工科数学基础

概率统计教程
学习指导

姚孟臣 编

大学出版社

工科数学基础

概率统计教程学习指导

姚孟臣　编

清华大学出版社
北京

内容提要

本书是与《概率统计教程》(姚孟臣,清华大学出版社,2007)配套的学习指导书. 依据《工科本科数学基础课教学基本要求》及《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,并结合编者多年的教学及考研辅导的经验编写的. 本书为主教材中的各章配有基本要求、内容简介、典型例题分析、练习题、练习题解答共5部分内容.

本书归纳条理明晰,重点讲述透彻,考点分析详细,例题选配多样,习题配置丰富,既便于学生复习自学,也利于考生备考,可供高等院校工科类各专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计教程学习指导/姚孟臣编. —北京:清华大学出版社,2007.7
(工科数学基础)
ISBN 978-7-302-15014-5

Ⅰ.概… Ⅱ.姚… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第048332号

责任编辑: 刘 颖 王海燕
责任校对: 刘玉霞
责任印制: 李红英
出版发行: 清华大学出版社 **地 址:** 北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn **邮 编:** 100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机: 010-62770175 **邮购热线:** 010-62786544
投稿咨询: 010-62772015 **客户服务:** 010-62776969
印 刷 者: 北京市昌平环球印刷厂
装 订 者: 三河市溧源装订厂
经 销: 全国新华书店
开 本: 185×230 **印 张:** 16.25 **字 数:** 324千字
版 次: 2007年7月第1版 **印 次:** 2007年7月第1次印刷
印 数: 1~4000
定 价: 23.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177转3103 产品编号:020963-01

丛书序

随着我国社会和经济建设的高速发展，全国高等教育规模日益扩大，工科院校各专业对公共数学课的课程建设、教学内容的更新和教材建设提出了新的要求．与此同时，全国硕士研究生入学统一招生考试的规模也在不断扩大，其中数学考试对于高等院校工科类专业的公共数学课的影响也愈来愈大．为适应这个变化，许多学校工科类专业的数学基础课，经过多年调整，实际教学大纲已经与工科类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容逐步协调一致．"工科数学基础"正是适应我国高校工科类专业教学改革的新形势、新变化，适时推出的一套教材．全套教材包括《高等数学教程》（上册、下册）、《线性代数教程》、《概率统计教程》，以及相应的学习指导用书．

本套教材是参照教育部教学指导委员会颁布的《工科类本科数学基础课教学基本要求（修改稿）》和教育部颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求编写的．突出了对这两个大纲所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练，内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求．

本套教材针对主教材配套推出了《高等数学教程学习指导》、《线性代数教程学习指导》、《概率统计教程学习指导》这三本相应的学习指导用书．主要通过精选典型例题，对教材的每个章节进行系统的归纳总结，说明重点难点，进行答疑解惑，其中包括对教材中多数习题提供解答，便于学生自学．此外，还着重对教材中的题目类型作必要的补充，增加了相当数量的研究生入学统一考试试题题型，力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力方面，帮助学生实现跨越，达到全国硕士研究生入学统一考试对数学（一）、（二）的要求．因此，这三本学习指导用书完全可以实现全国硕士研究生入学统一考试数学考试复习参考书的功能，在日后报考研究生时发挥积极作用．

参加《工科数学基础》的编写人员大多具有 30 年以上从事公共数学基础课程的教学研究、教材研究和教学实践的经历，其中很多教师还多年从事研究生入学统一考试数学考试考前辅导工作，有相当高的知名度．因此，作者在把握工科类公共数学基础课程的教学内容和要求、时数安排和难易程度，以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验，这对于本套教材的编写质量是一个可靠的保障．

我们知道，一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨炼和广大读者的支持与帮助．欢迎广大读者对本套教材的不足提出批评和建议．

《工科数学基础》作者

2007 年 3 月

前　　言

《概率统计教程学习指导》是与《概率统计教程》(姚孟臣，清华大学出版社，2007)配套的辅助教材．编写本书的目的是使学生在学习原教材的基础上，进一步开阔眼界，拓展思路，多实践，多练习，以提高分析问题和解决问题的能力．本书具有以下几个特点：

