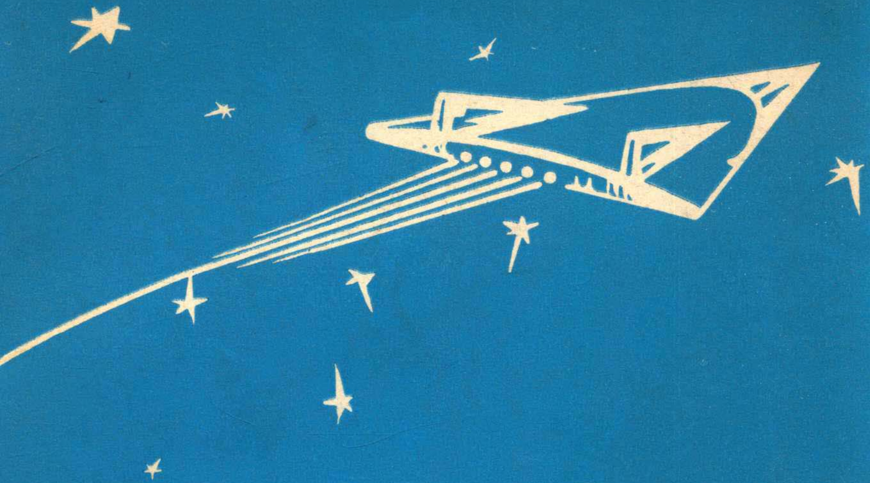

$$
[A_{ij}]^{s\times t}=\begin{array}{c l}
\begin{array}{cccc} \overbrace{}^{n_1} & \overbrace{}^{n_2} & & \overbrace{}^{n_t} \end{array} & \\
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \}m_1 \\ \}m_2 \\ \\ \}m_s \end{array}
\end{array}.
$$

飞行力学的向量矩阵法

国防工业出版社

目　录

飞行力学的向量矩阵法

〔苏〕И. В. 斯特拉热娃 В. С. 梅尔库莫夫 著

关世义 常伯浚 译

国防工业出版社

内容简介

本书讲述了当前在各科学和技术领域中得到广泛应用的向量计算和矩阵计算的基本原理。向量矩阵方法可以用来求解各种飞行器的飞行力学问题。

书中给出了关于向量及其性质、矩阵及其主要运算的基本知识，并指出了矩阵代数怎样应用于数字计算机的计算，同时援引了许多示例。

书中详细地研究了在原始坐标系改变的情况下，变换向量坐标的转移矩阵，并指出了怎样运用矩阵来求解线性微分方程组，分析随机向量散布的统计特性，以及寻求处理轨迹测量的最优算法。

本书可供从事导弹、航空和宇宙航行事业的科技人员参阅，同时对于航空院校的师生也是适用的。

ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ ПОЛЕТА
И. В. Стражева
В. С. Мелкумов
«Машиностроение» 1973

•

飞行力学的向量矩阵法
〔苏〕И. В. 斯特拉热娃, В. С. 梅尔库莫夫 著
关世义 常伯浚 译

•

国防工业出版社出版
北京市书刊出版业营业許可証出字第074号
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

•

850×1168 1/32 印张 7 9/16 199 千字
1977年5月第一版 1977年5月第一次印刷 印数：0,001— 3,000册
统一书号：15034·1543 定价：0.96元

译 者 的 话

随着导弹、航空和宇宙航行事业的发展，使求解各类飞行器的飞行力学问题日益复杂，因此，需要寻找适当的数学工具，以便用简明的形式描述这些问题，同时更有效地利用电子计算机求解它们。正是由于这些原因，向量矩阵方法在飞行力学中得到了日益广泛的重视和应用。

遵照毛主席关于洋为中用的教导，我们翻译了《飞行力学的向量矩阵法》这本书。该书从工程实用的观点，比较系统地介绍了向量和矩阵计算的基本内容。虽然从内容上看，此书与飞行力学的关系比较密切，但就方法本身而言，对其它许多专业也是适用的。

在翻译过程中，我们对原书中的错误和遗漏之处作了补正，但未一一注明，仅在比较重要的地方，用"译注"作了一些说明和补充；同时，对于书中个别不适用的内容，作了删节。由于我们的水平所限，书中一定还有不少缺点和错误，请读者批评指正。

肖业伦同志曾仔细地审阅了全部翻译手稿，并提出了许多改进意见，对我们帮助很大。

译　者

目 录

前　言

在求解飞机、宇宙飞船和其它飞行器的飞行力学问题时，矩阵方法得到了愈益频繁的应用。这是由于近年来这些问题的更加复杂化，因此，必须寻求其数学描述和求解的简便方法，另外，还由于快速数字计算机得到了广泛的应用。

