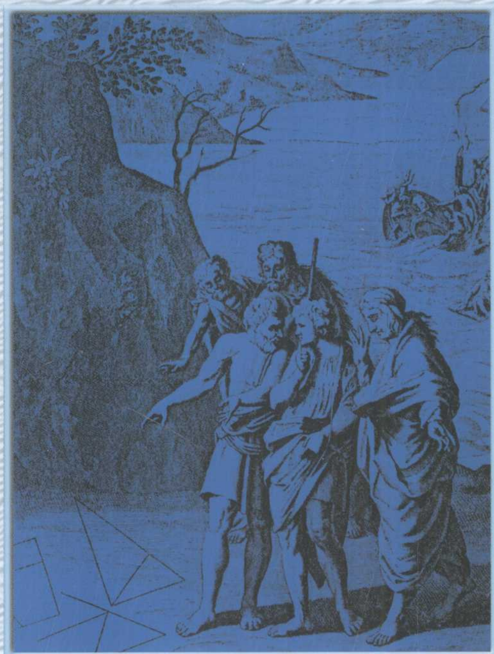
南秀全初等数学系列

极值与最值（上卷）

南秀全 编著

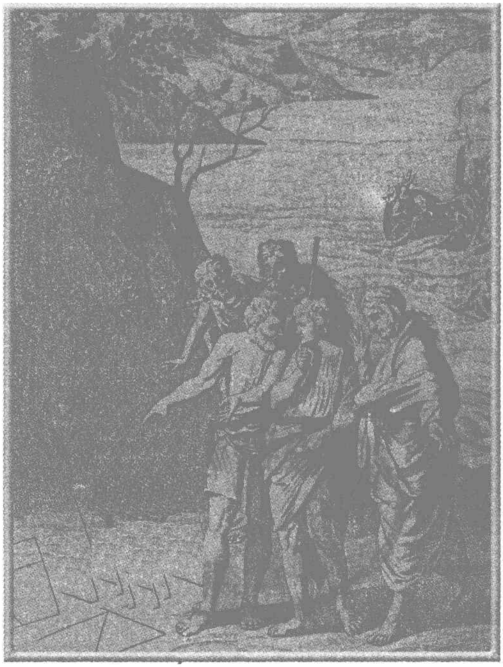


- 利用二次函数的极值公式
- 利用一元二次方程的根的判别式
- 利用不等式与凸函数
- 利用绝对值不等式
- 利用平面几何知识

ITP
哈爾濱工業大學出版社
TE OF TECHNOLOGY PRESS

极值与最值（上卷）

南秀全初等数学系列



南秀全 编著

◎利用二次函数的极值公式

◎利用一元二次方程的根的判别式

◎利用不等式与凸函数

◎利用绝对值不等式

◎利用平面几何知识

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分两章,第1章首先提出两个问题,通过两个问题引出本书将要介绍的内容;第2章介绍了求极值与最值的常用方法和技巧.

本书适合中学师生及广大数学爱好者阅读学习.

图书在版编目(CIP)数据

极值与最值.上卷/南秀全编著. -- 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.6

ISBN 978-7-5603-5427-9

Ⅰ.①极… Ⅱ.①南… Ⅲ.①极值(数学) Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第135815号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　李　欣
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张16.75　字数172千字
版　　次　2015年6月第1版　2015年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5427-9
定　　价　28.00元

◎

目录

第1章 引例

首先,我们来看下面的问题:

问题1 已知矩形场地的一边是墙,另三边要用 100 m 长的铁丝围成(图 1.1). 如何设计它的长和宽,才能使场地面积最大,最大面积是多少?

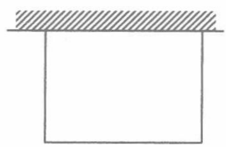


图 1.1

问题2 一牧人带牛群从点 A 出发(图 1.2)到草场 MN 放牧. 在傍晚回到营帐 B 之前,先带牛群到小河 PQ 去给牛饮水,想一想:牧人应走哪条路线,才能使整个放牧的路程(即从 $A \to MN \to PQ \to B$)最短?