1．在章节和内容的编排上与原教材结合紧密，在叙述方式以及符号的使用等方面都与原教材保持一致．在例题和习题的选编上较原教材具有更多的信息量，讨论也更加深入全面．

2．对重要概念、定理、公式以表格的形式进行了简明扼要的总结归纳，重点突出，层次清晰，便于读者记忆和掌握．

3．每章归纳出各种基本题型．全书共精选了140道典型例题，选题广泛且具代表性，并详细地介绍了各种题型的解题方法和技巧，在对一些问题的讨论和分析中融合了作者在教学实践中的经验和体会．

4．每章选配了两种习题，有计算题、证明题，也有近年来各种考试中常采用的客观题(填空题和选择题)．在习题的编排上注意难易结合，既有基本题，也有较难的综合题．全书共配置了340余道各类习题，读者可以借此进行基本训练，提高独立解题能力，并检验自已对所学知识的掌握程度．每章后面给出习题参考答案，部分习题给出了解法或提示，以便于读者自学．

本书可以作为理工类、财经类学生的学习参考书，也可以作为硕士研究生入学考试的辅导材料．

由于水平所限，加之时间仓促，本书一定有许多不妥之处，恳请读者多加批评、指正．

编　者

2007年3月

目　　录

第1章

随机事件及其概率

1.1 基本要求

1. 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，重点掌握事件的关系与运算.

2. 理解概率与条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会运用与古典概型、几何概型计算有关的概率.

3. 掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式及贝叶斯(Bayes)公式.

4. 理解事件独立性的概念，掌握利用事件独立性计算有关概率的各种方法；理解独立重复试验的概念，掌握运用二项概型计算有关的概率的各种方法.

1.2 内容简介

1.2.1 样本空间与随机事件

1. 随机现象

在一定条件下，具有多种可能的结果的现象称为**随机现象**. 这类现象的一个共同点是，事先不能预言多种可能的结果中究竟出现哪一种.

2. 随机试验与随机事件

如果一个试验满足下面的三个条件：

(1) 在相同的条件下可以重复进行；

(2) 试验都有哪些可能的结果是明确的；

(3) 每次试验的具体结果在试验前是无法得知的.

那么就称它是一个**随机试验**，以后简称为**试验**，一般用字母 E 表示.

在随机试验中，每一个可能出现的不可分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事**

件或**样本点**,用 ω 表示;而由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**,记为 Ω.

所谓**随机事件**是样本空间 Ω 的一个子集,随机事件简称为**事件**,用字母 A,B,C 等表示. 因此,某个事件 A 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 ω 发生,记为 $\omega\in A$.

1.2.2　事件之间的关系与运算

1. 事件的包含关系与等价关系

设 A,B 为两个事件. 如果 A 中的每一个样本点都属于 B,那么称事件 B **包含**事件 A,或称事件 A **包含于**事件 B,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

如果 $A\supset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立,那么称事件 A 与事件 B **等价**或**相等**,记为 $A=B$.

2. 事件的并与交

设 A,B 为两个事件. 将至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的**并**或**和**,记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.

设 A,B 为两个事件. 将同时属于 A 及 B 的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的**交**或**积**,记为 $A\cap B$ 或 $A\cdot B$,有时也简记为 AB.

3. 事件的互不相容关系与事件的逆

设 A,B 为两个事件,如果 $A\cdot B=\varnothing$,那么称事件 A 与 B 是**互不相容**的(或**互斥**的).

事件的互不相容关系也可以推广到多于两个事件的情形. 即,如果 $A_i\cdot A_j=\varnothing\ (i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,这时称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是**互不相容**的(或**互斥**的).

对于事件 A,把不包含在 A 中的所有样本点构成的集合称为事件 A 的**逆**(或 A 的**对立事件**),记为 $\overline{A}$,并规定它是事件的基本运算之一.

