2004年上海大学博士学位论文 48

非线性规划中的精确罚函数

作 者： 白富生
专 业： 运筹学与控制论
导 师： 张连生

上海大学出版社
·上 海·

2004年上海大学博士学位论文

非线性规划中的精确罚函数

作　者：　白富生
专　业：　运筹学与控制论
导　师：　张连生

上海大学出版社
·上海·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2004)

Exact Penalty Functions in Nonlinear Programming

Candidate: Bai Fu-sheng
Major: Operations Research and Cybernetics
Supervisor: Prof. Zhang Lian-sheng

Shanghai University Press
· Shanghai ·

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：	**王哲民**	教授，复旦大学	200433
委员：	**唐国春**	教授，上海第二工业大学	201209
	孙世杰	教授，上海大学	200444
	孙小玲	教授，上海大学	200444
	田蔚文	教授，上海大学	200444
导师：	**张连生**	教授，上海大学	200444

评阅人名单：

王哲民	教授，复旦大学管理学院	200433
杨新民	教授，重庆师范大学数计系	400047
唐国春	教授，上海第二工业大学经管学院	201209

评议人名单：

韩继业	教授，中国科学院应用数学所	100080
邓乃杨	教授，中国农业大学东区理学院	100083
何炳生	教授，南京大学数学系	210093
濮定国	教授，同济大学应用数学系	200092
徐以汎	教授，复旦大学管理学院	200433
冯国胜	教授，同济大学应用数学系	200092

答辩委员会对论文的评语

白富生同学的博士论文《非线性规划中的精确罚函数》对精确罚函数这一课题进行了深入而有意义的探讨。精确罚函数是求解有约束优化的重要途径，已经有许多研究相当成熟，进一步的研究有相当的难度，因此选题是有意义的。传统意义下的精确罚函数是非光滑的，该文给出了二次函数的光滑化途径，并能控制精度，有相当的理论意义。此外，还对低次罚函数的精确性作了研究，给出了局部精确性的罚参数只需大于零的结论，这是一个很好的结果。该文还对 k-calm 作了细致的研究，给出了不少理论结果，有重要理论意义。最后该文对一般非线性整数规划给出了精确罚函数的一般形式。

从全文看，作者对数学规划的基础知识和前沿结果有很好了解，并能熟练应用，有相当的独立研究能力。该文是一篇优秀的博士论文。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会投票表决，一致通过白富生同学的博士学位论文答辩，建议授予博士学位。

答辩委员会主席：王哲民

2003 年 7月 8 日

摘 要

约束非线性规划问题广泛见于工程、国防、经济等许多重要领域. 求解约束非线性规划问题的主要方法之一是把它转化成无约束非线性规划问题，而罚函数方法和拉格朗日对偶方法是将约束规划问题无约束化的两种主要方法. 罚函数方法通过求解一个或多个罚问题来得到约束规划问题的解. 如果罚问题的极小点是原约束规划问题的极小点，则称此罚问题中的罚函数为精确罚函数. 本文研究了 l_1 精确罚函数的全局精确罚性质及其光滑化，低次罚函数的局部、全局精确罚性质，低次罚函数的光滑化，k-calm 条件与精确罚性质的关系，以及整数规划中的精确罚函数.

本文内容结构安排如下. 第一章，简要介绍了目前国内外关于精确罚函数的研究工作. 第二章，研究了 l_1 精确罚函数的全局精确罚性质及其光滑化. 在满足下列假设条件：①目标函数满足强制性条件；②原约束非线性规划问题只有有限个全局极小点；③原约束非线性规划问题在其任何全局极小点处都满足 KKT 二阶的充分条件，我们给出了 l_1 精确罚函数的全局精确罚性质，即当罚参数充分大时，原约束非线性规划问题的全局极小点集与 l_1 罚问题的全局极小点集相同. 由于 l_1 精确罚函数的不可微性，一般不能直接采取利用导数的最优化方法去求解 l_1 罚问题. 为了克服这一缺陷，给出了 l_1 精确罚函数的一种二次函数光滑逼近，

