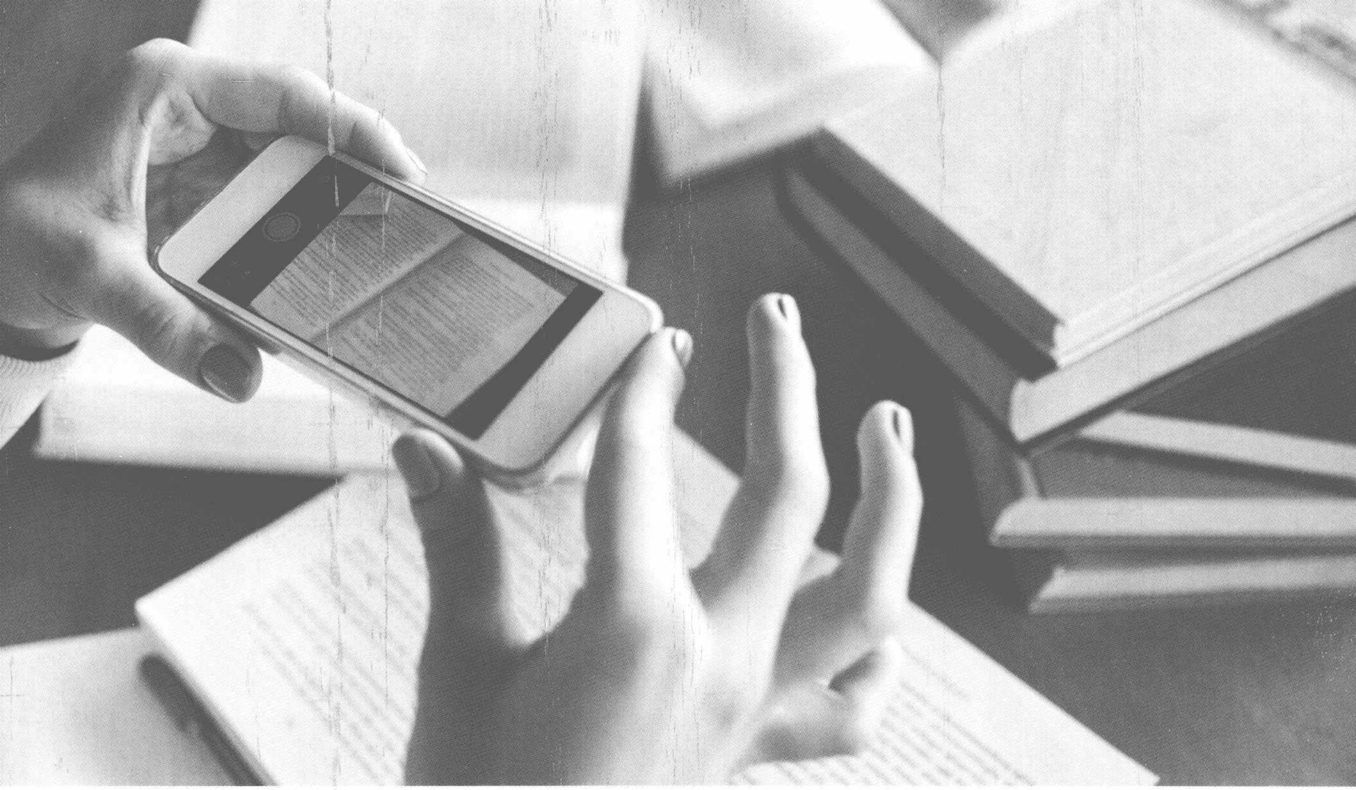
"十三五"应用型本科基础课规划教材

线性代数

主　编　郑绿洲
副主编　刘伟明

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



"十三五"应用型本科基础课规划教材

线性代数

主　编　郑绿洲
副主编　刘伟明

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书是以教育部工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求为依据而编写的通用教材. 全书共分6章，包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性与线性方程组的解的结构、相似矩阵及二次型、线性代数数学实验等. 绝大部分节后配有基础习题，第1章到第5章每章后配有不同层次的复习题，以满足不同层次学生的需要，书末附有部分习题参考答案. 本书内容由浅入深，由易到难，由具体到抽象，同时将数学建模和数学实验融入教学，体现应用性、实用性、信息化、网络化的特征.

