

目 录

绪 论	(1)
第一章 正投影图基础	(3)
§ 1-1 投影法	(3)
§ 1-2 平行投影的基本性质	(4)
§ 1-3 工程上常用的几种投影图	(6)
§ 1-4 物体的正投影图	(8)
§ 1-5 计算机绘制投影图的基础	(10)
第二章 点和直线	(12)
§ 2-1 点的投影	(12)
§ 2-2 各种位置直线	(17)
§ 2-3 求线段的实长和倾角	(20)
§ 2-4 直线上的点	(23)
§ 2-5 两直线的相对位置	(26)
§ 2-6 直角的投影	(27)
§ 2-7 计算机绘制点和直线的投影图	(29)
第三章 平 面	(36)
§ 3-1 平面的表示法	(36)
§ 3-2 各种位置平面	(38)
§ 3-3 平面上的点和直线	(41)
§ 3-4 平面上的特殊位置直线	(43)
§ 3-5 计算机绘制平面的投影图	(46)
第四章 直线、平面的相对位置	(54)
§ 4-1 平行关系	(54)
§ 4-2 相交关系	(57)
§ 4-3 垂直关系	(63)
§ 4-4 点、线、面综合题及其解法	(67)
§ 4-5 编程求解相对位置问题	(72)
第五章 投影变换	(76)
§ 5-1 概述	(76)
§ 5-2 变换投影面法(换面法)	(77)
§ 5-3 旋转法	(87)
第六章 曲线、曲面	(94)
§ 6-1 曲线概述	(94)
§ 6-2 圆的投影	(95)
§ 6-3 曲面概述	(97)
§ 6-4 直线面	(99)
§ 6-5 回转曲面	(103)

§ 6-6 螺旋线和螺旋面	(107)
§ 6-7 曲面的切平面	(109)
第七章 立体 平面与立体相交	(114)
§ 7-1 立体的投影	(114)
§ 7-2 平面与立体相交	(118)
第八章 直线与立体、立体与立体相交	(132)
§ 8-1 直线与立体相交	(132)
§ 8-2 立体与立体相交	(136)
第九章 轴测投影	(150)
§ 9-1 轴测投影的基本概念	(150)
§ 9-2 正轴测投影的轴向伸缩系数和轴间角	(152)
§ 9-3 平行坐标面的圆在正轴测投影中的投影	(154)
§ 9-4 正轴测投影图的画法	(159)
§ 9-5 斜轴测投影	(163)
§ 9-6 三种轴测图的比较与选择	(166)
第十章 表面展开	(169)
§ 10-1 平面立体表面的展开	(169)
§ 10-2 可展曲面的展开	(171)
§ 10-3 不可展曲面的近似展开	(174)
§ 10-4 应用举例	(175)
第十一章 透视投影	(178)
§ 11-1 透视的原理和术语	(178)
§ 11-2 点的透视	(179)
§ 11-3 直线的透视	(179)
§ 11-4 平面的透视	(182)
§ 11-5 透视图的分类	(183)
§ 11-6 基于视线双投射原理作透视图	(184)
§ 11-7 视点、画面和物体相对位置的确定	(187)

绪 论

一、画法几何学的研究对象

画法几何学是研究投影理论和方法，并用以解决空间几何问题的科学。画法几何是几何学的一个分支，它是由生产实践需要而产生的，因而不仅是纯理论的研究，而且必须解决许多生产实际问题。早在 1895 年，由法国学者蒙日 (G. Monge 1746~1818) 总结创立的画法几何学就曾对当时的军事工程作出了贡献。此后经过不断的完善与发展，画法几何不仅为工程图学提供了理论依据，同时对于空间几何问题提供了独特的形象的解题方式。

画法几何学要解决的问题包括图示法和图解法两部分内容。

图示法主要研究用投影法将空间几何元素 (点、线、面) 的相对位置及几何形体的形状表示在图纸平面上。同时必须可以根据平面上的图形完整无误地推断出空间表达对象的原形。即就是要在二维平面图形与空间三维形体间建立起一一对应的关系。在工程施工和机械生产中常需要将实物绘成图样，并根据图样生产和施工，这是工程图学要解决的基本任务。因而图示法必然成为了工程图学的理论基础。

图解法主要研究在平面上用作图方法解决空间几何问题。确定空间几何元素间的相对位置，如确定点、线、面的从属关系，求交点、交线的位置等，称为解决定位问题。求几何元素间的距离、角度、实形等则属于解决度量问题。图解法具有直观、简便的优点，对一般工程问题可以达到一定精度要求，对于有高精度要求的问题，可用图解与计算相结合的办法解决，综合两种方法的优点可使形象思维与抽象思维在认识中达到统一。

二、课程的任务

1. 学习平行投影的基本理论，着重掌握正投影法的原理和应用，了解轴测投影的基本知识，并掌握其基本画法。
2. 培养空间几何问题的图解能力，掌握作图解决空间定位问题 (平行、相交、从属关系等) 和度量问题 (距离、角度、实形)。
3. 培养空间想象能力和空间思维能力。
4. 由于近年来计算机绘图技术的发展，应该初步了解使用画法几何学的方法解决计算机绘图问题和使用计算机解决画法几何问题。