在一次试验中,事件 A 与 $\overline{A}$ 不会同时发生(即 $A\cdot\overline{A}=\varnothing$,称它们具有**互斥性**),而且 A 与 $\overline{A}$ 至少有一个发生(即 $A+\overline{A}=\Omega$,称它们具有**完全性**). 这就是说,事件 A 与 $\overline{A}$ 满足

$$\begin{cases} A\overline{A}=\varnothing, \\ A+\overline{A}=\Omega. \end{cases}$$

有了事件的三种基本运算,就可以定义事件的其他一些运算. 例如,称事件 $A\overline{B}$ 为事件 A 与 B 的**差**,记为 $A-B$. 可见,事件 $A-B$ 是由包含于 A 而不包含于 B 的所有样本点构成的集合.

事件的关系和运算如图 1.1 所示.

事件的运算主要满足下列规则:

(1) 交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) 德摩根(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

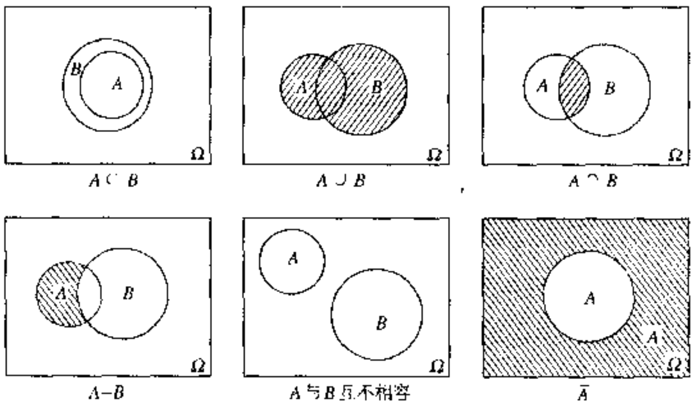

图 1.1

德摩根律可以推广到任意多个事件的场合.

1.2.3 概率的定义与性质

1. 概率的公理化定义

定义 设 E 是一个随机试验，Ω 为它的样本空间，以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域，定义一个函数 $P(A)$(其中 A 为任一随机事件)，且 $P(A)$满足以下三条公理，则称函数 $P(A)$为事件 A 的**概率**.

公理 1 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

公理 2 $P(\Omega)=1$.

公理 3 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$两两互斥，则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

2. 概率的统计定义

定义 在一组不变的条件 S 下，独立地重复做 n 次试验. 设 μ 是 n 次试验中事件 A 发生的次数，当试验次数 n 很大时，如果 A 的频率 $f_n(A)$稳定地在某一数值 p 附近摆动；而且一般说来随着试验次数增多，这种摆动的幅度会越来越小，则称数值 p 为事件 A 在条件组 S 下发生的**概率**. 记作

$$P(A)=p.$$

1.2.4 古典概型

如果随机试验具有特性：

(1) 试验的结果是有限个；

(2) 每个结果出现的可能性是相同的.

则称此随机试验为**古典概型随机试验**.

定义 设古典概型随机试验的基本事件空间由 n 个基本事件组成，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$. 如果事件 A 是由上述 n 个事件中的 m 个组成，则称事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

所谓**古典概型**就是利用关系式(1.1)来讨论事件发生的概率的数学模型.

1.2.5 几何概型

如果随机试验具有特性：

(1) 试验的结果是无限且不可列的；

(2) 每个结果出现的可能性是均匀的.

则称此随机试验为**几何型随机试验**. 在几何型随机试验中，通过几何度量(长度、面积、体积等)来计算事件出现的可能性.

定义 设 E 为几何型的随机试验，其基本事件空间中的所有基本事件可以用一个有界区域来描述，而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件，则称事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}, \tag{1.2}$$

其中 $L(\Omega)$ 与 $L(A)$ 分别为 Ω 与 A 的**几何度量**.

所谓**几何概型**就是利用关系式(1.2)来讨论事件发生的概率的数学模型.

注意，上述事件 A 的概率 $P(A)$ 只与 $L(A)$ 有关，而与 $L(A)$ 对应区域的位置及形状无关.