本书可作为高等院校工科类、经济管理类专业的线性代数教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/郑绿洲主编. —北京：机械工业出版社，2016.1
“十三五”应用型本科基础课规划教材
ISBN 978-7-111-52848-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①郑… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第021395号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 陈崇昱
责任校对：刘秀芝 封面设计：路恩中
责任印制：乔 宇
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2016年5月第1版第1次印刷
190mm×215mm · 14.5印张 · 359千字
标准书号：ISBN 978-7-111-52848-7
定价:29.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

前　言

线性代数是我国高等院校非数学专业的重要基础课，也是我国硕士研究生入学考试统考课程内容之一，对学生今后专业课程学习和科学素养形成起着非常重要的作用，因此，线性代数的教学内容和改革一直都是数学工作者十分关心的问题．同时，由于各高校学生基础有差异，线性代数教材的内容有必要考虑课程的特点以及不同层次学生的水平．我们根据多年的教学实践，以及一些专家的建议，编写了这本通俗易懂，适合不同层次读者的教材．本书的编写主要考虑了以下方面：

1. 将理论与实际应用有机结合

本书重组教学内容，理顺线性代数的基本概念和基本内容，深入研讨线性代数的思想，注重吸收以往教材的精华，但又不拘泥于以往教材的内容和形式，淡化定理的推导，强调方法的训练，引入了大量应用例题，充分体现了线性代数与实际应用之间的联系．

2. 将数学建模思想与教学内容有机结合

教育部在高等教育“质量工程”中明确提出要加强实践性教学改革与人才培养模式的改革创新．为了培养高质量的实用型和创新型人才，在线性代数教材中就应该将线性代数理论与实际应用问题进行科学整合．本书强调通过数学建模思想，培养学生解决实际问题的意识和能力，从而达到提高教学质量，培养创新型人才的目标．

3. 将例题和习题与不同层次学生的需求有机结合

考虑到学生层次有所差异，对学习本课程的需求各不相同，我们在例题和习题的安排上兼顾不同层次，难易结合，既有基础练习，也有考研真题，这样，既有利于提高学生的学习兴趣，也方便教师根据学生的学习情况适当选择．

4. 将数学实验与线性代数教学内容有机结合

在计算机广泛使用的今天，线性代数课程应该注重与新的计算技术的结合．现代的科学计算问题达到几百、几千的数量级，如果依然用手工计算来解决线性代数中的问题，根本无法把它推广到应用中去．所以，本书增加了线性代数数学实验，大大增强了线性代数的实用性．

本教材共分 6 章. 第 1 章至第 6 章分别介绍了行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量的线性相关性与线性方程组的解的结构、相似矩阵及二次型、线性代数数学实验. 对于教材中部分证明内容和标了“ * ”号的章节，教学时可根据实际情况选用.

参加本书编写的老师有郑绿洲、刘伟明、张金娥、甘露、明巍等. 本书的编写参考了部分国内外优秀教材，在此，我们向有关作者表示诚挚的谢意. 本书得到了湖北师范学院自编教材建设项目的资助，同时还得到了湖北师范学院数学与统计学院领导和老师们的关心与支持，在此一并致谢.

限于作者的水平，本书难免存在缺点和错误，我们诚恳地希望读者批评指正.

