



国际电气工程先进技术译丛



WILEY

电磁装置的多目标 优化设计

**Power Magnetic Devices:
A Multi-Objective Design Approach**

[美] 斯科特 D. 苏德霍夫 (Scott D. Sudhoff)

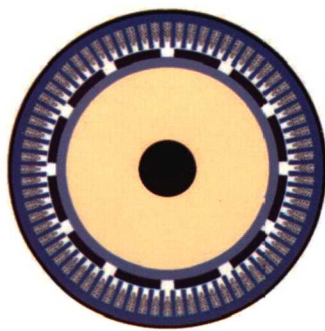
王秀和 朱常青 杨玉波 王道涵 宫金林

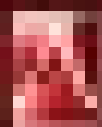
著

译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS





中国电机工程学会电磁兼容专委会

中国电机工程学会
CHINESE ASSOCIATION OF ELECTRIC ENGINEERS

WILEY

电磁装置的多目标 优化设计

Practical Multi-objective Optimization
in Electromagnetic and Thermal Applications

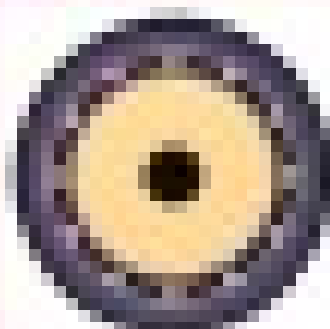
由 中国电机工程学会电磁兼容专委会

编

王树强 王树强 王树强 王树强

编

中国电机工程学会
CHINESE ASSOCIATION OF ELECTRIC ENGINEERS



国际电气工程先进技术译丛

电磁装置的多目标 优化设计

Power Magnetic Devices: A Multi – Objective Design Approach

[美] 斯科特 D. 苏德霍夫 (Scott D. Sudhoff) 著
王秀和 朱常青 杨玉波 王道涵 宫金林 译

机械工业出版社

Copyright © 2014 by The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.

All Rights Reserved. This translation published under license. Authorized translation from the English language edition, entitled Power Magnetic Devices: A Multi - Objective Design Approach, ISBN: 978-1-118-48999-4, by Scott D. Sudhoff, Published by John Wiley & Sons. No part of this book may be reproduced in any form without the written permission of the original copyrights holder.

本书中文简体字版由机械工业出版社出版, 未经出版者书面允许, 本书的任何部分不得以任何方式复制或抄袭。版权所有, 翻印必究。

北京市版权局著作权合同登记 图字: 01 - 2015 - 1911 号。

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁装置的多目标优化设计/ (美) 斯科特·D. 苏德霍夫 (Scott D. Sudhoff) 著; 王秀和等译. —北京: 机械工业出版社, 2017. 8

(国际电气工程先进技术译丛)

书名原文: Power Magnetic Devices: A Multi - Objective Design Approach

ISBN 978-7-111-58251-9

I. ①电… II. ①斯… ②王… III. ①电磁感应 - 电气设备 - 最优设计
IV. ①0441.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 247796 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 付承桂 责任编辑: 赵玲丽

责任校对: 肖琳 封面设计: 马精明

责任印制: 张博

三河市国英印务有限公司印刷

2018 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 24.25 印张 · 463 千字

0 001—2 000 册

标准书号: ISBN 978 - 7 - 111 - 58251 - 9

定价: 150.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换
电话服务 网络服务

服务咨询热线: 010 - 88361066

机工官网: www.cmpbook.com

读者购书热线: 010 - 68326294

机工官博: weibo.com/cmp1952

010 - 88379203

金书网: www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

教育服务网: www.cmpedu.com

本书作者 Scott D. Sudhoff 是从事电磁装置计算和优化设计的知名专家。本书给出了常见电磁装置（包括电感、电磁铁和永磁电机、变压器等）的详细参数计算方法以及优化算法的具体实现，给出了构建优化模型的详细流程，并将热分析整合到电磁装置优化设计中。本书介绍的多目标优化设计方法，方法新颖，内容具体，可读性强，为读者提供了一种能快速进行电磁装置优化设计的实用方法，对于从事电磁装置研究、设计的科研人员、工程技术人员和研究生，具有很高的参考价值。

