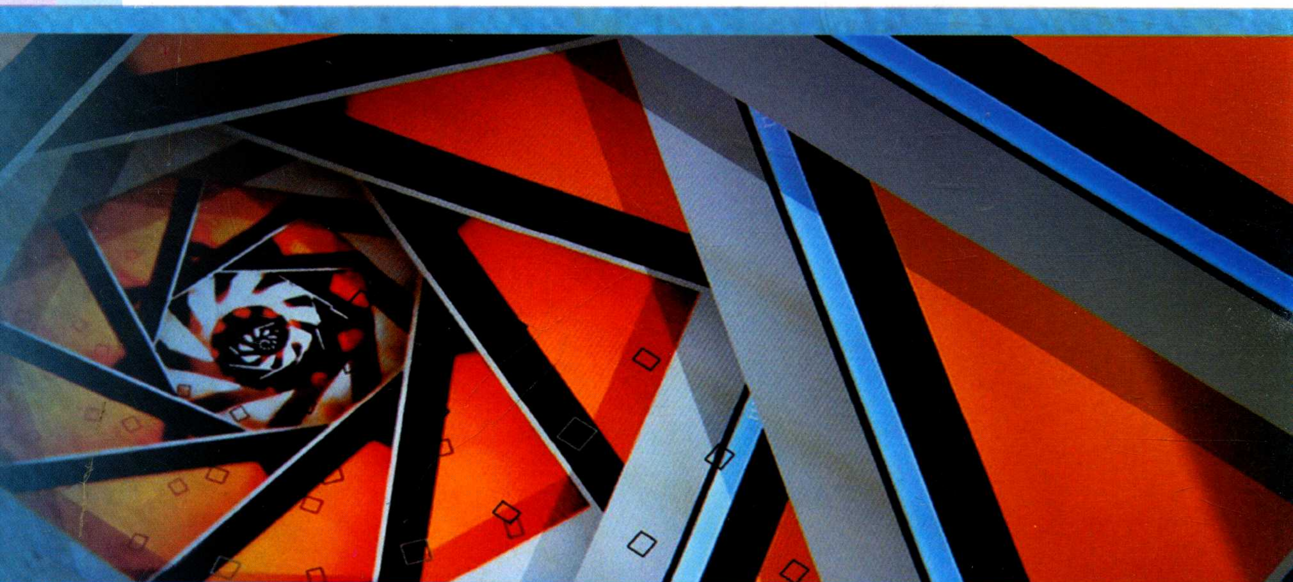
面向“十二五”高职高专规划教材·基础系列

专业数学学习指导

主 编 柳 毅 田立霞



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

面向“十二五”高职高专规划教材·基础系列

专业数学学习指导

主　编　柳　毅　田立霞
副主编　赵珈崎　郑　琦
主　审　李晓春

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

专业数学学习指导/柳毅，田立霞主编．—北京：北京理工大学出版社，2013.6

ISBN 978-7-5640-7018-2

Ⅰ．①专…　Ⅱ．①柳…　②田…　Ⅲ．①高等数学-高等职业教育-教学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 272382 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010) 68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／10.5
字　　数／242 千字
版　　次／2013 年 6 月第 1 版　2013 年 6 月第 1 次印刷
定　　价／24.80 元

文案编辑／钟　博
责任编辑／钟　博
责任校对／陈玉梅
责任印制／王美丽

前　　言

本书是普通高等职业教育面向“十二五”基础系列规划教材《专业数学》的配套辅助教材.

本书是为了适应高职高专教育培养生产、建设、管理、服务需要的应用型人才要求，在认真总结各相关高职高专院校教学教改经验及多年教学实践经验的基础上完成的，是一部能较好地满足高职高专数学教学需要的配套辅助教材.

在编写过程中，作者始终以教育部制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”为依据，根据课程内容，按章节提出基本要求，归纳出重点、难点. 同时对于初学者学习过程中容易出现的共性问题也做出了回答.