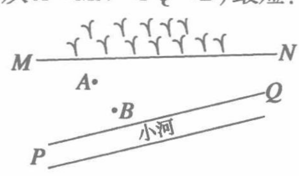


图 1.2

上面的两个问题中,问题 1 是要求出场地的最大面积,问题 2 是要求出整个放牧的最短路程,像这样求某个量的极大或极小值的问题我们常称作极值问题.

极值问题是中学数学中的重要的内容之一,它的应用十分广泛. 因此,在本书后面的章节中,我们将做专门的探讨.

下面以函数的极值为例,来介绍极值的定义.

对于定义在区间$[a,b]$上的一元实函数$f(x)$,设$x_0 \in (a,b)$,如存在x_0的一个$\delta > 0$邻域$O(x_0,\delta)$,使对一切$x \in O(x_0,\delta)$有$f(x) \geqslant f(x_0)$,则称$f(x_0)$是$f(x)$的一个极小值,x_0称为$f(x)$的极小点. 如果对一切$x \in O(x_0,\delta)$,有$f(x) \leqslant f(x_0)$,则称$f(x_0)$是$f(x)$的一个极大值,x_0称为$f(x)$的极大点.

极大值和极小值统称为极值,极大点和极小点统称极值点.

显然,函数的极大(小)值$f(x_0)$,只是在x_0附近的一个局部范围内函数$f(x)$的最大(小)值. 因而,函数$f(x)$在$[a,b]$的极值不是唯一的,且极大值可能小于某一极小值. 这样的极值,也称局部极值或相对极值.

设$x_0 \in [a,b]$,若对一切$x \in [a,b]$,有

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad (\text{或} f(x) \leqslant f(x_0))$$

则$f(x_0)$就称为$f(x)$在$[a,b]$的最小值(或最大值),记为$f_{\min}$(或$f_{\max}$).

函数在$[a,b]$的最小(大)值是在整个区间上函数值中的最小(大)者,因而,也称为函数在$[a,b]$的全局极值或绝对极值(有时就叫作极值).

如果$f(x)$是定义在闭区间$[a,b]$上的连续函数,可以证明,$f(x)$在区间$[a,b]$上的最小(大)值可能是

某一局部极值，也可能是在端点的函数值，从而

$$f_{\min}=\min\{f(a),f(b),f(x_1),\cdots,f(x_n)\}$$
$$f_{\max}=\max\{f(a),f(b),f(x_1),\cdots,f(x_n)\}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的所有极值点.

上述关于一元函数极值的概念，可以类似地推广到多元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的情形：

对于定义在区域 D 上的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，设 $x_0\in D$，如存在 x_0 的一个 $\delta>0$ 的邻域 $O(x_0,\delta)$，当对一切 $x\in O(x_0,\delta)$ 均有

$$f(x)\geqslant f(x_0)\quad (\text{或} f(x)\leqslant f(x_0))$$

时，就称 $f(x_0)$ 是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一个极小(大)值，点 x_0 称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一个极小(大)点.

如对一切 $x\in D$，均有

$$f(x)\geqslant f(x_0)\quad (\text{或} f(x)\leqslant f(x_0))$$

时，就称 $f(x_0)$ 是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 D 上的最小(大)值.

进一步，还讨论在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足条件

$$\begin{cases}\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\\ \varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\\ \qquad\vdots\\ \varphi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\end{cases}\tag{1}$$

下，求出变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的一组值，使函数

$$L=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\tag{2}$$

取得最小值或最大值.

这里的极值是泛指，也就是包括局部极值或全局极值，由问题的性质决定. 这个欲求出极值的函数 L 称为目标函数(或评价函数)；这些附加的条件 $\varphi_i=0$ 称为约束条件. 没有约束条件的极值问题叫作无约束问

题,具有约束条件的极值问题叫作约束问题(或条件极值问题). 对于约束问题,往往可以化成一系列无约束问题,或引进辅助变量化成无约束问题来求解.