译者序

由 Scott D. Sudhoff 所著的《Power Magnetic Devices: A Multi - Objective Design Approach》出版以来,受到电机工程领域设计人员的广泛好评。受机械工业出版社委托翻译该书,希望通过我们的努力,将这本特色鲜明的电力设备设计参考书呈现给我国读者。

本书作者 Scott D. Sudhoff 是普渡大学电气与计算机学院教授,多年的教学与科研经历使本书在内容和结构编排上都有独特之处。

本书共分 11 章,以基于遗传算法的多目标优化设计为主线,针对电抗器、电磁铁、变压器和电机等电磁装置的设计问题展开讨论。第 1 章介绍了基于遗传算法的多目标优化方法,第 2 章讲述了磁路分析方法。在第 1、2 章内容的基础上,第 3 章讨论了电感的优化设计。第 4 章讨论了电磁力和电磁转矩的计算方法,并在第 5 章中将其用于电磁铁优化设计。第 6 章介绍了铁耗计算方法,在第 7 章将其用于变压器优化设计。这种分析和设计交替进行的方式一直延续到第 8 章和第 9 章的旋转电机设计问题。本书最后两章是对前面内容的补充,第 10 章讨论了电磁装置的热分析方法,第 11 章讨论了趋肤效应和邻近效应。这种编排方式能使读者尽快了解这种多目标优化设计思想,并应用到自己的研究工作中。

本书论述语言生动流畅,分析深入浅出,同时大量图、表和设计实例有助于读者更形象地理解其中的概念和方法,与理论分析和计算实例配套的 MATLAB 源代码可以大大减小读者在编程方面的工作量。无论读者从事教学工作还是工程设计,本书都有较高的参考价值。

翻译中力求忠于原著,保持原著的语言特色,同时兼顾中文的表述习惯。翻译中错误与不妥之处,恳请广大读者指正。

译者

原 书 前 言

本书既可作为本科高年级或研究生一年级的教材,也可为工程技术人员提供参考。本书的写作目标有三:一是为电磁装置的半自动化设计提供系统的多目标优化设计方法;二是讨论这些电磁装置优化设计所必需的分析方法,包括磁场分析、等效磁路分析、铁耗、热分析和集肤效应等;三是介绍电磁装置,如电感、电磁铁、变压器和电机等方面的基础知识。作者并非要写一本包括所有电磁装置设计方法的参考书,而是希望读者读后能将本书的方法用于他们感兴趣的电磁装置的优化设计。

从教育学的角度讲,本书编排方式能使读者尽快熟悉设计过程。先全面介绍各电磁装置的相关知识、再讨论其设计问题也许是一种更高效的方法,但对那些急于进行工程设计的读者来说并不总是令人满意的。因此,本书将原理知识与设计问题交替地进行讨论。

第1章介绍了基于遗传算法的多目标优化方法,虽没有对优化问题进行全面讨论,但的确为多目标优化设计的实施提供了充足的背景知识。第2章讲述了本书广泛使用的磁路分析方法。在第1、2章内容的基础上,第3章开始介绍设计问题,讨论了电感的优化设计。第4章讨论了电磁力和电磁转矩的计算方法,并在第5章中将其用于电磁铁设计。第6章介绍了铁耗计算方法,在第7章将其用于变压器设计。这种分析和设计交替进行的方式一直延续到第8章和第9章的旋转电机设计问题。本书最后两章是对前面内容的补充,第10章讨论了电磁装置的热分析方法,第11章讨论了趋肤效应和邻近效应。

本书的内容超出了一学期课程的容量,因此作者建议将1~6章作为基本内容,剩下的章节可由教师或读者根据情况取舍,当然第8章是第9章的重要基础。

本书的第8、9两章是根据《Analysis of Electric Machinery and Drive Systems, 3rd edition》(作者是Paul Krause, Oleg Wasynczuk, Scott D. Sudhoff和Steve Pekarek)的第2章和第15章为基础完成的,该书也由IEEE/Wiley出版。