1.2.6 概率基本性质的应用

由概率公理化定义中的三条公理可以推导出概率的一些基本性质.

性质 1(有限可加性) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 2(加法公式) 设 A,B 为任意两个随机事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

上面的加法公式可以推广到有限多个事件的情况，例如对于三个事件 A_1,A_2,A_3，有

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\&-P(A_2A_3)-P(A_3A_1)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned}$$

性质 3 设 A 为任意随机事件，则

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 4 设 A,B 为两个任意的随机事件，若 $A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

由于 $P(B-A)\geqslant 0$，根据性质 4 可以推得，当 $A\subset B$ 时，

$$P(A)\leqslant P(B).$$

1.2.7 条件概率与概率的乘法公式

1. 条件概率

前面所讨论的事件 B 的概率 $P_S(B)$，都是指在一组不变条件 S 下事件 B 发生的概率，为了叙述简练，一般不再提及条件组 S，而把 $P_S(B)$简记为 $P(B)$. 在实际问题中，除了考虑概率 $P(B)$外，有时还需要考虑“在事件 A 已发生”这一附加条件下，事件 B 发生的概率. 与前者相区别，称后者为**条件概率**，记作 $P(B|A)$，读作在事件 A 发生的条件下事件 B 的概率.

在一般情况下，如果 A,B 是条件 S 下的两个随机事件，且$P(A)\neq 0$，则在事件 A 发生的前提下事件 B 发生的概率(即条件概率)为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

2. 概率的乘法公式

定理 两个事件 A 与 B 的积的概率等于事件 A 的概率乘以在事件 A 发生的前提下事件 B 发生的概率，即

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\ (P(A)>0).$$

同理有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)\ (P(B)>0).$$

上述的计算公式可以推广到有限多个事件的情形，例如对于三个事件 A_1,A_2,A_3(若 $P(A_1)>0,P(A_1A_2)>0$)有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2).$$

1.2.8 全概率公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式

定理 如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足

(1) $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ 且 $P(A_i) > 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$；

(2) $A_iA_j = \varnothing$ $(i \neq j; i,j = 1,2,\cdots,n)$,

则对任一事件 B,有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i),$$

称之为**全概率公式**(简称全概公式).

2. 贝叶斯公式

定理 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是某一随机试验的一个完备事件组,对任意事件 $B(P(B)>0)$,在事件 B 已发生的条件下事件 A_i 发生的概率为

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

称之为**贝叶斯公式或逆概公式**.

1.2.9 事件的独立性

定义 设 A,B 是某一随机试验的任意两个随机事件. 称 **A 与 B 是相互独立**的,如果

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

这就是在 A 与 B 独立的情况下,事件 A 与 B 乘积的概率公式. 可见事件 A 与 B 相互独立是建立在概率基础上事件之间的一种关系. 所谓事件 A 与 B 相互独立,就是指其中一个事件发生与否不影响另一个事件发生的可能性.

由两个随机事件相互独立的定义,可以得到:若事件 A 与 B 相互独立,则 $\bar{A}$ 与 B,A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

对于 n 个事件的独立性,有下面定义.

定义 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件. 如果对于所有可能的组合 $1 \leqslant i < j < k < \cdots \leqslant n$,下列各式同时成立:

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \\ \qquad \vdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n), \end{cases}$$

那么称 **$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.**

1.2.10 二项概型

在实际问题中,常常要做多次试验条件完全相同(即可以看成是一个试验的多次重

复)并且都是相互独立(即每次试验中的随机事件的概率不依赖于其他各次试验的结果)的试验.称这种类型的试验为**独立重复试验**.

定理 在单次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次独立重复试验中

$$P\{A\text{ 发生 }k\text{ 次}\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n. \tag{1.3}$$

所谓**伯努利(Bernoulli)概型**就是利用关系式(1.3)来讨论事件概率的数学模型.伯努利概型又称为**独立试验序列概型**(或**二项概型**).

1.3 典型例题分析

例 1 设 A,B 是任意两个随机事件,则 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=$________.

答案 0.