在研究函数的极值或最值时,若未指明在哪个区间上讨论,则在其定义域上讨论. 显然,函数的极值与最值的概念是有严格区别的. 最本质的区别是:

1. 极值点必须是定义区间的内点,而最值点可以是定义区间上的任一点. 当定义区间为闭区间时,最值点可以是区间端点,而极值点不能为区间端点.

2. 最值反映的是函数在整个定义区间或定义域上的整体性质,而极值反映的只是函数在定义区间内部某个任意小的邻域内的局部性质.

3. $f(x_0)$作为函数$f(x)$的极值,必须比在x_0附近所有各点的函数值都大或都小,而不能彼此相等; $f_m(x)$作为函数$f(x)$的最值,只需不小于或不大于定义区间上所有各点的函数值,而可以彼此相等.

由于以上三点本质的区别,函数的极值与最值有许多不同的性质.

定理 1 如果函数$f(x)$在某个区间上有定义,且有最大值(或最小值),则最大值(或最小值)是唯一的.

证明 设函数$f(x)$在这区间上的两个不同点x_1, x_2都取得最大值(或最小值),则根据最值的定义,有

$$f(x_1)\geqslant f(x_2)\quad(\text{或}f(x_1)\leqslant f(x_2))$$

且
$$f(x_2)\geqslant f(x_1)\quad(\text{或}f(x_2)\leqslant f(x_1))$$

故知
$$f(x_1)=f(x_2)$$

即函数$f(x)$在这区间上的最大值(或最小值)是唯一的.

但定理1对函数的极值不适用. 就是说,如果函数 $f(x)$ 在某个区间上有定义,且有极大值(或极小值)则极大值(或极小值)不一定是唯一的.

定理2 如果函数 $f(x)$ 在某个区间上有定义,且有最大值和最小值,则最大值必定不小于最小值.

根据函数最值的定义,定理2显然成立. 但这个定理对函数的极值也不适用. 即如果函数 $f(x)$ 在某个区间上有定义,且有极大值和极小值,则极大值不一定不小于极小值.

当然,函数的极值与最值还有其他一些不同的性质,这里不再赘述. 但函数的极值与最值毕竟都是刻画函数度量性质的概念,它们之间不仅有某些类似之处,而且存在着密切的联系. 例如:

1. 如果函数的最值不在定义区间的端点取得,并且这个函数在其定义区间上的任何微小邻域内都不为定值,则最值必定是极值;

2. 如果函数在定义区间内只有唯一的极值,则此极值必定是最值.

因此,在很多实际问题中,求极值与求最值,结果往往是完全相同的(其实意义并不相同),这就使人忽视了这两个概念的本质区别,把它们混为一谈,以致有时造成谬误.

例1 求函数 $y=6-\sqrt{x^2-6x+5}$ 的极值.

解 因为

$$x^2-6x+5=(x-3)^2-4$$

所以,当 $x=3$ 时,x^2-6x+5 取极小值为 -4.

但二次根号下不能取负值,因此仅需考虑算术根为非负数的条件.

设 $u=\sqrt{x^2-6x+5}$,则当 $x=1$ 或5时,$u_{\min}=0$. 故当 $x=1$ 或5时,$y_{\max}=6$.

剖析 这个解答是错误的,注意这里所求得的 $y_{\max}=6$ 是最值而不是极值.

事实上,函数 $y=6-\sqrt{x^2-6x+5}$ 的定义域是 $(-\infty,1]\cup(5,+\infty)$,$y_{\max}=6$ 是函数在两个半开区间 $(-\infty,1]$ 和 $[5,+\infty)$ 端点的值,在这两个区间内,函数 y 分别是严格递增和严格递减的,没有极值. 故正确的结论是:函数 $y=6-\sqrt{x^2-6x+5}$ 无极值.