本书中的MATLAB源代码由Scott D. Sudhoff的《MATLAB Codes for Power Magnetic Devices: A Multi - Objective Design Approach》(在线)给出,可在<http://booksupport.wiley.com>上获得。这些代码包括遗传优化系统工程工具箱、等效磁路工具箱、等效热路工具箱,以及本书中所有的设计算例。这将大大减小那些用本书进行教学或实际应用的读者的工作量。本书还可提供部分带注释的幻

灯片。

在本书中，标量用斜体表示（例如 x ），矢量和矩阵用粗的黑斜体表示（例如 $\mathbf{x}$ ）。所有函数都用斜体、非粗体表示（例如 $x(\theta)$ ）。在迭代方法中，方括号与迭代次数有关。

本书作者要特别感谢下面各位。首先，感谢我的父母。他们给了我时间、支持、包容，让我追求自己的理想。在高中，我幸运地遇到了许多优秀的老师。我特别感激 Thomasita Hayes 修女。在大学阶段，我也有幸得到了良师的指导，特别是 Stanislaw Zak 在控制和优化方面给以我的指导，Fred Mowle 教会我如何编程，而 Paul Krause 教我电机学。Paul 后来成为我在普渡大学的导师，在我和其他学生眼里，他有时是淘气的小哥哥，有时是严肃的祖父。我在密苏里大学罗拉分校（现在的密苏里科技大学）开始我的事业。在这里，我有幸结识许多良师益友，包括 Keith Stanek, Max Anderson, Mariesa Crow, 以及 Jim Drewniak。

我还要感谢许多我现在和过去的学生、博士后以及研究人员，他们直接或间接地对本书做出了贡献，包括 Benjamin Loop, Chunki Kwon, Jim Cale, Aaron Cramer, Brandon Cassimere, Brant Cassimere, Chuck Sullivan, Ricky Chan, Shengyu Wang, Yonggon Lee, Cahya Harianto, Jacob Krizan, Grant Shane, Omar Laldin, Ahmed Taher, Jamal Alsawhali, Harish Suryanarayana, Jonathan Crider, Jamal Alsawalhi, Grant Shane, Jonathan Crider, Ahmed Taher, Ruiyang Lin, David Loder, Andrew Kasha, 他们为本书的有限元分析和实验数据的获得做了大量工作。最后，我还要感谢 Julie Sudhoff, Jamal Alsawalhi, Rachel Grossman, David Loder, 以及 Andrew Kasha, 他们阅读了初稿并给出宝贵意见。我还要特别感谢 Dionysios Aliprantis, 他激发了我对遗传算法的兴趣。

许多美国政府机构给本书内容的研究工作给予了支持，包括陆军、海军、美国国家航空航天局。美国海军研究办公室一直为我的研究工作提供长期稳定的支持，直接和间接地对本书做出了贡献，没有这些支持，本书是不可能完成的。格兰杰基金会的支持对我在普渡大学的研究工作也非常重要。

最后，我要感谢普渡大学的同事。任何部门中，最关键的是与你共事的人。在这方面，我在普渡大学的同事 Paul Krause, Oleg Wasynczuk, Steve Pekarek, Chee - Mun Ong, Dionysios Aliprantis, Maryam Saadifard, 以及 Ragu Balakrishnan 组成了一个很好的团队。我也有幸在其他机构结识了很好的朋友，特别是 Paula 和 Ed. Zivi。

Scott D. Sudhoff

目 录

译者序

原书前言

第1章 优化设计	1
1.1 设计方法	1
1.2 目标函数的数学性质	2
1.3 牛顿法求解单目标优化	5
1.4 遗传算法：生物遗传学的回顾	7
1.5 标准遗传算法	9
1.6 实数编码遗传算法	14
1.7 多目标优化和最优前沿解	24
1.8 利用遗传算法求解多目标优化	26
1.9 设计问题中适应度函数的建立	29
1.10 设计实例	32
参考文献	38
习题	38
第2章 磁和等效磁路	39
2.1 安培定律、磁动势和针对磁路的基尔霍夫磁动势定律	39
2.2 磁通、高斯定律和磁路的基尔霍夫磁通定律	42
2.3 导磁材料和磁路欧姆定律	44
2.4 等效磁路的建立	51
2.5 磁路转换为电路：磁链和电感	54
2.6 磁路中的边缘磁通	59
2.7 等效磁路中的漏磁通	63
2.8 非线性磁路的数值解	73
2.9 永磁材料及其磁路表示	86
2.10 有限元分析	89
参考文献	90
习题	91
第3章 电感设计	93
3.1 常用的电抗器结构	93