三、学习方法

1. 尽管画法几何学是数学的一个分支，但其研究的方法不完全是过去熟悉的方法，在学习中尽快认识这种研究问题、解决问题的方式，则是学好本课程的关键。

在学习图示法时，必须把对平面图形的投影分析与几何元素、几何形体的空间想象结合起来，建立起平面图形与空间形象间的对应关系。这里重点是要习惯于对空间形象的想象。

在学习图解法时，还要学会空间逻辑思维，就是利用对几何元素在空间的推理过程，设

计出解题方案，然后在投影图上解决定位问题或度量问题。无论是静态的想象还是动态的思维，均属于形象思维方式。在学习过程中，要使自己善于使用这种思维方式。

2. 掌握学习方法，提高空间想象力，是一个渐近的过程，每个人的进程也各不相同，只要根据自己的经验，不断总结，不断努力，就一定能够完成课程的任务。

3. 画法几何学的另一个特点就是其实践性。理论上解决的问题，必须在投影图上完成，而且要达到一定的精确程度，因此需要认真完成必要的作业，才能真正掌握课程内容。

第一章 正投影图基础

§ 1-1 投影法

物体在光源的照射下会出现影子。投影的方法就是从这一自然现象抽象出来，并随着科学技术的发展而发展起来的。常用的投影法有两大类：中心投影法和平行投影法。

一、中心投影法

如图 1-1 所示，光源用点 S 表示，称为投射中心，自投射中心 S 引出的射线称为投射线（如 SA, SB, SC ）；平面 H 称为投影面。投射线 SA, SB, SC 与平面 H 的交点 a, b, c 就是空间点 A, B, C 在投影面 H 上的中心投影。而 $\triangle abc$ 即为 $\triangle ABC$ 在 H 面上的中心投影。我们规定用大写字母表示空间的点，而用小写字母表示相应空间点的投影。

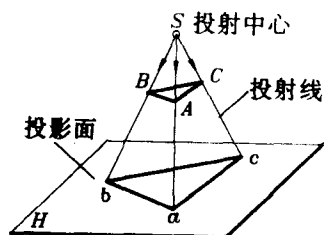


图 1-1

由于不相平行的空间直线与平面有唯一的交点，所以在投射中心 S 确定的情况下，空间的一个点在投影面 H 上只存在唯一的一个投影。

二、平行投影法

如果把中心投影法中的投影中心移至无穷远处，则各投射线就成为相互平行的，这种投影法就称为平行投影法。在平行投影中，用 S 表示投射方向，只要自空间各点分别引与 S 平行的投射线（ S 与投影面 H 不平行），就可以在投影面 H 上得到空间各点的投影，如图 1-2 所示。

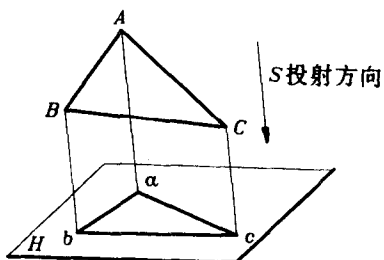


图 1-2

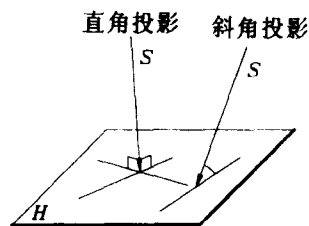


图 1-3

显然，在确定的投射方向下，空间的一个点在投影面 H 上的平行投影也是唯一确定的。如图 1-3，根据投射方向 S 相对于投影面 H 的倾角不同，平行投影法又可以分为以下两种情况：

- 1) 正投影法——投射方向 S 垂直于投影面 H ，也称直角投影法；

2) 斜投影法 —— 投射方向 S 倾斜于投影面 H 。

§ 1-2 平行投影的基本性质

平行投影具有如下的基本性质：

1) 同素性。点的投影是点，直线的投影是直线，平行投影所具有的这一性质称为同素性。

如图 1-4 所示，过直线 AB 上各点的投射射线构成了一个投射平面 $ABba$ ，该投射平面与投影面 H 的交线 ab 即为直线 AB 的投影。从图中可见，一般情况下直线的投影还是直线。

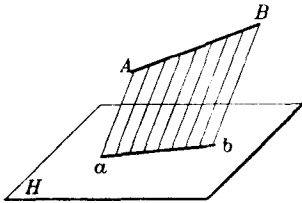


图 1-4

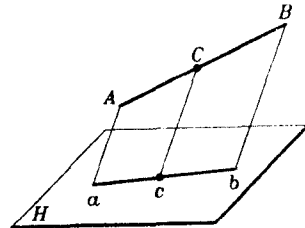


图 1-5

2) 从属性不变。若点在直线上，则该点的投影一定在该直线的投影上，即点和直线的从属性是平行投影的不变性。如图 1-5， $C \in AB$ ，则 $c \in ab$ 。

3) 平行性不变。平行两直线的投影仍平行。如图 1-6 所示， $AB \parallel CD$ ，则有两投射平面 $ABba \parallel CDdc$ ，所以 $ab \parallel cd$ 。