并证明了如果在可行域的拟内部至少存在一个原问题的全局极小点，那么当罚参数充分大时，任何光滑后的罚问题的全局极小点一定是原问题的全局极小点. 如果原问题可行域是拟强壮集，那么当罚参数充分大时，任何光滑后的罚问题的全局极小点一定是原问题的可行近似全局极小点，且近似程度可以预先给定. 给出的数值例子说明通过解光滑化后的罚问题来求解原问题的方法是切实可行的. 第三章，首先引进低次罚函数. 在 KKT 二阶充分条件成立下，我们得出低次罚函数的局部精确罚性质，即任何原问题的满足 KKT 二阶充分条件的局部极小点都是低次罚函数的严格局部极小点，而且这里的罚参数可以取任何正数. 然后，在上述第二章的三个假设下，得出了低次罚函数的全局精确罚性质，即当罚参数充分大时，原约束非线性规划问题的全局极小点集与低次罚问题的全局极小点集相同. 由于低次罚函数同 l_1 精确罚函数一样具有不可微性，接下来给出了关于低次罚函数的一个二次函数光滑逼近，并得到了与上述第二章中对 l_1 精确罚函数进行光滑逼近所得到的相关结论相类似的结果. 第四章，首先给出了原问题在一点的 k-calm 条件的定义，并给出了原问题局部极小点满足 k-calm 条件的充要条件. 接着，引入了原问题的摄动问题在 $(0,0)\in \mathrm{R}^m\times \mathrm{R}^l$ 的 k-calm 条件的定义，这里 m,l 分别表示原规划问题的不等式约束及等式约束的个数，并证明了原问题在任何全局极小点都满足 k-calm 条件当且仅当原问题的摄动问题在 $(0,0)\in \mathrm{R}^m\times \mathrm{R}^l$ 满足 k-calm 条件. 我们证明了对任何给定的 $k_0>0$, 如果存在满足 $k>k_0$ 的 k, 使得原规划问题在 x^* 是 k-

calm 的，那么对任何罚参数 $q>0$, x^* 都是罚问题 $\min\limits_{x\in X} P_q^{k_0}(x)$(参见 (4.3.2)) 的局部极小点. 此外，我们还证明了原问题的摄动问题在 $(0,0)\in \mathrm{R}^m\times \mathrm{R}^n$ 是 k-calm 的，当且仅当存在 $q_0>0$, 使得当 $q>q_0$ 时，原问题与罚问题 $\min\limits_{x\in X}\ P_q^k(x)$ (参见 (4.3.2)) 的全局极小点集相同. 最后，给出了精确罚函数 $P_q^{\frac{1}{2}}(x)$(参见 (4.3.1)) 的二次光滑逼近，从而得到了光滑罚问题，并证明了当罚参数 q 充分大时，该光滑罚问题的全局极小点是原问题的近似全局极小点，且近似程度可以预先给定. 第五章，考虑整数规划中的精确罚函数. 首先讨论了一种对数 - 指数非线性函数的渐近强对偶性及精确罚性质，指出不需要进行对偶搜索，而可以通过精确罚来解原规划问题. 然后讨论了另一种对数 - 指数非线性函数的精确罚性质，并由精确罚性质得到了渐近强对偶性. 接着讨论了含两个参数的几种光滑精确罚函数. 最后，给出了整数规划中精确罚函数的一般形式.

关键词：非线性规划，精确罚函数，光滑逼近， k-calm 条件，整数规划

Abstract

Constrained nonlinear programming problems abound in many important fields such as engineering, national defence, finance etc. One of the main approaches for solving constrained nonlinear programming problems is to transform it into unconstrained nonlinear programming problem. Penalty function methods and Lagrangian duality methods are the two prevailing approaches to implement the transformation. Penalty function methods seek to obtain the solutions of constrained programming problem by solving one or more penalty problems. If each minimum of the penalty problem is a minimum of the primal constrained programming problem, then the corresponding penalty function is called the exact penalty function. In this thesis, we discuss global exact penalty property of l_1 exact penalty function, smoothing of l_1 exact penalty function, local exact penalty property and global exact penalty property of lower order penalty function, smoothing of lower order penalty function, the relationship between k-calm conditions and exact penalty property, exact penalty functions in integer programming.