3.2 直流线圈电阻	94
3.3 直流电感设计	97
3.4 实例研究	102
3.5 结束语	108
参考文献	108
习题	109
第4章 电磁力与电磁转矩	110
4.1 机电装置中的能量存储	110
4.2 磁能计算	111
4.3 根据磁能计算电磁力	114
4.4 磁共能	115
4.5 根据磁共能计算电磁力	118
4.6 保守场的条件	119
4.7 磁线性系统	120
4.8 电磁转矩	121
4.9 利用等效磁路计算电磁力	121
参考文献	124
习题	124
第5章 电磁铁设计	126
5.1 常用电磁铁结构	126
5.2 EI型铁心电磁铁的电路、磁路和电磁力分析	127
5.3 EI型铁心电磁铁设计	135
5.4 举例分析	140
参考文献	145
习题	146
第6章 铁心损耗	147
6.1 涡流损耗	147
6.2 磁滞损耗和 $B-H$ 回线	153
6.3 铁心损耗的经验模型	157
6.4 铁心损耗的时域模型	162
参考文献	167
习题	168
第7章 变压器设计	169
7.1 常用变压器结构	169

7.2 T 型等效电路模型	170
7.3 稳态分析	173
7.4 变压器的运行分析	175
7.5 心式变压器结构	182
7.6 心式变压器的 MEC 模型	189
7.7 铁心损耗	194
7.8 心式变压器的设计	195
7.9 设计实例研究	201
7.10 结束语	208
参考文献	209
习题	209
第 8 章 分布式绕组和旋转电机	210
8.1 分布式绕组的描述	210
8.2 绕组函数	218
8.3 气隙磁动势	221
8.4 旋转磁动势	224
8.5 磁链和电感	225
8.6 槽的影响和卡特系数	227
8.7 漏电感	229
8.8 电阻	233
8.9 参考坐标系理论介绍	234
8.10 转矩的表示	238
参考文献	243
习题	243
第 9 章 永磁交流电机设计	246
9.1 永磁同步电机	246
9.2 PMAC 电机的运行特性	247
9.3 电机结构尺寸	255
9.4 定子绕组	259
9.5 材料参数	262
9.6 定子电流和控制规则	263
9.7 径向磁场分析	263
9.8 集总参数	267
9.9 铁心内磁场的分析	269
9.10 设计问题的公式化表达	273
9.11 实例分析	278

9.12 扩展	285
参考文献	286
习题	286
第 10 章 等效热路	288
10.1 热能、热流和传热方程	288
10.2 一维热流的等效热路	290
10.3 长方体区域的等效热路	296
10.4 圆柱形区域的等效热路	299
10.5 不均质区域	305
10.6 材料边界	311
10.7 等效热路	313
10.8 实例研究: 电磁铁的热模型	317
参考文献	332
习题	332
第 11 章 导体的交流损耗	334
11.1 带状绕组的趋肤效应	334
11.2 圆柱形导体中的趋肤效应	340
11.3 单个导体的邻近效应	343
11.4 趋肤效应和邻近效应的独立性	345
11.5 一组导体内的邻近效应	347
11.6 均方场与漏磁导	350
11.7 选定形状的均方磁场	351
11.8 旋转电机中的导体损耗	355
11.9 UI 型铁心电感的导体损耗	359
11.10 结束语	363
参考文献	364
习题	364
附录	365
附录 A 导体数据和线规标准	365
附录 B 铁氧体铁心的数据	366
附录 C 铁磁材料的数据	368
附录 D 永磁材料的数据	369
附录 E 相量分析	370
附录 F 三角恒等式	375