容易证明，平行两线段 AB 和 CD 的长度比是平行投影的不变量，即若有 $AB \parallel CD$ ，则有：

$$\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd}$$

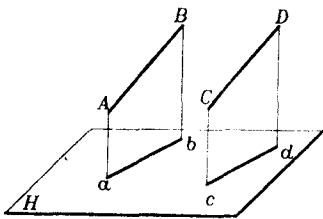


图 1-6

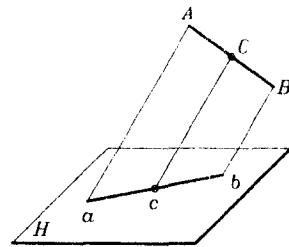


图 1-7

4) 简单比不变。一条直线上任意三个点的简单比是平行投影的不变量。

如图 1-7，点 A 、 B 、 C 为一条直线上的三个点，其中点 A 、 B 为基础点，点 C 为分点。则这三个点的简单比定义为：

$$(ABC) = \frac{AC}{BC}$$

由初等几何的平行线截割定理容易证明：

$$\frac{AC}{BC} = \frac{ac}{bc}$$

或

$$(ABC) = (abc)$$

即一直线上三个点的简单比等于其投影相应的三个点的简单比。

5) 相仿性。平面形的投影可由其投影轮廓线得到。一般情况下, 平面形的投影都要发生变形, 但投影形状总与原形相仿, 这种性质称为相仿性。如图 1-8, $\triangle abc \neq \triangle ABC$, 八边形 $abcdefgh \neq ABCDEFGH$ 。但三角形的投影仍为三角形, 八边形的投影仍为八边形, 且凹形的投影仍为凹形。

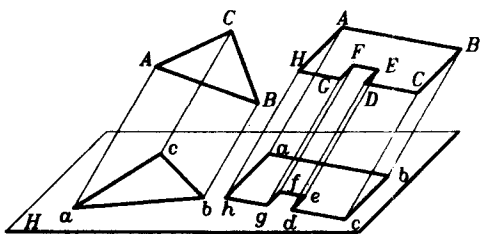


图 1-8

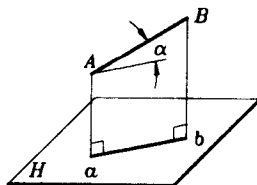


图 1-9

此外, 在一般情况下, 线段投影之后其长度会发生变化。投影长与线段原长之比称为伸缩系数, 如图 1-9, 用 k 表示伸缩系数, 则有:

$$k = \frac{ab}{AB}$$

在斜投影的情况下, 可能有 $k > 1$ 、 $k = 1$ 或 $k < 1$, 即线段的长度在投影之后可能增大、不变或缩短。

在正投影的情况下, 一般有 $k < 1$ 。如图 1-9, 设线段 AB 对投影面 H 的倾角为 α , 则有 $ab = AB \cos \alpha$, 所以 $k = ab / AB = \cos \alpha < 1$ ($\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 90^\circ$), 即线段的投影长度一般要缩短。

以上讨论了在一般情况下平行投影所具有的性质。在特殊情况下, 平行投影还具有以下两条性质:

1) 积聚性。当直线平行于投射方向 S 时, 直线的投影成为点; 当平面图形平行于投射方向 S 时, 其投影为直线。这种投影性质称为积聚性, 如图 1-10 所示。

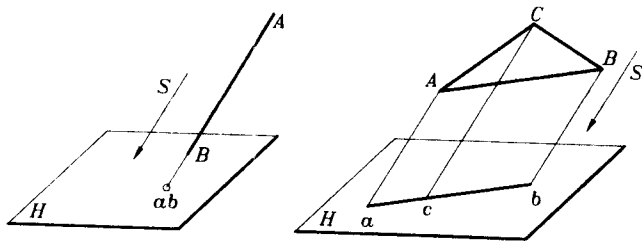


图 1-10

2) 全等性。当线段平行与投影面 H 时, 其投影长度反映线段的实长; 当平面图形平行于投影面 H 时, 其投影与原平面图形全等。这种性质称为全等性, 如图 1-11 所示。

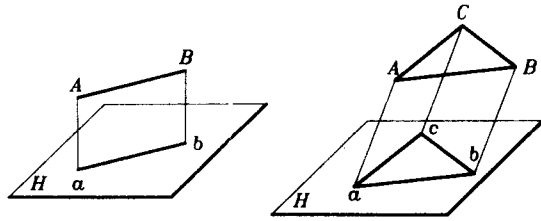


图 1-11

在上述平行投影的基本性质中，要特别注意那些平行投影下的不变性(如同素性、点和直线的从属性、两直线的平行性等)，以及不变量(如简单比，两平行线段的长度比等)。这些不变性和不变量，对图示、图解空间几何的各种问题都将起重要的作用。

§ 1-3 工程上常用的几种投影图

图作为一种工具，对于解决工程及一些科学技术问题起着重要的作用，因此对图就有着严格的要求，一般来说这些要求是：

- 1) 根据图形应当能完全确定空间形体的真实形状和大小；
- 2) 图形应当便于阅读；
- 3) 绘制图形的方法和过程应当简便。

由前述的中心投影法和平行投影法可以看出，不论用哪种投影法，仅仅根据一个投影是确定不了空间形体的形状和位置的。如图 1-12，只凭点的一个投影 a 并不能确定该点的空间位置，因为在同一条投射线上的任何点(如 A_1, A_2, A_3)都投影为 a 。又如图 1-13，两个不同形状的物体在 H 面上的投影形状是相同的。因此，为了使投影图达到上面所提出的要求，就必须附加某些条件，根据投影法和附加条件的不同，工程上采用以下四种投影图：正投影图、轴测投影图、标高投影图和透视投影图。