作者写这本书的目的在于，该书能够以通俗易懂的形式使从事于航空和宇航技术并且掌握飞行力学基本原理的科技人员获得实用矩阵方法的知识，而许多求解多维问题的现代方法正是建立在这些知识的基础上的。

该书是在应用飞行力学范围内运用计算技术的实践基础上写成的。作者力图首先从工程实用的观点编写该书。

当求解飞行器的许多飞行力学问题时，常常需要把一种坐标系转换为另一种坐标系。正如第六章所示，此种转换对于实际应用而言，利用矩阵的书写形式将是很紧凑和方便的。

借助于矩阵论也可以进行飞行器运动方程的线性化。当求解飞行力学中经常研究的常系数微分方程时，将用到矩阵函数。书中给出了这些方程(直至四阶)的便于实际应用的解的一般形式。

书中有一章专门研究相关矩阵的性质，当分析随机向量散布的几何特性时利用相关矩阵是适宜的。

最后，用一个特殊问题，即轨迹参数按测量数据的线性估值准确度问题，从实质上说明前面各章内容的应用。

基 本 符 号

纯量用拉丁和希腊字母的明体字表示：

$$a,\ b,\ \cdots$$

$$\alpha,\ \beta,\ \cdots$$

向量用上面带箭头的拉丁字母明体字表示：

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \cdots$$

向量分量写为行的形式：

$$\vec{a}=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n];\quad \vec{a}_i=[a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in}]$$

或列的形式：

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},\quad \vec{a}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{nj}\end{bmatrix}$$

向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 合并为一个向量 $\vec{c}$：

$$\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n]$$

向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\cdots$ 的模为：

$$|\vec{a}|,\ |\vec{b}|,\ \cdots$$

$$a,\ b,\ \cdots$$

单位向量：

$$\vec{e}$$

$$\vec{e}_a=\frac{\vec{a}}{a}。$$

零向量：

$$\vec{0}。$$

向量的运算：

$\vec{a}\pm\vec{b}$——向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 之和(差)；

$\vec{a}\alpha\triangleq\alpha\vec{a}$——向量 $\vec{a}$ 与数 α 之积；

$$\frac{\vec{a}}{\alpha} \triangleq \vec{a}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$——向量 $\vec{a}$ 除以数 α 之商；

$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$——向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的纯量积；

$\vec{a}\times\vec{b}$——三维向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的向量积；

$\langle\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\rangle$——三维向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的混合积。

飞行力学中一些常用的向量：

$\vec{r}=[r_x, r_y, r_z]$——质点位置的向径，该向径在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标为 r_x, r_y, r_z；

$\vec{v}=[v_x, v_y, v_z]$——质点的速度向量，该向量在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标为 v_x, v_y, v_z；

$[\vec{r}, \vec{v}]$——质点的相状态（动态）向量。

一般矩阵用黑体大写字母表示：

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \cdots$$

或

$$[a_{ij}]^{m\times n} \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

由一列组成的矩阵（列矩阵）或由一行组成的矩阵（行矩阵）用上面带箭头的小写黑体拉丁字母表示：

$\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \cdots$——列矩阵；

$\vec{\mathbf{a}}', \vec{\mathbf{b}}', \cdots$——行矩阵。

列矩阵和行矩阵元素的序号用一个下标表示：

$$\vec{\mathbf{a}}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \cdots$$

$$\vec{\mathbf{a}}'=[a_1, a_2, \cdots, a_n], \quad \vec{\mathbf{b}}'=[b_1, b_2, \cdots, b_m], \cdots$$

或者用两个下标表示：

$$\vec{a}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\ b_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix},\quad \vec{a}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix},\ \cdots,\ \vec{a}_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$\vec{b}'_1=[b_{11},\ b_{12},\ \cdots,\ b_{1n}]$$

$$\vec{b}'_2=[b_{21},\ b_{22},\ \cdots,\ b_{2n}]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vec{b}'_m=[b_{m1},\ b_{m2},\ \cdots,\ b_{mn}]。$$

由向量构成的矩阵:

$$\begin{bmatrix}\vdots\\ \vec{a}\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\vdots\\ \vec{r}\times\vec{v}\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_yv_z-r_zv_y\\ r_zv_x-r_xv_z\\ r_xv_y-r_yv_x\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\\ b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

$$[\cdots\cdots\vec{a}\cdots\cdots]=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n],$$

$$[\cdots\cdots\vec{r}\times\vec{v}\cdots\cdots]=[r_yv_z-r_zv_y,\ r_zv_x-r_xv_z,\ r_xv_y-r_yv_x],$$

$$[\vec{a},\ \vec{b}]=[a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ \cdots,\ b_m]。$$