The present thesis is organized as follows. In Chapter 1, we give a brief introduction to the existing research work on exact

penalty functions. In Chapter 2, we discuss the global exact penalty property of l_1 exact penalty function and its smoothing. Under the following assumptions: 1) the objective function satisfies the coercive conditions; 2) there are only finite global minima of the primal constrained nonlinear programming problem; 3) KKT second order sufficiency condition of the primal constrained nonlinear programming problem holds at its any global minimum, we establish the global exact penalty property, i.e. the set of global minima of the primal constrained nonlinear programming problem is identical to the set of global minima of the l_1 exact penalty problem. Since the l_1 exact penalty function is not differential, generally speaking, optimization techniques employing gradient can not be used directly to solve the l_1 exact penalty problem. To avoid this drawback, we propose a quadratic smoothing approximation to the l_1 exact penalty function. It is shown that if there exists at least one global minimum of the primal problem in the quasi-interior of the feasible region of the primal problem, then any global minimum of the smoothed penalty problem is a global minimum of the primal problem when the penalty parameter is sufficiently large. If the feasible region of the primal problem is quasi-robust, then any global minimum of the smoothed penalty problem is a feasible approximate global minimum of the primal problem when the penalty parameter is sufficiently large, and the precision of the approximation can be set in advance. The following numerical examples show that it is applicable to solve the smoothed penalty problem in order to solve the primal problem.

In Chapter 3, we firstly introduce lower order penalty function. Under the KKT second order sufficiency condition, we obtain the local exact penalty property, i.e. any local minimum satisfying the KKT second order sufficiency condition is a strict local minimum of the lower order penalty function, and the penalty parameter can be any positive number. Then, under the same three assumptions as in Chapter 2 mentioned above, we obtain the global exact penalty property, i.e. the set of global minima of the primal constrained nonlinear programming problem is identical to the set of global minima of the lower order exact penalty problem. As the l_1 exact penalty function, the lower order exact penalty function is not differential. Thus we present a quadratic smoothing approximation to the lower order exact penalty function, and obtain similar results to those obtained in the smoothing approximation in Chapter 2.

In Chapter 4, firstly, we give the definition of k-calm condition at a point for the primal problem, and then obtain the sufficient and necessary condition for a local minimum of the primal problem to be k-calm. Next we give the definition of k-calm condition at $(0,0) \in \mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^l$ for the perturbation problem, where m, l denote the numbers of inequality and equality constraints respectively, and show that the primal problem satisfies k-calm condition at any global minimum if and only if the perturbation problem satisfies k-calm condition at $(0,0) \in \mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^l$. Then we show that for any $k_0 > 0$, if there exist a $k > k_0$ such that the primal problem is k-calm at x^*, then x^* is a local minimum of the penalty problem $\min\limits_{x \in X} P_q^{k_0}(x)$(see (4.3.2)) with any positive penalty parameter q. Moreover, it is shown that the perturbation problem is k-calm at $(0,0) \in \mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^n$ if and only if there exists a $q_0 > 0$, such that the set of global minima of the primal problem identical to that of the penalty problem $\min\limits_{x \in X} P_q^k(x)$(see (4.3.2)) when $q > q_0$. Finally, we propose the quadratic smoothing approximation to the exact penalty function $P_q^{\frac{1}{2}}(x)$(see (4.3.1)) and the corresponding smoothed penalty problem. We show that any global minimum of the smoothed penalty problem is a approximate global minimum when the parameter q is sufficiently large, and the precision of the approximation can be set in advance. In Chapter 5, we consider exact penalty functions in integer programming. Firstly we discuss the asymptotic strong duality property and exact penalty property of a logarithmic-exponential nonlinear function, and we show that it is not necessary to implement dual search to solve the primal problem, instead the primal problem can be solved by exact penalization. Then we discuss the exact penalty property of another logarithmic-exponential nonlinear lagrangian function, and we obtain the asymptotic strong duality property by the exact penalty property. Next we give some smooth penalty functions with two parameters and show their exact penalty properties. Finally we propose general exact penalty functions in integer programming.

Keywords: Nonlinear programming, exact penalty function, smoothing approximation, k-calm condition, integer programming

目 录