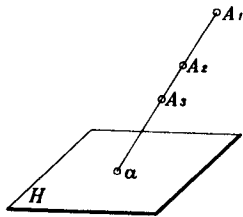


图 1-12

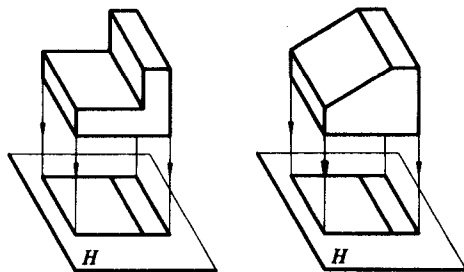


图 1-13

下面分别介绍这四种投影图的主要特点和应用范围。

一、正投影图

利用正投影的方法，把形体投射到两个或两个以上互相垂直的投影面上(图 1-14(a))，

再按一定规律把这些投影面展开成一个平面，便得到正投影图(图 1-14(b))。根据正投影图很容易确定物体的形状和大小，其缺点是直观性较差，但经过一定训练以后就能看懂。正投影图在工程上用得最广，也是本课程学习的重点。

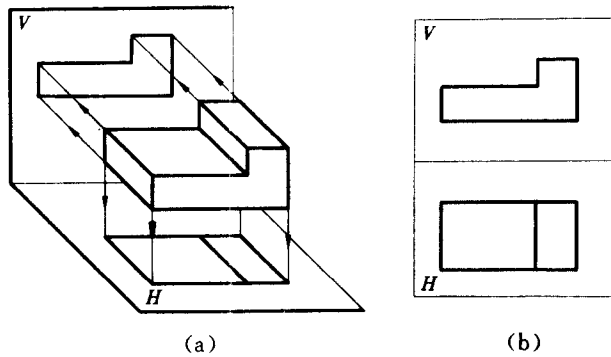


图 1-14
(a) 投影情况；(b) 正投影图

二、轴测投影图

利用平行投影法，把物体连同它所在的坐标系一起投射到一个投影面上，便得到轴测投影图(图 1-15)。轴测投影图(俗称立体图)有一定的立体感，容易看懂，但画起来较麻烦，并且对复杂机件也难以表达清楚，所以在工程上一般只作为辅助性的图来运用。

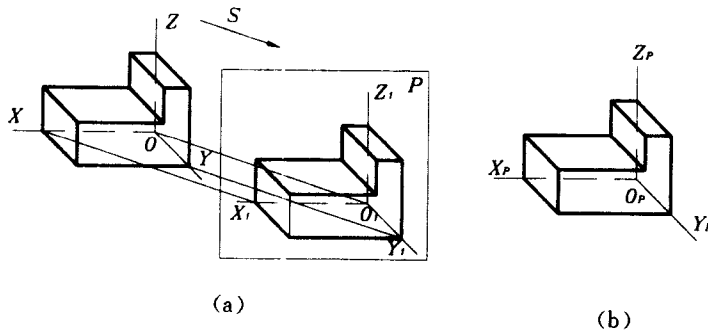
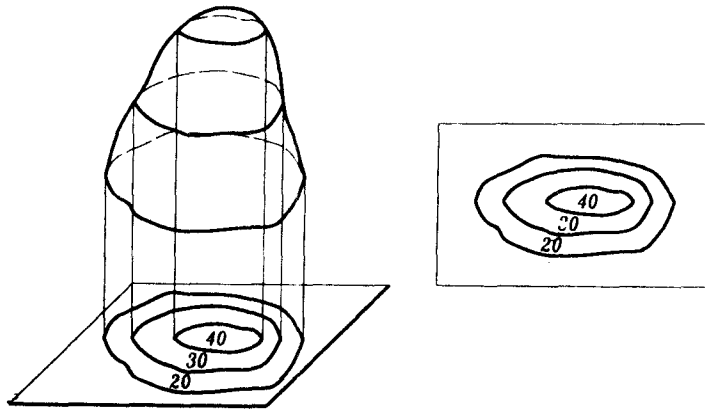


图 1-15
(a) 投影情况；(b) 轴测投影图

三、标高投影图

标高投影图是利用正投影法，将物体投影在一个水平投影面上得到的(图 1-16)。为了解决物体高度方向的度量问题，在投影图上画出一系列的等高线，并在等高线上标出高度尺寸(标高)。这种图主要用于地图以及土建工程图中表示土木结构或地形。



(a) (b) 图 1-16

(a) 投影情况; (b) 标高投影图

四、透视投影图

透视投影图是根据中心投影法绘制的,这种图符合人眼的视觉效果,看起来比较自然,尤其是表示庞大的物体时更为优越。但是由于它不能很明显地把真实形状和度量关系表示出来,同时由于作图很复杂,所以目前主要在建筑工程上作辅助性的图使用(图 1-17)。随着计算机绘图的发展,透视图在工程上的应用将会增加。

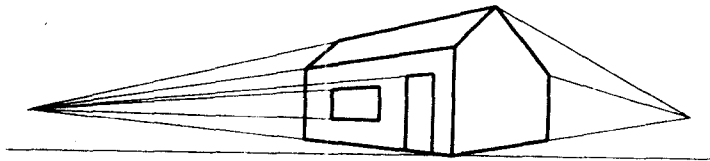


图 1-17

§ 1-4 物体的正投影图

一、物体的正投影图

由上节的介绍中可以知道,用正投影图表示物体至少需要从不同方向画出物体的两个投影。而通常则需要画出三个投影,这就需要三个投影面。采用图 1-18 所示的三个互相垂直的投影面,其中 V 面称为正面投影面, H 面称为水平投影面, W 面称为侧面投影面。两投影面的交线称为投影轴,从图中可以看到 V 面与 H 面交于 OX 轴; H 面与 W 面交于 OY 轴; W 面与 V 面交于 OZ 轴。