说明 由此例可知,函数的极值与最值的又一不同性质:函数可以有最值而无极值.

例2 求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的最大值或最小值.

解 已知函数的定义域是 $x\neq0$,分两种情形讨论:

(1)当 $x>0$ 时,由代数基本不等式得

$$y=x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$ 即 $x=1$ 时,上式取等号.

所以,当 $x=1$ 时,$y_{\min}=2$.

(2)当 $x<0$ 时,设 $x=-t(t>0)$,则

$$y=x+\frac{1}{x}=-\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

因为,当 $t=1$ 时,$\left(t+\frac{1}{t}\right)_{\min}=2$. 所以,当 $x=-1$ 时,$y_{\max}=-2$.

综上所述,可知:

当 $x=1$ 时,$y_{min}=2$;当 $x=-1$ 时,$y_{max}=-2$.

剖析 这个解答显然也是错误的.因为,函数的最大值必定不小于最小值.事实上,这里所求得的 $y_{min}=2$ 和 $y_{max}=-2$ 都是极值而不是最值.

因为,当 $x\to+\infty$ 时,有 $y\to+\infty$;当 $x\to-\infty$ 时,有 $y\to-\infty$.所以,y 既没有最大值,也没有最小值.

正确的结论是:函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 无最值.

说明 此例也使我们看到函数的极值与最值的又一个不同的性质:函数可以有极值而无最值.

第2章 求极值与最值问题的常用方法与技巧

极(最)值问题种类广泛,花样繁多,解决问题的方法与技巧自然也就丰富多采,本章主要讨论连续极值问题的若干解法与技巧.

所谓连续极值问题,指的是问题中的变量是连续变化的. 如代数中的实数变量 x,三角中的角度变量 α,几何中的长度和面积等等,它们都是连续变化的,这类问题也称之为常规极值问题.

2.1 利用二次函数的极值公式

求二次函数和可化为二次函数的函数的极值,可利用二次函数求极值的公式求解.

如果目标函数为 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$. 则

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

从而对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x)-\frac{4ac-b^2}{4a}=\begin{cases}a(x+\frac{b}{2a})^2\geqslant 0, \text{当 } a>0 \text{ 时}\\ a(x+\frac{b}{2a})^2\leqslant 0, \text{当 } a<0 \text{ 时}\end{cases}$$

当且仅当 $x=-\frac{b}{2a}$时等号成立.

所以，如在$(-\infty,+\infty)$上讨论的话，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在 $x=-\frac{b}{2a}$时，若 $a>0$，$f(x)$有最小值$f(-\frac{b}{2a})$，而无最大值；若 $a<0$，$f(x)$有最大值 $f(-\frac{b}{2a})$，而无最小值.

这里，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$的最大（小）值，显然也是$f(x)$的局部极值. 这是因为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图形是一条抛物线，顶点在$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$. $a>0$ 时，开口向上，因而在顶点处达到极小值；$a<0$ 时，开口向下，因而在顶点处达到极大值. 至于在任一闭区间$[\alpha,\beta]$上讨论时，若顶点不在$[\alpha,\beta]$内，则其最大（小）值在端点达到，那么其最小（大）值必为$f(\alpha)$或$f(\beta)$；若顶点在$[\alpha,\beta]$内，则顶点是最大（小）值，这不难从图形上看出.

综上所述，有：

定理 1　对于定义在$(-\infty,+\infty)$上的二次函数 $y=ax^2+bx+c$（其中 $a\neq 0$），如果 $a>0$，则当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，有最小值 $y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$，但这个函数没有最大值；

如果 $a<0$,则当 $x=-\frac{b}{2a}$时,有最大值 $y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$,但这个函数没有最小值.

定理 2 定义在闭区间$[p,q]$上的二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$(其中 $a\neq 0$)存在最大值与最小值.