编　者

目　录

第 1 章 行列式

行列式作为线性代数中重要的概念和工具，广泛应用于数学、工程技术及经济等众多领域，在研究线性方程组理论、矩阵对角化和正定二次型中起着重要作用．本章主要在二、三阶行列式的基础上，介绍 n 阶行列式的定义、性质和计算方法，最后将介绍用行列式解 n 元线性方程组的克拉默（Cramer）法则．

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶与三阶行列式

行列式的研究起源于对线性方程组的研究，中学阶段，我们曾用消元法解线性方程组．设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

用消元法可得，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

式（1-2）中的分子、分母都是四个数分成两对相乘再相减而得．其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组（1-1）中的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组（1-1）中的位置排成两行两列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}. \tag{1-3}$$

定义 1.1 表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为由数表（1-3）所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1-4}$$

数 a_{ij}（$i=1, 2; j=1, 2$）称为行列式（1-4）的元素或元. 元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式（1-4）的（i, j）元.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆. 如图 1-1 所示，把 a_{11}到 a_{22}的实连线称为主对角线，a_{12}到 a_{21}的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

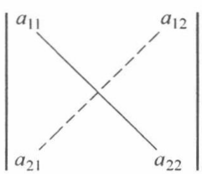


图 1-1

利用二阶行列式的概念，式（1-2）中 x_1和 x_2 的分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组（1-1）的解可以写成便于记忆的形式

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}.$$

注：这里的分母 D 是由方程组（1-1）的系数所确定的二阶行列式（称系数行列式），x_1的分子 D_1是用常数项 b_1、b_2替换 D 中 x_1的系数 a_{11}、a_{21}所得的二阶行列式，x_2的分子 D_2是用常数项 b_1、b_2替换 D 中 x_2的系数 a_{12}、a_{22}所得的二阶行列式.

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2=-1, \\ 4x_1-\ x_2=14. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-3-20=-23\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 14 & -1 \end{vmatrix}=1-70=-69, D_2=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}=42-(-1\times 4)=46,$$

因此 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-69}{-23}=3$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{46}{-23}=-2.$

类似地，在三元线性方程组的求解中可引出三阶行列式的定义.

设三元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

用消元法可得，该方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$
$$D_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}b_3,$$
$$D_2=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}b_3a_{23}-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31},$$
$$D_3=b_3a_{11}a_{22}+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}.$$

定义 1.2 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1-5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1-6}$$

式（1-6）称为数表（1-5）所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循图 1-2 所示的对角线法则：将图中的三条实线看作平行于主对角线的连线，三条虚线看作平行于副对角线的连线，实线上三元素的乘积冠正号，虚线上三元素的乘积冠负号.

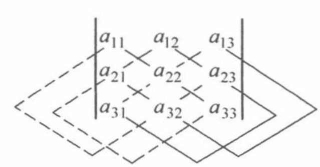


图 1-2

例 1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & -1 & 4\\ 3 & -4 & 1\end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$D=1\times(-1)\times1+2\times4\times3+(-3)\times(-2)\times(-4)-(-3)\times(-1)\times3-2\times(-2)\times1-1\times4\times(-4)=10.$$

例 1.3 求一个二次多项式 $f(x)$，使 $f(1)=0$，$f(2)=3$，$f(-3)=28$.

解 设所求的二次多项式为 $f(x)=ax^2+bx+c$，依题意得线性方程组

$$\begin{cases}a+b+c=0,\\ 4a+2b+c=3,\\ 9a-3b+c=28.\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 9 & -3 & 1\end{vmatrix}=-20\neq0,D_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 28 & -3 & 1\end{vmatrix}=-40,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 1\\ 9 & 28 & 1\end{vmatrix}=60,D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 3\\ 9 & -3 & 28\end{vmatrix}=-20.$$

于是得 $a=\dfrac{D_1}{D}=2$，$b=\dfrac{D_2}{D}=-3$，$c=\dfrac{D_3}{D}=1$.