在图 1-19 中,图(a)表示一物体向三个投影面进行投影的情况。其中 V 面上的投影称为

正面投影, H 面上的投影称为水平投影, W 面上的投影称为侧面投影。

由于物体是由一些表面围成的, 所以投影主要是作出组成物体的各表面的投影。画图时尽可能使物体的主要表面平行于投影面, 其它表面垂直于投影面(如图 1-19(a), 物体的表面 1、2 和背面平行于 V 面, 其它表面都与 V 面垂直), 这样才能使一些表面的投影反映实形。而另一些表面的投影有积聚性, 从而有助于读图和画图。

为了得到物体的正投影图, 需将三个投影面展开成为一个平面, 展开的规定如下:

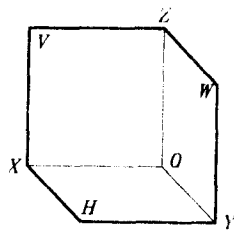


图 1-18

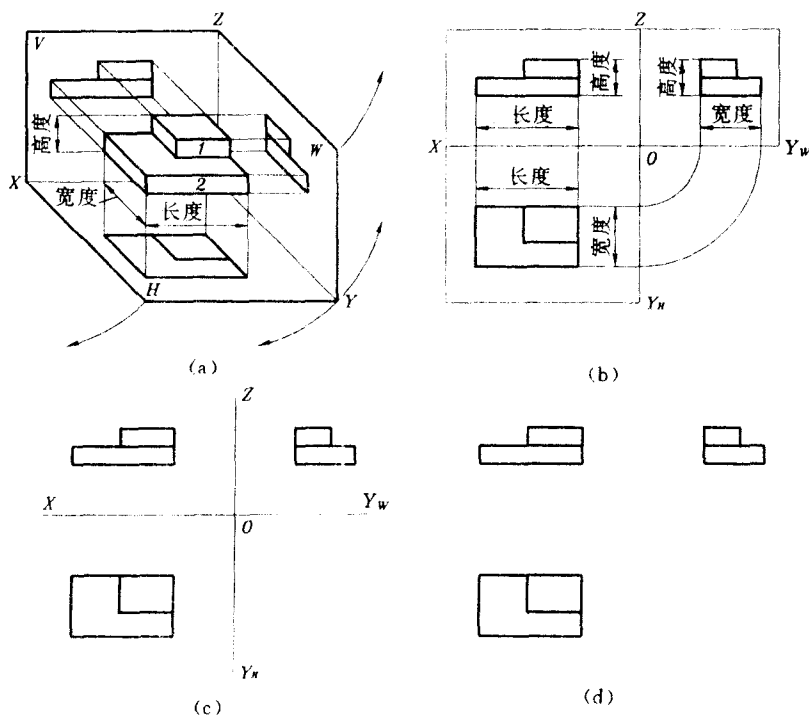


图 1-19

(a) 投影情况; (b) 展开投影面; (c) 去掉投影面边框; (d) 取消投影轴

- 1) V 面不动;
- 2) H 面绕 OX 轴向下旋转 90° ;
- 3) W 面绕 OZ 轴向后方旋转 90° (如图 1-19(a) 中箭头所示)。

在展开时, OY 轴被拆为两半, 在 H 面上的记作 OY_H , 在 W 面上的记作 OY_W 。图 1-19 (b) 为展开后得到的正投影图。因为在进行投影时, 投影面的大小不加任何限制, 所以不必画出投影面的边框, 如图 1-19(c), 图 1-19 (d) 是取消投影轴后的情况。

二、物体三投影间的关系

三个投影是从物体的三个方向投影得到的, 三个投影之间是有密切的关系的, 这主要表现在它们的度量 and 相互位置上的联系。

每个物体都有长、宽、高三个方向的尺寸，但每个投影只能反映两个方向的尺寸。如图 1-19 所示， V 投影反映长度(X 方向尺寸)和高度(Z 方向尺寸)； H 投影反映长度和宽度(Y 方向尺寸)； W 投影反映高度和宽度。 V 投影和 H 投影都反映同一物体的长度，因此它们的长度应相等； V 投影和 W 投影都反映物体的高度，它们的高度应相等； W 投影和 H 投影都反映物体的宽度，它们的宽度应相等(但要转过 90° 去找相等关系)。

考虑到物体正投影图的形成过程，对它的三个投影之间的相对位置也是有要求的。综合起来，物体三投影间的关系如下：

V 、 H 两投影：长对正(X 坐标方向)；

V 、 W 两投影：高平齐(Z 坐标方向)；

W 、 H 两投影：宽相等(Y 坐标方向)。

物体的三投影主要是用来表示它的形状和大小，投影轴只能说明物体相对于各投影面的距离，没有投影轴一样能使三投影保持上述投影关系，因此通常不画出投影轴，如图 1-19 (d)即为常见的物体正投影图的形式。

§ 1-5 计算机绘制投影图的基础

用计算机绘制投影图，一般来说有编写程序或使用图形软件两种方式。为了使读者对这两种方式都能有所了解，本教材在画法几何部分介绍一些采用程序设计的方式绘制投影图的方法及实例；而在机械制图部分介绍一些使用图形软件绘制投影图的方法。

一、基本求交运算

本教材中介绍的程序设计是按照画法几何的解题思路来进行的，因此要用到大量的平面上两直线的求交运算。下面先介绍平面上两直线求交的运算公式。

设平面上两直线为：

$$l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

令

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

则有以下两种情况：

- 1) 若 $H=0$ ，则这两条直线平行；
- 2) 若 $H \neq 0$ ，则这两条直线相交，其交点坐标为：

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{H}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{H}$$