分析

$$(\overline{A}+B)(A+B)=\overline{A}A+\overline{A}B+BA+BB=B,$$
$$(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=\overline{A}A+\overline{A}\overline{B}+\overline{B}A+\overline{B}\overline{B}=\overline{B},$$

于是

$$P(B\overline{B})=P(\varnothing)=0.$$

例 2 设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4,0.3 和 0.6,若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$________.

答案 0.3.

分析 因为

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

又

$$P(A\overline{B})+P(AB)=P(A),$$

因此

$$P(A\overline{B})=P(A+B)-P(B)=0.6-0.3=0.3.$$

例 3 设 A,B 为随机事件,$P(A)=0.7$,$P(A-B)=0.3$,则 $P(\overline{AB})=$________.

答案 0.6.

分析 由题设 $P(A)=0.7$,$P(A\overline{B})=0.3$,利用公式

$$A\overline{B}+AB=A,$$

知

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.3=0.4,$$

故

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6.$$

例 4 设三次独立试验中,事件 A 出现的概率相等.若已知 A 至少出现一次的概率等于19/27,则事件 A 在一次试验中出现的概率为________.

答案 $\frac{1}{3}$.

分析 设事件 A 在一次试验中出现的概率为 $p(0<p<1)$,则有 $1-(1-p)^3=\frac{19}{27}$,从而解得 $p=\frac{1}{3}$.

例 5 设 A,B 是两个随机事件,已知 $P(A|B)=0.3,P(B|A)=0.4,P(\bar{A}|\bar{B})=0.7$,则 $P(A+B)=$________.

答案 0.58.

分析 从条件概率的性质可知

$$P(A\mid\overline{B})+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1\Rightarrow P(A\mid\overline{B})=1-P(\overline{A}\mid\overline{B})=0.3,$$

因此,$P(A|B)=P(A|\overline{B})$,即 A 与 B 相互独立,于是

$$P(A)=P(A\mid B)=0.3,$$
$$P(B)=P(B\mid A)=0.4,$$
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.58.$$

评注 此题不是一个直接的概率计算问题.它首先要根据各已知的条件概率数值关系来确定事件 A 与 B 是独立事件,能否判断出事件 A 与 B 的独立性是解决这个题目的关键.

例 6 设 A,B 是两个随机事件,$0<P(B)<1$,且 $AB=\overline{A}\overline{B}$,则 $P(A|\overline{B})+P(\overline{A}|B)=$________.

答案 2.

分析 从条件 $AB=\bar{A}\bar{B}$ 可知

$$(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=A\bar{A}B\bar{B}=\varnothing,$$
$$(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=AB=\overline{A}\,\overline{B},$$

于是有

$$\overline{A}\overline{B}=\overline{A+B}=\varnothing,\quad A+B=\Omega.$$

但已知 $AB=\varnothing$,因此 A 与 B 为对立事件,即 $A=\overline{B},\overline{A}=B$,即

$$P(A|\overline{B})=P(\overline{A}|B)=1.$$

评注 由于题中对于事件 A,B 的概率值均未知,因此要计算两个条件概率之和,只能从条件 $AB=\bar{A}\bar{B}$ 出发,设法分析出事件 A 与 B 间的关系来解决两个条件概率的计算问题.本题关键是要从两个互不相容事件 AB 与 $\overline{A}\overline{B}$ 的相等,分析出它们都是不可能事

件,即 $AB=\bar{A}\bar{B}=\varnothing$,进而得出 A 与 B 为对立事件.

例 7 袋中有 50 个乒乓球,其中 20 个是黄球,30 个是白球,今有两人依次随机地从袋中各取一球,取后不放回,则第二个人取得黄球的概率是________.

答案 $\frac{2}{5}$.

分析 根据抽签原理,第一个人,第二个人,……取得黄球的概率相等,均为 $\frac{2}{5}$,因此应填 $\frac{2}{5}$.