我们认为，在高职高专数学课教学过程中培养学生动手实践能力的有效方法之一是训练学生的解题能力. 对于大部分初学者来说，在较短的时间内形成这种能力困难很大. 在本书中，作者对高职高专教材中的典型问题均做出了解答，答案详细、准确，为学生学习和教师教学提供了很好的思路、线索和方法，可以帮助读者少走弯路，以便更快、更好地掌握这门课程. 解题的思路和方法是多样的，建议读者不要因为提示而束缚了自己的思路. 我们赞成刻苦钻研，独立思考，方法不拘一格，这样才能起到对课程内容加深理解和灵活运用的作用.

本书由吉林铁道职业技术学院的柳毅、田立霞老师任主编，吉林铁道职业技术学院赵珈崎以及吉化实验学校郑琦为副主编. 本书由吉林铁道职业技术学院的李晓春老师主审.

在编写过程中尽管我们做出了许多努力，但由于时间仓促，书中难免有不妥之处，敬请各教学单位和读者在使用本书的过程中予以谅解. 本书在编写过程中得到了许多同行的支持和协助，在此表示衷心的感谢!

编　者

目 录

第一章　函　　数

一、基本要求

1. 理解函数的概念，了解分段函数、复合函数的概念；
2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性；
3. 熟悉基本初等函数的定义与图形；
4. 会建立简单实际问题的数学模型.

二、重点——“五会”

1. 会确定函数的定义域；
2. 会计算函数值；
3. 会分解复合函数；
4. 会求已知函数的反函数；
5. 会判断函数的奇偶性.

三、难点

分段函数的概念，建立应用问题的函数模型.

四、问题解答

1. 函数定义的主要特征是什么？

答：如果自变量 x 在允许范围 X 内任取一个数值时，变量 y 按一定的规则总有确定的数值和它对应时，则称 y 是 x 的函数，常记为 $y=f(x)$. 这个定义的关键特征是：(1) x 的取值范围，即函数的定义域. (2) 对应规则，即函数的依赖关系. 可以说函数概念有两个基本要素：定义域、对应规则.

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，才能认为它们是同一个函数.

2. 函数对应规则的形式有几种？

答：有 5 种.

(1) 如果函数对应规则形式是解析表达式 $y=f(x)$，可称函数为显示表示，又称 y 为 x 的显函数.

(2) 如果函数对应规则形式是方程 $F(x,y)=0$，则可称 y 为 x 的隐函数.

(3) 如果函数对应规则是由几个解析表达式而表示的，如 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1\end{cases}$ 则称 $f(x)$ 为分段函数. 它是定义域为 $\mathbb{R}$ 的一个函数，是由三个解析式来表达的.

(4) 如果 x 与 y 通过第三个变量而联系起来，如 $\begin{cases} x=\varphi(x) \\ y=f(x) \end{cases}$，则这种函数关系为参数方程表示的函数.

(5) 如果对应规则是由表格或图形表示出来的，那么常称这种表示为函数的表格表示法或图形表示法.

3. 研究函数的单调性、有界性是否能离开自变量的范围?

答：不能，例如 $y=x^2$ 在 $x<0$ 时，为单调减函数；在 $x>0$ 时，为单调增函数，在 $(-\infty,+\infty)$ 内，为非单调函数.

同样地，$y=x^2$ 在开区间（0，1）内为有界函数；而在定义域（$-\infty$，$+\infty$）内为无界函数.

如果函数 $y=f(x)$ 为单调函数或者有界函数，而没有指明其自变量 x 取值范围时，通常理解该函数在定义域内是单调函数，或者在定义域内是有界函数.

§1.1 集合、绝对值、区间

习题 1-1

1. 设 $A=\{-1,2,4,9,10\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$，求：$A\cap B$，$A\cup B$.

解：$A\cap B=\{-1,2,4\}$，$A\cup B=\{-2,-1,0,1,2,3,4,9,10\}$

2. 设 $A=\{x|x\geqslant 0\}$，$B=\{x|x<5\}$，求：$A\cap B$，$A\cup B$.

解：$A\cap B=\{x|0\leqslant x<5\}=[0,5)$

$A\cup B=\{x|x\text{ 是实数}\}=(-\infty,+\infty)$

3. 设全集 Z 为所有整数的集合，N 为所有自然数的集合，即 $N=\{0,1,2,\cdots\}$，求 N 的补集，即 CN（或 $\overline{N}$）.