二、正投影坐标轴的程序设计

本书采用 Turbo C 进行程序设计来绘制投影图。在用 Turbo C 编程绘图时，首先应初始化图形屏幕。在图形屏幕上，坐标原点的位置位于屏幕的左上角，水平向右为 X 轴正向，竖直向下为 Y 轴正向，而我们在绘制投影图时，一般选取屏幕中心处为坐标原点，水平向左为

X 轴正向,从中心向上为 Z 轴正向,从中心向下为 Y 轴正向。为此,我们在绘制投影图时,要进行相应的坐标变换。

下面给出一个绘制图 1-20 所示正投影图投影轴的 Turbo C 程序(程序 1-1)。程序的主函数初始化图形屏幕,子函数 axis()绘制投影轴并标注相应的字母。

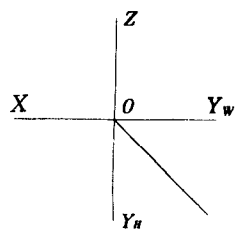


图 1-20

程序 1-1:

```

/* Axis.c */
#include <graphics.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int x0, y0;
void axis(void);

main()
{ int graphDriver=DETECT;
  int graphMode=0;
  initgraph(&graphDriver, &graphMode, " "); /* 初始化图形屏幕 */

  setbkcolor(BLUE); /* 设置背景颜色 */
  setcolor(YELLOW); /* 设置画线颜色 */
  x0=getmaxx()/2; /* 屏幕中心 X 坐标 */
  y0=getmaxy()/2; /* 屏幕中心 Y 坐标 */

  axis();

  getch(); /* 等待用户响应 */
  closegraph(); /* 关闭图形模式 */
}

void axis()
{ line(0, y0, getmaxx(), y0); /* 画水平轴线 */
  line(x0, 0, x0, getmaxy()); /* 画竖直轴线 */
  line(x0, y0, x0+200, y0+200); /* 画 45 度线 */
  outtextxy(x0+7, y0-10, "O"); /* 在适当位置输出字符 */
  outtextxy(10, y0-10, "X");
  outtextxy(x0+7, 2*y0-10, "YH");
  outtextxy(2*x0-20, y0-10, "YW");
  outtextxy(x0+7, 10, "Z");
}

```

第二章 点和直线

自然界中一切有形的物体，用几何的观点都可以看作是由点、线(直线和曲线)、面(平面和曲面)等基本几何元素构成的。本章将介绍点和直线的投影规律及其定位与度量问题。

§ 2-1 点的投影

为了进一步弄清正投影的规律，我们先从构成物体的最基本的几何元素——点谈起。

一、点的三个投影

1. 三个投影之间的位置关系

如图 2-1，空间一点 A ，它的 H 投影为 a ， V 投影为 a' ， W 投影为 a'' (任一点的三个投影都用同一个小写字母表示，其中 H 投影不加撇， V 投影加一撇， W 投影加两撇)。

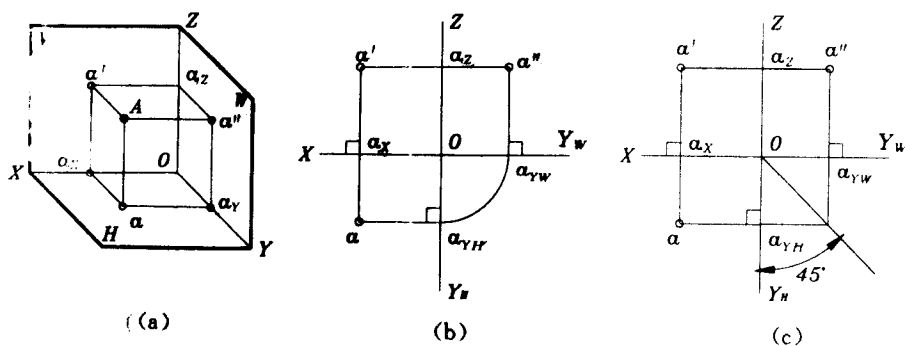


图 2-1

(a) 点的投影；(b) 点的投影关系；(c) 以 45° 为辅助线联系 a 、 a''

由图 2-1(a)可见， Aa 和 Aa' 组成一个平面，该平面与 V 面的交线为 $a'a_x$ ，与 H 面的交线为 aa_x ，与 OX 轴交于 a_x 点。不难证明：

$$a'a_x \perp OX, \quad aa_x \perp OX$$

所以在点 A 的投影图上(图 2-1(b))， $a'a_x$ 和 aa_x 在同一条直线上，且 $aa' \perp OX$ 。亦即点 A 的 V 投影 a' 和 H 投影 a 应在一条垂直于 OX 轴的投影连线上。

同理， $a'a'' \perp OZ$ 。亦即点 A 的 V 投影 a' 和 W 投影 a'' 应在一条垂直于 OZ 轴的投影连线上。

此外，由图 2-1(a)还可以证明 $aa_y \perp OY$ ， $a''a_y \perp OY$ 。在投影图上(图 2-1(b))， Y 轴被拆成 OY_H 和 OY_W 两条线，点 a_y 也被拆成 a_{yH} 和 a_{yW} 两个点。因此点 A 的 H 投影 a 和 W 投影 a'' 应有如下的投影关系： $aa_{yH} \perp OY_H$ ； $a''a_{yW} \perp OY_W$ ； $Oa_{yH} = Oa_{yW}$ 。为了能更直接地看到 a 和 a'' 之间的关系，经常用 O 为圆心的圆弧把 a_{yH} 和 a_{yW} 联系起来，如图 2-1(b)；也可以自 O 点作一条 45° 的辅助线来实现 a 和 a'' 的联系，如图 2-1(c)。