或者利用全概公式计算,设

$$A=\{\text{第一个人取出的为黄球}\},$$
$$B=\{\text{第一个人取出的为白球}\},$$
$$C=\{\text{第二个人取出的为黄球}\},$$

则 $P(A)=\frac{2}{5}$,$P(B)=\frac{3}{5}$,$P(C|A)=\frac{19}{49}$,$P(C|B)=\frac{20}{49}$,由全概公式知

$$P(C)=P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)=\frac{2}{5}\times\frac{19}{49}+\frac{3}{5}\times\frac{20}{49}=\frac{2}{5}.$$

例 8 若在区间(0,1)内任取两个数,则事件"两数之和小于 $\frac{6}{5}$"的概率为________.

答案 $\frac{17}{25}$.

分析 这是一个几何概型问题,以 x,y 表示在(0,1)中随机地取得的两个数,则 (x,y) 点的全体是如图 1.2 所示的正方形,而事件 $\left\{\text{两数之和小于}\frac{6}{5}\right\}$ 发生的充分必要条件为 $x+y<\frac{6}{5}$,即落在图 1.2 中阴影部分的点 (x,y) 的全体.

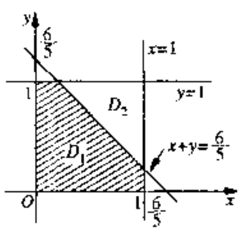

图 1.2

根据几何概率的定义,所求概率即为图中阴影部分面积与边长为 1 的正方形面积之比,即

$$P\left(x+y<\frac{6}{5}\right)=1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{17}{25}.$$

例 9 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%,现从由工厂 A 和工厂 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该次品属工厂 A 生产的概率是________.

答案 $\frac{3}{7}$.

分析　本题考查逆概公式.设事件 $A=\{$抽取的产品为工厂 A 生产的$\}$,$B=\{$抽取的产品为工厂 B 生产的$\}$,$C=\{$抽取的是次品$\}$,则 $P(A)=0.6$,$P(B)=0.4$,$P(C|A)=0.01$,$P(C|B)=0.02$,由逆概公式(贝叶斯公式)知

$$P(A\mid C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C\mid A)}{P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)}$$
$$=\frac{0.6\times 0.01}{0.6\times 0.01+0.4\times 0.02}=\frac{3}{7}.$$

例 10　已知随机事件 A 与 B 相互独立,$P(A)=a$,$P(B)=b$,如果事件 C 发生必然导致事件 A 与 B 同时发生,则事件 A,B,C 都不发生的概率为________.

答案　$(1-a)(1-b)$.

分析　已知 $P(AB)=P(A)P(B)$,$C\subset AB$,故 $\bar{C}\supset\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}\supset\bar{A}\bar{B}$,所以

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=(1-a)(1-b).$$

例 11　以 A 表示事件{甲种产品畅销,乙种产品滞销},则其对立事件 $\bar{A}$ 为(　　).

(A) {甲种产品滞销,乙种产品畅销}

(B) {甲、乙两种产品均畅销}

(C) {甲种产品滞销}

(D) {甲种产品滞销或乙种产品畅销}

答案　(D).

分析　设 $B=\{$甲种产品畅销$\}$,$C=\{$乙种产品滞销$\}$,则由题设 $A=BC$,于是,对立事件 $\bar{A}$ 为

$$\bar{A}=\overline{BC}=\bar{B}\cup\bar{C}=\{\text{甲种产品滞销或乙种产品畅销}\}.$$

例 12　设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件,则下列结论中肯定正确的是(　　).

(A) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相容　　　　(B) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　　　(D) $P(A-B)=P(A)$

答案　(D).

分析　据题设 A 和 B 是任意两个不相容事件,$AB=\varnothing$,从而 $P(AB)=0$.

利用公式 $A\bar{B}+AB=A$,知

$$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=P(A),$$

所以(D)为正确答案.

另外,由于 $P(A)\neq 0$,$P(B)\neq 0$,(C)项不可能成立,值得注意的是(A)、(B)两项,有人认为(A)项与(B)项是互逆的,总有一个是正确的.实际上,若 $AB=\varnothing$,$A\cup B\neq\Omega$ 时,(A)项不成立;$AB=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$ 时,(B)项不成立.

例 13　假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A)=1$,则(　　).