分块矩阵的一般形式:

$$[\mathbf{A}_{ij}]^{s\times t}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}n_1 & n_2\ \cdots & n_t\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc}\overbrace{\mathbf{A}_{11}} & \overbrace{\mathbf{A}_{12}} & \cdots & \overbrace{\mathbf{A}_{1t}}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2t}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \cdots & \mathbf{A}_{st}\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\}m_1\\ \}m_2\\ \ \vdots\\ \}m_s\end{array}$$

由同维(m 维)向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 组成的分块矩阵:

$$\begin{bmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c|c}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_m & b_m & c_m\end{array}\right]\text{——行列向量}$$

$$\begin{bmatrix}\cdots\cdots\ \vec{a}\ \cdots\cdots\\ \cdots\cdots\ \vec{b}\ \cdots\cdots\\ \cdots\cdots\ \vec{c}\ \cdots\cdots\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc}a_1 & a_2 & \cdots & a_m\\ \hline b_1 & b_2 & \cdots & b_m\\ \hline c_1 & c_2 & \cdots & c_m\end{array}\right]\text{——列行向量}$$

零矩阵:

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0 & 0\cdots 0\\ 0 & 0\cdots 0\\ \cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0\cdots 0\end{bmatrix}$$

矩阵的运算

$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}$——矩阵 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 之和(差)。

$\alpha\mathbf{A}$——矩阵 $\mathbf{A}$ 与数 α 之积。

$\mathbf{A}'$——转置矩阵。

$\overline{\mathbf{A}}$——复数共轭矩阵。

$\mathbf{A}^*=\overline{\mathbf{A}}'$——共轭矩阵。

$\mathbf{AB}$——矩阵 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 之积。

$\mathbf{A}^{-1}$——逆矩阵。

$M\{\tilde{\mathbf{A}}\}$——随机矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的数学期望。

方阵的某些形式:

$\mathbf{E}^n$——n 阶单位矩阵。

$\mathbf{C}$——正交矩阵。

$\mathbf{K}$——对称矩阵。

飞行力学中常用的一些矩阵:

$\mathbf{K}_x=M\{\tilde{\mathbf{x}}^\circ\tilde{\mathbf{x}}^{\circ\prime}\}$——随机向量 $\tilde{x}$ 的相关矩阵。

$\mathbf{K}_{xy}=M\{\tilde{\mathbf{x}}^\circ\tilde{\mathbf{y}}^{\circ\prime}\}$——随机向量 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$的互相关矩阵。

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{C}_1(\varphi)&=\left[\begin{array}{c:c:c}1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ \hdashline 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{array}\right]\\
\mathbf{C}_2(\varphi)&=\left[\begin{array}{c:c:c}\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi\\ \hdashline 0 & 1 & 0\\ \hdashline \sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{array}\right]\\
\mathbf{C}_3(\varphi)&=\left[\begin{array}{c:c:c}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ \hdashline -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right]
\end{aligned}\right\}\text{——三维空间里的旋转矩阵。}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \vec{x}}=\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \alpha}{\partial x_n}\right]$$——纯量函数 $\alpha=\alpha(\vec{x})$ 对向量 $\vec{x}$ 的导数。

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \vec{x}^2}=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$——纯量函数 $\alpha=\alpha(\vec{x})$ 对向量 $\vec{x}$ 的二阶导数。

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$——向量函数 $\vec{y}=\vec{y}(\vec{x})$ 对向量 $\vec{x}$ 的导数。

$\mathbf{A}_{t0}^{t}=\dfrac{\partial \vec{x}(\vec{x}_0, t)}{\partial \vec{x}_0}$——相状态从瞬时 t_0 至 t 的转移矩阵。

$e^{\mathbf{A}}$——矩阵 $\mathbf{A}$ 的指数函数。

记号：

$'$——转置，例如 $\mathbf{A}'$，$\vec{\mathbf{a}}'$；

$^{-}$——共轭，例如 $\overline{\mathbf{A}}$，$\bar{\vec{\mathbf{a}}}$，$\bar{\mathbf{a}}$；