2. 点的投影和坐标的关系

确定空间点的位置需要三个坐标。如果以图 2-2(a)所示的三个投影面作为坐标面,三个投影轴作为坐标轴,则点 A 到 W 面的距离 Aa'' 就是点 A 的 X 坐标,称为横标;点 A 到 V 面的距离 Aa' 就是点 A 的 Y 坐标,称为纵标;点 A 到 H 面的距离 Aa 就是点 A 的 Z 坐标,称为高标。

用三个坐标确定点 A 可记为 $A(X, Y, Z)$ 。如 $A(30, 20, 40)$ 即为点 A 的横标 X 为 30, 纵标 Y 为 20, 高标 Z 为 40。

从图 2-2(a)中可以看出点的投影和坐标之间存在着如下关系:

$$Aa = a'a_x = a''a_y = \text{高标}(Z \text{ 标})$$

$$Aa' = aa_x = a''a_z = \text{纵标}(Y \text{ 标})$$

$$Aa'' = a'a_z = aa_y = \text{横标}(X \text{ 标})$$

点的每个投影反映两个坐标: V

投影反映高标和横标($a'a_x$ 和 $a'a_z$), H 投影反映纵标和横标(aa_x 和 aa_{y_H}), W 投影反映高标和纵标($a''a_{y_W}$ 和 $a''a_z$), 如图 2-2(b)所示。

V 、 H 两投影都反映横标; V 、 W 两投影都反映高标; H 、 W 两投影都反映纵标。

点的三个投影间的关系可小结如下:

1) V 、 H 两投影都反映横标, 且投影连线垂直 X 轴;

2) V 、 W 两投影都反映高标, 且投影连线垂直 Z 轴;

3) H 、 W 两投影都反映纵标, 投影连线是一条折线, 其中 W 面上的一段垂直 OY_w , H 面上的一段垂直 OY_H , 中间可用圆弧联系起来。

[例] 已知点 $A(30, 20, 40)$ (图 2-3(a)), 求作三投影。

作图步骤(图 2-3(b)):

①根据已知 X 标 30, Z 标 40, 确

定 V 投影 a' ;

②利用 $a'a \perp OX$, 以及 Y 标 20, 求得 H 投影 a ;

③根据已求得的两投影 a 、 a' , 利用投影关系求得 W 投影 a'' 。

二、两点的相对位置和重影点

1. 两点的相对位置

根据两点相对于投影面的距离(坐标)不同, 即可确定两点的相对位置。图 2-4 给出了 A 、 B 两点的三个投影, 从图中可以看出, A 点的横标小于 B 点的横标, 即点 A 距 W 面较近, 或者说点 A 在点 B 的右方。同样, 可以判断点 A 在点 B 上方; 点 A 在点 B 前方(规定距 V 面远

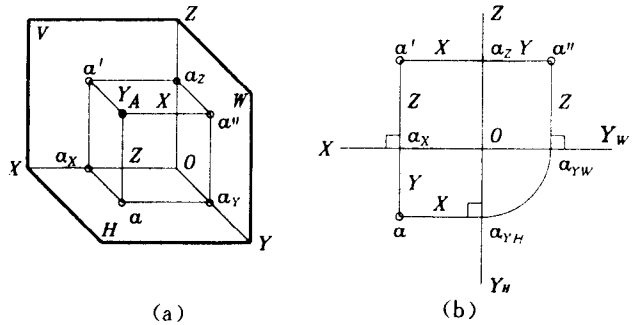


图 2-2

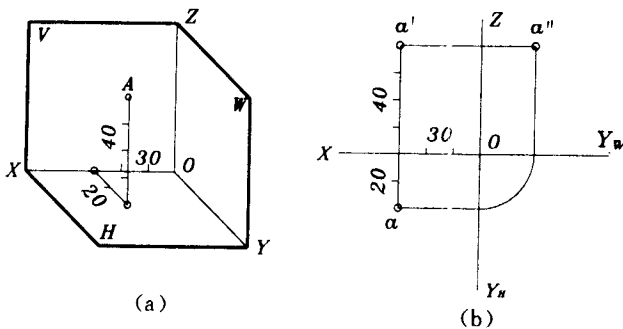


图 2-3

处为前,距V面近处为后)。

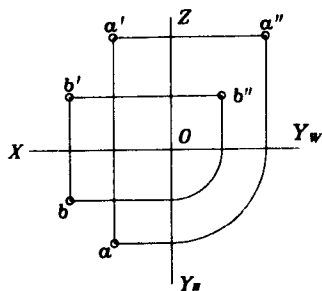


图 2-4

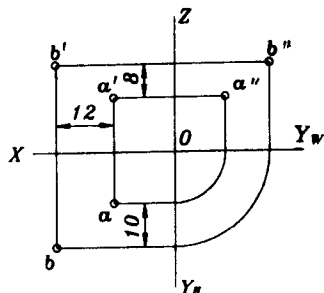


图 2-5

[例 1] 如图 2-5, 已知点 A 的三投影, 另一点 B 在点 A 上方 8 mm, 左方 12 mm, 前方 10 mm 处, 求点 B 的三个投影。

作图步骤:

- ① 在 a' 左方 12 mm, 上方 8 mm 处确定 b' ;
- ② 作 $b'b \perp OX$, 且在 a 前 10 mm 处确定 b ;
- ③ 按投影关系求得 b'' 。