(1)当 $a>0$ 时,如果 $-\frac{b}{2a}\in[p,q]$,则当 $x=-\frac{b}{2a}$时,有 $y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$;而 $y_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$. 如果 $-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$,则 $y_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$;$y_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$.

(2)当 $a<0$ 时,如果 $-\frac{b}{2a}\in[p,q]$,则当 $x=-\frac{b}{2a}$时,有 $y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$;而 $y_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$. 如果 $-\frac{b}{2a}\in[p,q]$,则 $y_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$;$y_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$.

例 1(1978 年理科高考试题) 当 m 为________时,函数 $y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$(m 为实数)有最大值是 0.

解 因为二次项系数为 $1>0$,所以

$$y_{\max}=\frac{4(m^2-1)-(2m+1)^2}{4\times 1}=0$$

所以 $$m=-\frac{5}{4}$$

例 2 求函数 $y=2x-3+\sqrt{13-4x}$的极大值.

分析 因为这个函数的自变量 x 扩大时,$2x-3$ 也扩大,$\sqrt{13-4x}$缩小. 所以不能利用函数的单调性. 可令

$\sqrt{13-4x}=u$,化为 u 的二次函数使用极值公式求解.

解 $y=-\frac{1}{2}(13-4x)+\sqrt{13-4x}+\frac{7}{2}$

令 $$u=\sqrt{13-4x}$$

所以 $$y=-\frac{1}{2}u^2+u+\frac{7}{2}, a=-\frac{1}{2}<0$$

因此,当 $u=-\frac{b}{2a}=1$ 时

$$y_{\max}=\frac{4\times(-\frac{1}{2})\times\frac{7}{2}-1^2}{4\times(-\frac{1}{2})}=4$$

例3 设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根为 α 和 β,且 $|\alpha|+|\beta|=2$. 另外,函数 $y=ax^2+bx+c$,当 $x=\frac{1}{2}$时,有 $y_{\max}=4$. 则 a 的值为(　　).

A. -2　　B. 2　　C. 4　　D. -4

分析 因为 $y_{\max}=4$,所以 a 是负值. 故可筛掉 B,C. 因此只需检验 A 或 D 即可.

解 若是 A,则 $a=-2$,所以

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$$

所以 $$b=2$$

因为 $$y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-8c-2}{-8}=c+\frac{1}{4}=4$$

所以 $$c=\frac{15}{4}$$

因此方程为 $-2x^2+2x+\frac{15}{4}=0$,即 $8x^2-8x-15=0$.

则 $$\alpha=\frac{2\pm\sqrt{34}}{4}, \beta=\frac{2\mp\sqrt{34}}{4}$$

故$|\alpha|+|\beta|\neq 2$. 所以不是A,应选择D.

例4 求抛物线$y=3x^2-4x-2$与直线$2x-y-9=0$的最短距离.

解 设$M(x,y)$是抛物线上的动点,则点M到直线$2x-y-9=0$的距离为

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}|2x-y-9| \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}|2x-(3x^2-4x-2)-9| \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}|3x^2-6x+7| \end{aligned}$$

因为 $$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times 3\times 7-(-6)^2}{4\times 3}=470$$

所以 $$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{5}}\times 4=\frac{4}{5}\sqrt{5}$$

例5 设x为实数,求函数

$$y=(x^2+4x+5)(x^2+4x+2)+2x^2+8x+1$$

的最小值.

解 令$u=x^2+4x$,于是

$$y=(u+5)(u+2)+2u+1=u^2+9u+11$$

由二次函数的性质知,当$u=-\dfrac{9}{2}$时,y取得最小值,且当$u>-\dfrac{9}{2}$时,y是u的严格增函数.

由 $$u=x^2+4x=(x+2)^2-4$$

知 $$u\geqslant -4$$

且当$x=-2$时,$u=-4$.

故知$x=-2$时,y取得最小值,其值为-9.

例6 试求函数$y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+$