从以上讨论自然会想到，对于 n 个未知数 n 个线性方程的方程组，它的解是否也能用 n 阶行列式来表示？若能，如何来定义 n 阶行列式？显然，当 n 较大时用上述类似的消元法是无法推导的.

注： 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式. 解决的思路是：观察三阶行列式的表达式，寻找新的规律，然后按这些规律来定义 n 阶行列式.

1.1.2 全排列及其逆序数

为了给出 n 阶行列式的概念，这里先引入有关全排列的知识.

定义 1.3 把 n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的全排

列，简称排列.

如：自然数 1，2，3 构成的所有排列有 3! = 6 种，其中任一排列记为 $p_1p_2p_3$，它们是

$$123,\ 231,\ 312,\ 132,\ 213,\ 321.$$

显然，n 个不同的元素构成的所有排列有 n! 种.

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序（例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序）.

定义 1.4 *设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数 1，2，…，n 的一个排列，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 1 个逆序. 排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数.*

如：在排列 321 中，构成逆序的数对有 32，31，21，因此此排列的逆序数 $t=3$.

定义 1.5 *逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.*

如：排列 321 为奇排列，自然排列 $123\cdots(n-1)n$ 的逆序数 $t=0$，为偶排列.

下面来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i，全体元素的逆序数之总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

即是这个排列的逆序数.

例 1.4 求排列 32514 的逆序数.

解 3 排在首位，逆序数是 0；2 前面比 2 大的数有 1 个（3），逆序数是 1；5 是最大数，逆序数是 0；1 前面比 1 大的数有 3 个（3，2，5），逆序数是 3；4 前面比 4 大的数有 1 个（5），逆序数是 1；于是这个排列的逆序数为

$$t=0+1+0+3+1=5.$$

下面讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系.

定义 1.6 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种做出新排列的手续称为对换. 将相邻两个元素对换，称为相邻对换.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$. 显然 a、b 以外的数彼此间的逆序情况在两个排列中是一样的，a、b 以外的数与 a 或 b 的逆序情况在两个排列中也是一样的. 现在看 a、b，若 $a<b$，则经对换后，逆序数增加 1，即后一排列的逆序数比前一排列多 1；若 $a>b$，则经对换后，逆序数减少 1，即后一排列的逆序数比前一排列少 1. 所以无论哪种情形，都改变了排列的奇偶性.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$，对它作 m 次相邻对换，变成 $a_1 \cdots a_l b_1 \cdots b_m a b c_1 \cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$，总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1 \cdots a_l\ a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 变成排列 $a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列，因此知推论成立.

1.1.3 *n* 阶行列式的定义

先观察三阶行列式的表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

容易看出：

（1）上式右边的每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积. 所以任一项除正、负号外都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的形式，其中第一个下标（行标）排成标准次序 123，第二个下标（列标）排成 $p_1p_2p_3$，它是 1，2，3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 6 种，对应上式右端共含 6 项.

（2）各项的正、负号与列标的排列对照.

带正号的三项列标排列是123，312，231；

带负号的三项列标排列是321，213，132.

经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列. 因此各项所带的正、负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数.

综上分析，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对1，2，3这三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此，可以把行列式推广到一般情形.

定义1.7 设有 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

做出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n} \tag{1-7}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数1，2，…，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共 $n!$ 个，因而形如式(1-7)的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为n阶行列式，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即有 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$

简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 称为行列式 D 的（i，j）元.

显然，定义式的任一项还可以写成 $(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$ 形式，因此，n 阶行列式也可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

其中 t 为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1，2，…，n 的所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 取和.

按此定义的二阶、三阶行列式，与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的.

注: 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，此时不要与绝对值记号相混淆.

例 1.5 证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

其中未写出的元素都是 0.

证 第一式左端称为对角行列式，其结果是显然的，下面只证第二式.

在第二式左端中，λ_i 为行列式的（i，$n-i+1$）元，故记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^t a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}=(-1)^t \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

其中 t 为列标排列为 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，故