第1章 优化设计

本章利用一个通用的过程来描述电磁装置的设计。首先通过一个实例说明如何将设计问题转换为优化问题。其次探讨单目标优化问题，特别强调的是如何利用遗传算法求解，然后对多目标优化进行讨论。最后分析在设计问题转换为优化问题时遇到的实际问题。本章以 UI 型铁心电感的设计为例进行总结。

1.1 设计方法

设计的方法有很多种，在此通过对设计过程的分析来介绍设计方法。例如，图 1.1 描述了一种人工的设计过程。为了从更加实际的角度来分析此设计过程，以电磁铁设计为例，设定相关设计要求。

图 1.1 所示的设计过程中，第一步是对装置详细的数学分析。当对装置分析时，应根据装置的参数（几何结构、材料）预测装置的性能（重量、损耗、出力），而不是根据装置的设计要求（允许的损耗、需要的出力）求取装置的参数，后者称为设计问题。因此，将详细的分析转换成一系列的设计公式，根据装置特性来求解相关设计参数。但是，从详细的分析到设计公式的转换需要大量的假设和近似，甚至和最初的详细分析结果不一致。因此需要验证设计，既可以利用最初的分析，也可以利用某些数值分析工具，例如有有限元分析。根据数值分析的结果，修正设计，重复此过程，直到满足设计规范，从而确定最终设计。当然，设计过程经常会更复杂，例如一个基于实际样机的迭代设计。

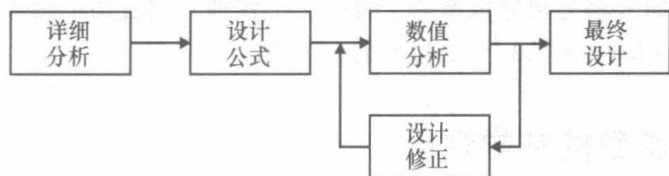


图 1.1 人工设计过程

人工设计在迭代过程中需要工程师的参与。该设计过程具有多种形式且在工程实际中得到广泛的应用，但同时存在一些明显的缺陷。首先，它非常耗时。其次，它需要大量的工程经验。这些经验可以帮助建立设计公式。在根据数值分析对设计做出修正时，经验也至关重要。最后，人工设计过程虽然已广泛应用于设

计中，但并不能保证其最终的设计是最优的。

图 1.2 描述了另一种设计过程，即基于优化的设计过程。该过程不是如图 1.1 所示的顺序方式，而是一种组织方式。过程的开始仍然是对所设计装置或元件的详细分析。

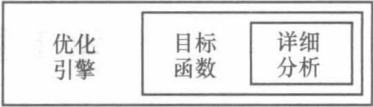


图 1.2 基于优化的设计过程

但是和人工设计过程不同，详细分析不是用来推导设计公式，而是用于计算设计度量，例如重量、造价和损耗。详细分析同样可以用来检验设计约束，例如是否满足所能够接受的最低性能。这些度量和约束构成了优化目标或适应度函数，并使得优化结果满足所有设计要求。

在设计过程的最外层，优化引擎根据目标函数最大化的原则选择设计的参数（几何结构、材料等）。优化引擎作用于目标函数，而目标函数是基于详细分析计算得到的。

基于优化的设计方法有很多优点。首先，无须推导设计公式，这样有利于减少设计过程中的近似和假设，同时减少对设计经验的依赖。它的第二个优点是，设计是根据设计度量严格优化得到，使得设计满足设计指标。第三个优点是，由于工程师不在优化循环过程中，所以人工耗费时间较少。此过程也存在一些缺点，首先，优化过程需要大量的数值计算，所以计算时间较长，有时候几个小时，在某些极端情况，甚至需要几天的时间。幸运的是，数值计算的时间远小于人工设计中的人工时间。其次，优化结果的品质取决于详细分析的品质。在这方面，设计经验没有像在人工设计方法中那样关键。