解：$\overline{N}=\{-1,-2,-3,\cdots\}$

4. 写出集合 $A=\{1,2,0\}$ 的所有子集.

解：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0\}$，$\{2,0\}$，$\{1,0\}$，$\{1,2\}$，$\{1,2,0\}$ 共计 8 个.

5. 解不等式 $|x|>|x+1|$.

解：$|x|>|x+1|\Rightarrow|x|^2>|x+1|^2\Rightarrow x^2>x^2+2x+1\Rightarrow 2x+1<0\Rightarrow x<-\dfrac{1}{2}$ 于是，不等式 $|x|>|x+1|$ 的解集是：$x<-\dfrac{1}{2}$.

6. 把集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 3\}\cap B=\{x||x+1|<2\}$ 用区间记号表示.

解：$|x-2|\leqslant 3\Rightarrow -3\leqslant x-2\leqslant 3\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 5\Rightarrow A=[-1,5]$

$|x+1|<2\Rightarrow -2<x+1<2\Rightarrow -3<x<1\Rightarrow B=(-3,1)$

$A\cap B=[-1,1)$

7. 把点 2 的 $\dfrac{1}{3}$ 邻域用集合表示.

解：$A=\left\{x\,\middle|\,|x-2|<\dfrac{1}{3}\right\}$ 为所求.

§1.2 映射与函数、反函数

习题1-2

求1~4题的定义域.

1. $y=\sqrt{3-x}$

解：$3-x\geqslant 0\Rightarrow x\leqslant 3\Rightarrow D=(-\infty, 3]$

2. $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$

解：$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\leqslant 4\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x\neq 1\end{cases}$

$\Rightarrow D=[-2, 1)\cup(1, 2]$

3. $y=\lg(1-x)+\sqrt{x+2}$

解：$\begin{cases}x+2\geqslant 0\\ 1-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant -2\\ x<1\end{cases}\Rightarrow D=[-2, 1)$

4. $y=\lg\sin x$

解：$\sin x>0\Rightarrow 2k\pi+0<x<2k\pi+\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$\Rightarrow D=\bigcup\limits_{k\in Z}[2k\pi, (2k+1)\pi]$

在5~6题中，$f(x)$与$\varphi(x)$是否相同，为什么？

5. $f(x)=x$与$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$

解：$D_f=(-\infty, +\infty)$ $D_\varphi=(-\infty, +\infty)$

$\varphi(x)=\sqrt{x^2}=|x|\Rightarrow x<0$时,$\varphi(x)=|x|\neq x=f(x)$

$\Rightarrow f(x)\neq\varphi(x)$

6. $f(x)=\lg(x^2)$与$\varphi(x)=2\lg x$

解：$D_f=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ $D_\varphi=(0, +\infty)\Rightarrow D_f\neq D_\varphi\Rightarrow f(x)\neq\varphi(x)$

7. 圆柱体内接于高为h，底半径为r的圆锥体内，设圆柱体高为x，试将圆柱体的底半径y和体积V分别表示为x的函数.

解：如图1-1所示，根据三角形相似关系

$\Rightarrow\dfrac{l}{r}=\dfrac{x}{h}\Rightarrow l=\dfrac{x}{h}r$(其中$l=r-y$)

$\Rightarrow y=r-l=r-\dfrac{x}{h}r=r\left(1-\dfrac{x}{h}\right)$ $(0<x<h)$

$V=\pi y^2x=\pi r^2\left(1-\dfrac{x}{h}\right)^2x$ $(0<x<h)$

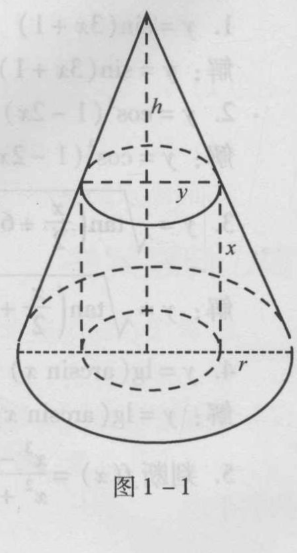


图1-1

8. 设$f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ x^2, & x<0.\end{cases}$求：$f(0)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

解：$f(0)=1\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}+3=4$

9. 设$f(x)=\frac{x+1}{x+5}$，求：$f(1)$，$f(3)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f\left(\frac{x+1}{x+5}\right)$.

