网站进行消费。扫一扫本书封面的二维码，可免费下载本书手机版；摇一摇本书手机版，可找所有学习本书的学友，交友学习两不误；本书提供名师考前直播答疑，手机电脑均可观看，直播答疑在考前推出(具体时间见网站公告)。

圣才考研网(www.100exam.com)是圣才学习网旗下的考研考博专业网站，提供考研公共课和全国500所院校考研考博专业课辅导【一对一辅导、网授精讲班等】、3D电子书、3D题库(免费下载，免费升级)、全套资料(历年真题及答案、笔记讲义等)、国内外经典教材名师讲堂、考研教辅图书等。

考研辅导： www.100exam.com(圣才考研网)

官方总站： www.100xuexi.com(圣才学习网)

圣才学习网编辑部

送手机版，找学友互动学习，看名师直播答疑

圣才e书网www.100eshu.com

扫一扫　免费下载，获得本书手机版

1. 视频讲解：高清视频，辅导名师讲解重难点。
2. 立体展示：3D界面，3D播放，720度旋转。
3. 功能强大：记录笔记、全文检索等十大功能。
4. 多端并用：电脑手机平板等多平台同步使用。

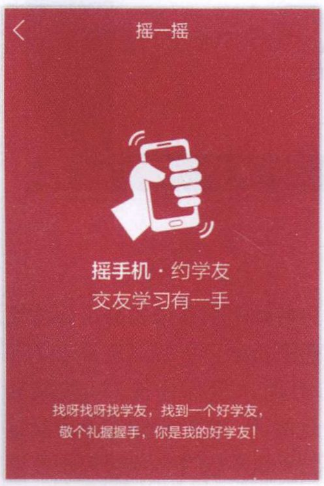
摇一摇　找学友互动学习

1. 摇一摇，找到学习本书的所有学友，可精确查找学友的具体位置。
2. 与学友互动，交流学习（视频、语音等形式），交友学习两不误。
3. 圈内有学霸解答本书学习中的问题，配有专职教师指导答疑解惑。

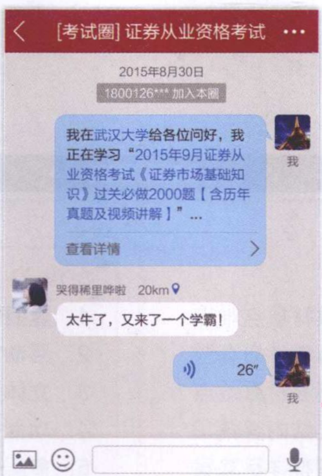
播一播　看名师直播答疑

1. 圣才名师在考前开通直播课堂，帮学友讲解重点习题，点拨考点。
2. 与名师互动交流，解答学友各种学习困惑，为学友考前指点迷津。
3. 手机电脑均可观看本书直播答疑，扫码下载本书电子书即可参加。

◆ 界面截图



▲摇一摇



▲聊天窗口

▲直播课堂

理工类经典教材3D题库

圣才考研网www.100exam.com

免费下载
+送手机版

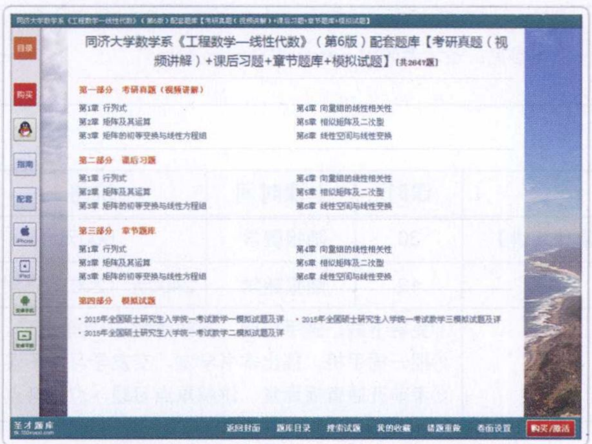
交友学习、高清视频讲解与名师直播答疑的3D题库

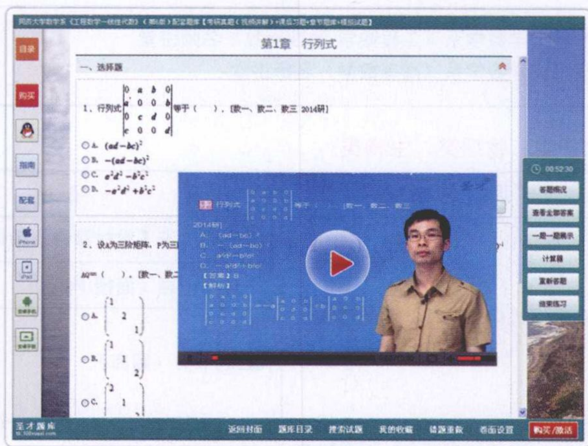
◆ 理工类经典教材3D题库【免费下载+送手机版】

1. 同济大学数学系《工程数学—线性代数》（第6版）配套题库【考研真题（视频讲解）+课后习题+章节题库+模拟试题】
2. 陈敏恒《化工原理》（第3版）配套题库【名校考研真题（视频讲解）+课后习题+章节题库+模拟试题】
3. 沈萍《微生物学》（第2版）配套题库【名校考研真题（视频讲解）+课后习题+章节题库+模拟试题】
4. 杨可桢《机械设计基础》（第6版）配套题库【名校考研真题（视频讲解）+课后习题+章节题库+模拟试题】