[例 2] 试比较图 2-6 所示三棱锥四个顶点 S 、 A 、 B 、 C 的相对位置。

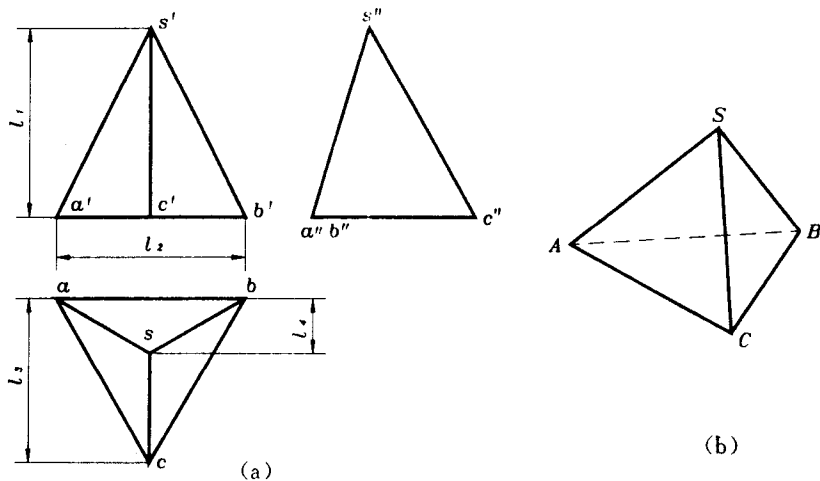


图 2-6

解: 图 2-6(a) 所示三棱锥的正投影图没给出投影轴, 此时可以任一顶点(例如点 A)作为参照点, 来比较各顶点的相对位置。

从 V 投影中可见, 顶点 B 、 C 与顶点 A 同高, 顶点 S 在顶点 A 上方 l_1 处。

顶点 B 在顶点 A 右方 l_2 处, 顶点 S 、 C 在顶点 A 右方 $l_2/2$ 处。

由 H 投影可见, 点 B 与点 A 距 V 面等远, 点 C 在点 A 前方 l_3 处, 点 S 在点 A 前方 l_4 处。

2. 重影点

特殊情况下，当两点处在对某投影面的同一条投射线上时，这两点在该投影面上的投影重合，这两点就称为对该投影面的重影点。

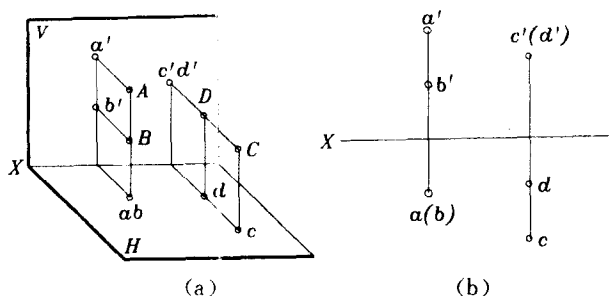


图 2-7

如图 2-7 所示，点 A 、 B 在对 H 面的同一条投射线上，它们对 H 面的投影重合，称为对 H 面的重影点。而点 C 、 D 则称为对 V 面的重影点。

两点重影必有一点被“遮挡”，所以要分辨可见性。显然距投影面远的一点是可见的。图 2-7 中，点 A 在点 B 正上方，所以点 A 对 H 面可见，点 B 为不可见。点 C 在点 D 正前方，所以点 C 对 V 面可见，点 D 为不可见。对于不可见的投影，在标记时如有必要，可加括号表示。

三、各种位置点的投影

本节仅在 V 、 H 两投影面体系中讨论各种位置点的投影。

1. 四象限中的点

互相垂直的两个投影面 V 和 H 把投影空间分成四部分，按图 2-8 所示的次序，分别称为第一、二、三、四象限(或分角)。

不论空间点在哪个象限，在画它的投影图时，投影面的展开都按同一个规定，即： V 面不动， H 面绕 OX 轴旋转 90° ，使 H 面的前半与 V 面的下半重合， H 面后半与 V 面上半重合。

因为采用的是直角投影，所以不论空间点在哪个象限，前面叙述过的点的投影关系仍然适用。

点在不同的象限，其投影图也有不同的特点。

如图 2-9 所示，第一象限的点 A ，其 V 、 H 两投影在 X 轴两侧， a' 在 X 轴上方， a 在 X 轴下方。

第二象限的点 B ，其 V 、 H 两投影 b' 、 b 都在 X 轴上方。

第三象限的点 C ，其 V 、 H 两投影在 X 轴两侧， c' 在 X 轴下方， c 在 X 轴上方。

第四象限的点 D ，其 V 、 H 两投影 d' 、 d 都在 X 轴下方。

综上所述，位于一、三象限的点，它的 V 、 H 两投影分布在 X 轴的两侧；而位于二、四象限的点，它的 V 、 H 投影分布在 X 轴的同侧。

由于位于二、四象限的点的 V 、 H 两投影分布在 X 轴的同侧，所以如果把一个物体放在二、四象限进行投影，它的 V 、 H 两投影就将发生重叠，这对表示物体是很不方便的，因此

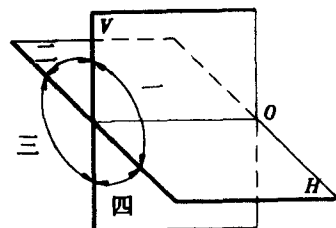


图 2-8