解：$f(1)=\frac{1+1}{1+5}=\frac{1}{3}\quad f(3)=\frac{3+1}{3+5}=\frac{1}{2}\quad f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}+5}=\frac{1+x}{1+5x}$

$$f\left(\frac{x+1}{x+5}\right)=\frac{\frac{x+1}{x+5}+1}{\frac{x+1}{x+5}+5}=\frac{2x+6}{6x+26}=\frac{x+3}{3x+13}$$

10. 设$H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$求：$H(x-1)$，$H(x)-H(x-1)$

解：$H(x-1)=\begin{cases}0, & x-1<0,\\ 1, & x-1\geqslant 0.\end{cases}=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

$$H(x)-H(x-1)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

11. 设$f(x+1)=x^2+3x+5$，求：$f(x)$，$f(x-1)$.

解：$f(x+1)=(x^2+2x+1)+(x+1)+3=(x+1)^2+(x+1)+3$

$\Rightarrow f(x)=x^2+x+3$

$\Rightarrow f(x-1)=(x-1)^2+(x-1)+3=x^2-x+3$

§1.3 初等函数

习题1-3

1～4题中是由哪些函数复合的？

1. $y=\sin(3x+1)$

解：$y=\sin(3x+1)$是由$y=\sin u$，$u=3x+1$复合的.

2. $y=\cos^3(1-2x)$

解：$y=\cos^3(1-2x)$是由$y=u^3$，$u=\cos v$，$v=1-2x$复合的.

3. $y=\sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}+6\right)}$

解：$y=\sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}+6\right)}$是由$y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}+6$复合的.

4. $y=\lg(\arcsin x)$

解：$y=\lg(\arcsin x)$是由$y=\lg u$，$u=\arcsin x$复合的.

5. 判断$f(x)=\frac{x^3-x}{x^2+1}$，$x\in(-\infty,+\infty)$的奇偶性.

解：$f(-x)=\dfrac{(-x)^3-(-x)}{(-x)^2+1}=\dfrac{-x^3+x}{x^2+1}=-\dfrac{x^3-x}{x^2+1}=-f(x)$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$是奇函数.

6. 判断$f(x)=(1-x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{2}{3}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$的奇偶性.

解：$f(-x)=[1-(-x)]^{\frac{2}{3}}+[1+(-x)]^{\frac{2}{3}}=(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}=f(x)$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$是偶函数.

7. 判断$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\in(-1,1)$的奇偶性.

解：$f(-x)=\lg\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\dfrac{1+x}{1-x}=-\lg\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$

$\Rightarrow f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$是奇函数.

8. 求$\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\sin\dfrac{1}{3}x$，$\tan 2x$的周期.

解：$\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$是正弦型函数，$\omega=3\Rightarrow$周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{3}$

$\sin\dfrac{1}{3}x$是正弦型函数，$\omega=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$

$\tan 2x$是正切型函数，$\omega=2\Rightarrow$周期$T=\dfrac{\pi}{\omega}=\dfrac{\pi}{2}$

9. 求函数$f(x)=|\sin x|$的周期.

解：令$T=\pi$，$f(T+x)=f(\pi+x)=|\sin(\pi+x)|$

$=|-\sin x|=|\sin x|=f(x)$

$\Rightarrow$函数$f(x)=|\sin x|$的周期$T=\pi$

第二章　极限与连续

一、基本要求

1. 了解极限及左极限、右极限的概念；
2. 掌握极限的四则运算法则；
3. 掌握两个重要极限；
4. 了解无穷小量、无穷大量的概念及相互关系，了解无穷小量的性质和无穷小量的比较，掌握5个等价无穷小量；
5. 理解函数在一点连续的概念，了解间断点的分类；
6. 了解初等函数的连续性及在闭区间上连续函数的性质.