……

◆ 3D题库功能介绍





3D题库特色：

1. 直播答疑：辅导名师考前直播答疑点拨考点
2. 视频讲解：辅导名师高清视频讲解疑难试题
3. 互动学习：摇摇手机即可寻找学友互动做题
4. 免费做题：所有试题可免费不限次看题做题
5. 功能强大：错题重做、试题搜索等十大功能
6. 多端并用：电脑手机平板等多平台同步使用

◆ 题库内容简介

圣才题库系统共分为四部分：

1. 名校考研真题：辅导名师高清视频讲解名校历年考研真题。
2. 课后习题详解：解析课后习题，提供详尽答案。
3. 章节题库：根据教材章目编排，按题型分类，试题覆盖所有重要考点。
4. 模拟试题：参照全书重要考点命题，全面测试学习效果。

以上四部分在做题过程中出现的错误答题，系统会自动记录在“错题重做”栏目里，学员可以根据错题重做有针对性地进行补漏补缺。

目　录

第 1 章　行列式 ······ (1)
1.1　复习笔记 ······ (1)
1.2　课后习题详解 ······ (3)
1.3　考研真题详解 ······ (12)
第 2 章　矩阵及其运算 ······ (14)
2.1　复习笔记 ······ (14)
2.2　课后习题详解 ······ (19)
2.3　考研真题详解 ······ (32)
第 3 章　矩阵的初等变换与线性方程组 ······ (34)
3.1　复习笔记 ······ (34)
3.2　课后习题详解 ······ (36)
3.3　考研真题详解 ······ (52)
第 4 章　向量组的线性相关性 ······ (54)
4.1　复习笔记 ······ (54)
4.2　课后习题详解 ······ (59)
4.3　考研真题详解 ······ (77)
第 5 章　相似矩阵及二次型 ······ (84)
5.1　复习笔记 ······ (84)
5.2　课后习题详解 ······ (88)
5.3　考研真题详解 ······ (111)
第 6 章　线性空间与线性变换 ······ (116)
6.1　复习笔记 ······ (116)
6.2　课后习题详解 ······ (118)
6.3　考研真题详解 ······ (125)

第1章 行列式

1.1 复习笔记

一、二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

定义 将四个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}按一定位置，排成二行二列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

则表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$就是数表的二阶行列式，并记作$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

2. 三阶行列式

定义 设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

上式称为数表所确定的三阶行列式.

二、全排列和对换

1. 全排列

把 n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列. n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示.

(1)逆序数定义

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序(例如，n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说构成1个逆序. 一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数.

(2)分类

逆序数是奇数的排列称为奇排列，逆序数是偶数的排列称为偶排列.

(3)逆序数的计算

设 n 个元素为1至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设 $p_1p_2p_3\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，则称 p_i 这个元素的逆序数为 t_i. 全体元素的逆序数的总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

即是这个排列的逆序数.

2. 对换

(1)定义

对换是在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动。将相邻两个元素对换称为相邻对换.

(2)性质

①排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

②奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数，偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数.

三、n 阶行列式

1. 定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的第(i, j)元素.

2. 两类典型的 n 阶行列式

(1)下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

3. 行列式的性质

(1)行列式与它的转置行列式相等.

(2)对换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3)如果行列式有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

(4)行列式的某一行(列)中所有的元素都乘同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

(5)若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则可以将该行列式拆分成两个行列式之和.

(6)把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变.

四、行列式按行(列)展开

1. 余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中，把 (i, j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式称为 (i, j) 元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

A_{ij} 称为 (i, j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

2. 定理

行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

3. 范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j)$$

4. 代数余子式的推论

行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j$$

5. 代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j \end{cases} 或 \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j. \end{cases}$$

1.2 课后习题详解

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　　**(2)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　　**(4)** $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解: (1) 原式 $= 2 \times (-4) \times 3 + 0 \times (-1) \times (-1) + 1 \times 1 \times 8 - 1 \times (-4) \times (-1) - 2 \times (-1) \times 8 - 0 \times 1 \times 3 = -4$;

(2) 原式 $= acb + bac + cba - c^3 - a^3 - b^3$
$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3$;

(3) 原式 $= 1 \cdot b \cdot c^2 + 1 \cdot c \cdot a^2 + 1 \cdot a \cdot b^2 - 1 \cdot b \cdot a^2 - 1 \cdot c \cdot b^2 - 1 \cdot a \cdot c^2$
$= bc^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$

$=c^2(b-a)+ab(b-a)-c(b^2-a^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$;

(4)原式 $=x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)yx-(x+y)^3-x^3-y^3$

$=-2(x^3+y^3)$.

2. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

(1)1　2　3　4;

(2)4　1　3　2;

(3)3　4　2　1;

(4)2　4　1　3;

(5)1　3…(2*n*-1)　2　4…(2*n*);

(6)1　3…(2*n*-1)　(2*n*)　(2*n*-2)…2.

解：(1)此排列为标准排列，其逆序数为0；

(2)此排列的首位元素4的逆序数为0，第2位元素1的逆序数为1，第3位元素3的逆序数为1，末位元素2的逆序数为2，故它的逆序数为0+1+1+2=4；

(3)此排列的前两位元素的逆序数均为0，第3位元素2的逆序数为2；末位元素1的逆序数为3，故它的逆序数为0+0+2+3=5；

(4)此排列的从首位元素到末位元素的逆序数依次为0，0，2，1，因此它的逆序数为0+0+2+1=3；

(5)此排列中前 n 位元素的逆序数均为0. 第 $n+1$ 位元素2与它前面的 $n-1$ 个数构成逆序对，所以它的逆序数为 $n-1$；同理可知，第 $n+2$ 位元素4的逆序数为 $n-2$……末位元素 $2n$ 的逆序数为0. 因此该排列的逆序数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+0=\frac{1}{2}n(n-1)$；

(6)此排列的前 $n+1$ 位元素的逆序数均为0；第 $n+2$ 位元素 $(2n-2)$ 的逆序数为2；第 $n+3$ 位元素 $2n-4$ 与它前面的 $2n-3$，$2n-1$，$2n$，$2n-2$ 构成逆序对，所以它的逆序为4……末位元素2的逆序数为 $2(n-1)$，因此该排列的逆序数为 $2+4+\cdots+2(n-1)=n(n-1)$.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解：根据行列式定义可知，此项必定还含有分别位于第3行和第4行的某两元素，而它们又分别位于第2列和第4列，即 a_{32} 和 a_{44} 或 a_{34} 和 a_{42}. 又因排列1324与1342的逆序数分别为1与2，所以此行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

4. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解：

(1) $D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - 10r_1]{r_2 - 4r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_4 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + 7r_2]{r_3 + 15r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix}$

$=0$；

(2) $D \xlongequal{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$；

(3) $D \xlongequal[\substack{r_2 \div d \\ r_3 \div f}]{r_1 \div a} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_2 \div c \\ c_3 \div e}]{c_1 \div b} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 + r_1]{r_2 + r_1} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$=4abcdef$；

(4) $D \xlongequal{r_2 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0$；

(5) $D \xlongequal{r_1 + ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_3 + dc_2} \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } r_3 \text{ 展开}} (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix}$

$=(1+ab)(1+cd)+ad.$

(6) $D \xlongequal[\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1}]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 \div (-1)]{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_2 - c_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 16.$

5. 求解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=0$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$. 其中 a，b，c 互不相等.

解：(1) 左式 $\xlongequal[r_1\div(x+3)]{r_1+r_2}(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2-c_1}(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x-1 & 1 \\ -1 & 2 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}=(x+3)(x^2-3)$$

因此方程的解为 $x_1=-3$，$x_2=\sqrt{3}$，$x_3=-\sqrt{3}$.

(2) 根据题意，方程左式为 4 阶范德蒙德行列式，则有

$$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(a-c)(b-c)=0$$

因 a，b，c 互不相等，因此方程的解为 $x_1=a$，$x_2=b$，$x_3=c$.

6. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$；

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$；

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

证：(1) 左式 $\xlongequal[c_2-c_3]{c_1-c_3}\begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1-2c_2}\begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 0 & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$=(a-b)^3=\text{右式};$$

(2)将左式按第1列拆开可以得到

$$\text{左式}=\begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=aD_1+bD_2$$

$$\text{其中}D_1=\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}\xlongequal[c_3\div a]{c_3-bc_1}a\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2\div a]{c_2-bc_3}a^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}\xlongequal[c_2\div b]{c_2-ac_1}b\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3\div b]{c_3-ac_2}b^2\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_1]{c_3\leftrightarrow c_2}b^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$\text{因此有 }D=aD_1+bD_2=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}=\text{右式}.$$

$$\text{(3)左式}\xlongequal[\substack{c_3-c_2\\c_2-c_1}]{c_4-c_3}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_3}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0\text{(因有两列相同)};$$

$$\text{(4)左式}\xlongequal[\substack{r_3-ar_2\\r_2-ar_1}]{r_4-a^2r_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{各列提取公因子}]{\text{按}c_1\text{展开}}(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-br_1]{r_3-b(b+a)r_2}(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ x & y \end{vmatrix}$$