为了采用基于优化的设计过程，需要对数学函数进行优化，即需要对目标函数进行优化，目标函数也被称为适应度函数。优化是一门涉及面很广的学科，多年来一直受到很多科研工作者的广泛关注。本章的目的是对这门学科进行详细的介绍，使得读者能够将基于优化的设计过程应用于功率磁性设备的设计。对优化方法更深入的研究将会很好地服务于每一个工程师。读者还可阅读关于这门学科的另外一本由 Chong 和 Zak^[1]编写的书。

1.2 目标函数的数学性质

在讨论优化算法之前，需要对与优化相关的目标函数的性质进行讨论，因为这些性质决定了一个优化方法的有效性。

在考虑目标函数的性质时，需要定义参数向量，用 $\mathbf{x}$ 表示。参数向量 $\mathbf{x}$ 所在的域称为搜索空间，并用 Ω 表示，即 $\mathbf{x} \in \Omega$ 。参数向量 $\mathbf{x}$ 中的元素对应设计中可以自由选择变量。一般来说， $\mathbf{x}$ 中的某些元素在性质上是离散的，而其他的元素是连续的。例如，从可用材料的列表中指定一种材料可以作为一个离散变量。

一个几何参数,如电机的长度可以从连续变化的范围内选取,称为连续变量。如果参数向量的所有元素都是离散的,则搜索空间为离散的。如果搜索空间的所有元素都是连续的(在实数范围内),则搜索空间为连续的。如果参数向量同时含有离散和连续的元素,则搜索空间为混合的。假设我们希望优化的函数为 $f(\mathbf{x})$,且 $f(\mathbf{x})$ 返回由实数组成的 m 维向量,即 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$,其中 m 是目标个数。本章大部分内容, $f(\mathbf{x})$ 仅作为一个数学函数,并为其确定优化算法。但在1.9节和本书的其他内容中,我们将关注如何建立 $f(\mathbf{x})$,并将其作为一个工具服务于工程设计。

在本节中, $\mathbf{x}$ 的所有元素都为实数,即 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,其中 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维实数的集合。优化目标只有一个(i.e., $m=1$),所以 $f(\mathbf{x})$ 是向量 $\mathbf{x}$ 的标量函数。最后,假设希望求解 $f(\mathbf{x})$ 的最小值,并且认为 $\mathbf{x}^*$ 为目标函数 f 在搜索空间 Ω 上的全局最小值,则有

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\} \quad (1.2-1)$$

式中, $\forall$ 表示“一切”; $\Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ 表示 Ω 除去点 $\mathbf{x}^*$ 之后的点集。如果表达式中“ $<$ ”代替“ $\leq$ ”,则 $\mathbf{x}^*$ 称为严格全局最小值。

如前所述,函数 $f(\mathbf{x})$ 具有的一些性质,使得更容易或更困难找到其全局最小值。图1.3描述了一些性质,其中不连续性使得找到全局最小值更困难,如图1.3a所示。图中 $\Omega = [x_{mn}, x_{mx}]$,不连续性发生在 $\mathbf{x} = x_a$ 。在这种情况下,在不连续点,未定义函数的导数。由于许多优化算法是利用函数的导数作为算法的一部分,所以函数的不连续性会对此类优化算法造成困难。一般来说,任何建立在离散或混合搜索空间上的优化问题都会有一个不连续性的优化目标。

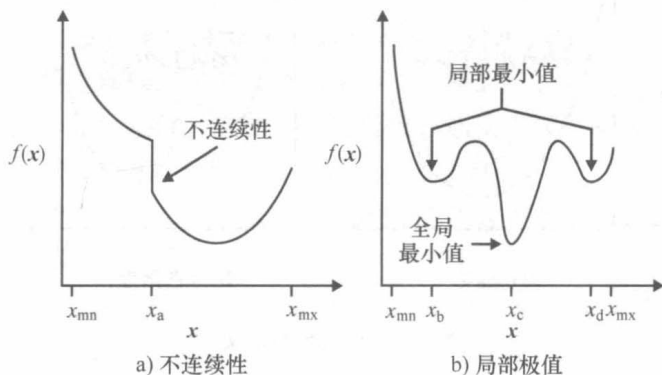


图 1.3 函数性质

另外一个会造成困难的性质是目标函数具有局部最小值,如图1.3b所示。其中在 $\mathbf{x} = x_b$ 、 $\mathbf{x} = x_c$ 和 $\mathbf{x} = x_d$ 处函数都是局部最小值,只有点 $\mathbf{x} = x_c$ 是全局最小值。许多最小化算法都收敛于局部最小值,不能成功找到全局最小值。