二、重点——“六法”

1. 有界函数与无穷小乘积为无穷小求极限法；
2. 针对“$\frac{0}{0}$”型有理分式函数消掉公因式再求极限法；
3. “找u、搭配”的两个重要极限法；
4. 等价无穷小替换的“长等号法”；
5. 针对“$\frac{0}{0}$”型无理分式函数求极限的“共轭因式法”；
6. 找出间断点并通过求极限进行分类的方法.

三、难点

1. 熟记当$u \to 0$时，

（1）$\sin u \sim u$　　（2）$\tan u \sim u$　　（3）$1-\cos u \sim \frac{u^2}{2}$

（4）$\ln(1+u) \sim u$　　（5）$e^u - 1 \sim u$

2. 间断点的分类，分段函数在分界点的连续性.

四、问题解答

1. 极限在高等数学课程中的作用是什么？

答：极限描述了函数自变量在给定的变化过程中对应的函数值的变化趋势. 极限是微积分的理论基础，高等数学中最重要的基本概念几乎都与极限有关.

极限是从常量到变量，从有限到无穷，从初等数学过渡到高等数学的重要思想方法和数学手段.

2. 极限的定义是否给出了求极限的方法?

答：极限定义只是精确地描述了极限的实质，并没有提供求极限的方法.

3. 在什么情况下要考虑函数在一点的左右极限?

答：左极限与右极限是考查自变量 x 从某一确定方向趋于 x_0 时相应的函数值的变化趋势. 如研究分段函数在分界点处的极限问题时，一般需要考虑左右极限是否存在且相等；还有，对于某个具体函数，如 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ 在 $x=0$ 处，只能考虑右极限.

4. 怎样理解 $f(x)$ 在点 x_0 处连续性的两个定义?

答：与极限概念相仿，连续性也是描述自变量在给定的变化过程中，对应的函数值的变化趋势. $f(x)$ 在一点 x_0 连续性的两种定义是等价的，它们的前提条件都是 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域有定义.

(1) 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续. 称这种定义为连续的增量形式定义.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续. 称这种定义为连续性的极限形式定义.

增量形式的定义形象地描述了连续性的特性；极限形式的定义把连续性与极限联系起来了. 两种定义形式不同，但本质相同，有共同的特性即构成连续性的三个要素（有定义，有极限，极限值等于函数值).

5. 无穷小量是否是绝对值很小的数?

答：无穷小量在高等数学中占有极为重要的地位，必须重视. “无穷小量”字面上似乎是讨论量的大小，这是一种误解，无穷小量是表达在自变量 x 的某个变化过程中，对应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势为 $|f(x)|$ 无限地变小，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

所以必须将无穷小量与很小的数区别开来，不可混为一谈. 同理，无穷大量也是描述函数在某一变化过程中的变化趋势，不可与很大的数混为一谈.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷小量. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}0=0$，所以零是无穷小量中唯一的数.

§2.1 数列的极限、函数的极限

习题 2-1

1. 列表观察 $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+5)=?$，$\lim\limits_{x\to 1^+}(x+5)=?$，$\lim\limits_{x\to 1}(x+5)=?$.

解：列表观察（见表 2-1)

表 2-1

x	…	0.999	0.999999	0.999999999	…
$f(x)$	…	5.999	5.999999	5.999999999	…
$\lvert f(x)-6\rvert$	…	0.001	0.000001	0.000000001	…

经列表观察，$\lim\limits_{x\to 1^-}(x+5)=6$.

继续列表观察（见表2－2）.

表2－2

x	…	1.001	1.000001	1.000000001	…
$f(x)$	…	6.001	6.000001	6.000000001	…
$\|f(x)-6\|$	…	0.001	0.000001	0.000000001	…

经继续列表观察，$\lim\limits_{x\to 1^+}(x+5)=6$.

综合上述观察结果，$\lim\limits_{x\to 1}(x+5)=6$.

2. 列表观察 $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-9}{x-3}=?$，$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}=?$，$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=?$.