*——复数共轭，例如 $\mathbf{A}^*$，$\vec{\mathbf{a}}^*$；

$\triangleq$——按定义相等；

$\left.\begin{matrix}\triangle \\ \delta\end{matrix}\right\}$——对某一给定值之偏差；

$\sim$——表示随机量，例如 $\widetilde{X}$，$\tilde{\vec{x}}$，$\tilde{x}$；

$^\circ$——表示中心化随机量，例如 $\vec{x}^\circ$，x°；

$|\ |$——矩阵的行列式，向量的模或者纯量的绝对值，例如 $|\mathbf{A}|$，$|\vec{a}|$，$|a|$；

$\wedge$——所研究的量按测量数据的估值，例如 $\hat{x}$, $\tilde{x}$。

约定符号：

Sp——矩阵的迹，例如 $\mathrm{Sp}\mathbf{A}$, $\mathrm{Sp}\mathbf{B}$;

Im——复数的虚部，例如 $\mathrm{Im}\mathbf{A}$, $\mathrm{Im}\mathbf{B}$;

Re——复数的实部，例如 $\mathrm{Re}\mathbf{A}$, $\mathrm{Re}\mathbf{B}$;

$M\{\cdot\}$——随机量的数学期望，例如 $M\{\tilde{x}\}$, $M\{\tilde{y}\}$;

$M\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$——矩阵的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列交叉处的 k 阶子式；

$M^{д}\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$——$k$ 阶子式 $M\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$的余子式；

$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$——$k$ 阶子式 $M\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$ 的代数余子式；

$A_{ij}=A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$——矩阵第 i 行和第 j 列交叉处的元素之代数余子式。

下标：

изм——测量值；

ист——真值；

ном——名义值；

пр——矩形的；

ст——阶梯形的；

тр——三角形的；

упр——控制；

ут——修正。

引 言

现在，矩阵理论及其各种推论已经广泛地用于数学、物理学、力学的各个领域。

正如贝尔曼[6]所指出的，矩阵理论可以正确地认为是高等数学的算术。矩阵符号的紧凑性可以为研究在数学及其应用中有着巨大作用的线性代数方程组以及线性微分方程组提供一种方便的工具，用矩阵符号表示可以大大地减少和简化推导，因为矩阵运算具有纯量的算术运算的很多特性。

例如，代数方程组

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{aligned} \tag{0.1}$$

的求解可以归结为由方程组系数 a_{ij} 所组成的矩阵求逆的标准运算。例如，方程组(0.1)可写成矩阵形式：

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{b}}, \tag{0.2}$$

当 $|\mathbf{A}|\neq 0$ 时，它的解具有如下矩阵形式：

$$\vec{\mathbf{x}}=\mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{b}}, \tag{0.3}$$

式中 $\mathbf{A}^{-1}$——矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵。

我们指出，单变量方程式

$$ax=b$$

的解，当 $a\neq 0$ 时，具有类似于(0.3)的形式 $x=a^{-1}b$。

矩阵方法的内容包括：以矩阵形式提出问题以及利用现成的数学方法求解问题。

属于矩阵法的问题有：求解线性代数方程组和微分方程组的

矩阵方法，计算逆矩阵，求矩阵的特征值和特征向量的各种方法等等。所有这些方法以及与矩阵运算有关的其它方法，已由科学工作者进行了大量的研究，并且得到了广泛的应用。

在现代很多的科学研究工作中，数字计算机已经成为一个不可缺少的环节。运用矩阵代数这一工具在计算机上解题时可以大大减少计算工作量，留给技术人员的工作实际上只有给出原始数据和写出必需的矩阵运算。由于利用了矩阵运算的一些专门的标准子程序，使得在计算机上的计算特别简单。

应该指出，在解决飞行力学问题中，矩阵方法得到了日益广泛的运用。

下面举出几个例子。

设多变量函数为

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)。\tag{0.4}$$

这时，可方便地引入一个向量 $\vec{x}$ 作为连结函数的所有自变量 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 的统一的数学对象，例如

$$\vec{x}=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n],\tag{0.5}$$

并把函数写成如下形式

$$y=f(\vec{x})。\tag{0.6}$$

研究函数的集合

$$\left.\begin{aligned}y_1&=f_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\\ y_2&=f_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_m&=f_m(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\end{aligned}\right\}\tag{0.7}$$

并引入一个连结被研究的纯量函数 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m$ 的向量函数 $\vec{y}$。这样就可以把方程组(0.7)写为：

$$\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})。\tag{0.8}$$

当研究自变量取值的微小邻域内的多变量函数时，在实际问题中广泛地应用保留线性项和二次项或者只有线性项的台劳公式。在后一情况下，当编写偏导数矩阵时应用纯量对向量的微分运算是很方便的。