解：列表观察（见表2－3）.

表2－3

x	…	2.999	2.999999	2.999999999	…
$f(x)$	…	5.999	5.999999	5.999999999	…
$\|f(x)-6\|$	…	0.001	0.000001	0.000000001	…

经列表观察 $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$，继续列表观察（见表2－4）.

表2－4

x	…	3.001	3.000001	3.000000001	…
$f(x)$	…	6.001	6.000001	6.000000001	…
$\|f(x)-6\|$	…	0.001	0.000001	0.000000001	…

经继续列表观察，$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$.

综合上述观察结果，$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$.

§2.2 无穷小量与无穷大量，无穷小量的运算

习题2－2

1. 指出下列各题中哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？

（1）$f(x)=\dfrac{x-2}{x}$，当 $x\to 0$ 时.

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{0}{0-2}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x}=\infty$.

于是，当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\dfrac{x-2}{x}$ 是无穷大量.

（2）$f(x)=\lg x$，当 $x\to0^+$ 时.

解：根据对数函数的图像，$\lim\limits_{x\to0^+}\lg x=-\infty$.

于是，当 $x\to0^+$ 时，$f(x)=\lg x$ 是无穷大量.

（3）$f(x)=10^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to0^+$ 时.

解：由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，故 $\lim\limits_{x\to0^+}10^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

于是，当 $x\to0^+$ 时，$f(x)=10^{\frac{1}{x}}$ 是无穷大量.

（4）$f(x)=10^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to0^-$ 时.

解：由于 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，故 $\lim\limits_{x\to0^-}10^{\frac{1}{x}}=0$.

于是，当 $x\to0^-$ 时，$f(x)=10^{\frac{1}{x}}$ 是无穷小量.

（5）$f(x)=1-10^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to\infty$ 时.

解：由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}10^{\frac{1}{x}}=1$，进而 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-10^{\frac{1}{x}})=0$.

于是，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=1-10^{\frac{1}{x}}$ 是无穷小量.

2. 说明下面两题是无穷小量的理由.

（1）$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\cos\dfrac{1}{x^2}$

解：由于 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，且 $\left|\cos\dfrac{1}{x^2}\right|\leqslant1$，即函数 $\cos\dfrac{1}{x^2}$ 是有界函数.

于是，$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\cos\dfrac{1}{x^2}=0$.

（2）$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$

解：由于 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，且 $\left|1-\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$，即函数 $1-\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数.

于是，$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$.

§2.3　极限运算法则

习题 2-3

求下列有理分式函数的极限.

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$

解：$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}=\dfrac{2^2+5}{2^2-3}=\dfrac{9}{1}=9$

2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+3}{x-3}$

解：因为$\lim\limits_{x\to3}(x-3)=0$，$\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$，所以$\lim\limits_{x\to3}\frac{x+3}{x-3}=\infty$

3. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$

解：$\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}(x+4)=4+4=8$

4. $\lim\limits_{x\to7}\frac{x-7}{x^2-49}$

解：$\lim\limits_{x\to7}\frac{x-7}{x^2-49}=\lim\limits_{x\to7}\frac{x-7}{(x-7)(x+7)}=\lim\limits_{x\to7}\frac{1}{x+7}=\frac{1}{7+7}=\frac{1}{14}$

5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

解：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=\frac{1-1}{1\times(1+1)}=0$

6. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

解：$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x(x+1)}{x-3}$

$$=\frac{-2\times(-2+1)}{-2-3}=\frac{2}{5}$$

7. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1+x+x^2}{1-x^3}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-\frac{1+2}{1+1+1^2}=-1$$

8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$（$m$，$n$ 为正整数）

解：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}=\frac{1^{m-1}+1^{m-2}+\cdots+1+1}{1^{n-1}+1^{n-2}+\cdots+1+1}=\frac{m}{n}$$

求下列有理分式函数的极限.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x-x^3}{x+x^3}$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x-x^3}{x+x^3}=\frac{-1}{1}=-1$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{3x^3+1}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{3x^3+1}=0$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+5}{x+1}$