函数是否为凸函数与其是否存在局部极值密切相关。在讨论凸函数之前需要对凸集进行定义。设集合 $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ 。如果连接其中任意两点的线段全部包含在该集合内，就称该点集为凸集。换言之，如果对于任意的 $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b \in \Theta$ ，有

$$\alpha \mathbf{x}_a + (1 - \alpha) \mathbf{x}_b \in \Theta \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (1.2-2)$$

则 Θ 为凸集。图 1.4 对 $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ 凸集的定义进行了描述。

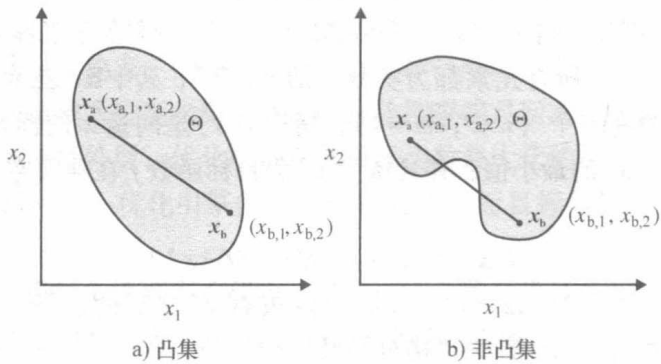


图 1.4 凸集的定义

为了确定一个函数是否为凸函数，需要考虑函数的上图（见图 1.5）。函数 $f(\mathbf{x})$ 的上图是大于或等于 $f(\mathbf{x})$ 值的点集。如果一个函数的上图是凸集，则函数为凸函数。注意，上图对应的凸集属于 $\mathbb{R}^{n+1}$ ，其中 n 是向量 $\mathbf{x}$ 的维数。

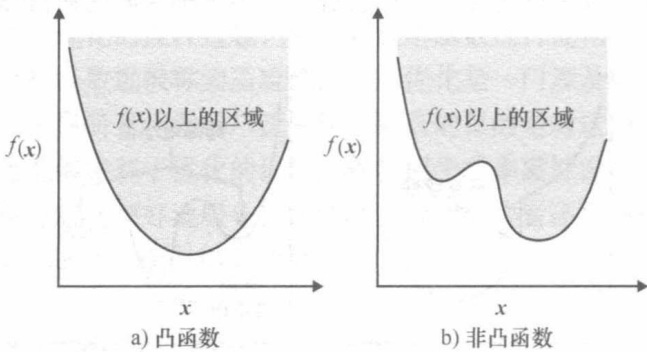


图 1.5 凸函数的定义

如果所要优化的函数是凸函数，则优化过程变得较为简单。可以证明凸函数的局部最小值同时也是全局最小值，所以图 1.3b 所示的情形不会发生。因此，求解一个连续的凸函数的最小值是直接和顺利的。

1.3 牛顿法求解单目标优化

现在介绍一种寻找目标函数 $f(\mathbf{x})$ 的极值的方法。关注这样一种情形, $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, 其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 。求取极值的算法包括梯度法、牛顿法、共轭方向法、拟牛顿法和 Nelder - Mead 单纯形法等。现在以牛顿法为代表进行介绍。

首先定义一些算子, 目标函数的一阶导数或梯度记为 $\nabla f(\mathbf{x})$, 并定义为

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]^T \quad (1.3-1)$$

二阶导数或者 $f(\mathbf{x})$ 的 Hessian 矩阵定义为

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial^2 x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix} \quad (1.3-2)$$

如果 $\mathbf{x}^*$ 是 f 的局部最小值, 且 $\mathbf{x}^*$ 在 Ω 内部, 则可以证明

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1.3-3)$$

并且

$$F(\mathbf{x}^*) \geq 0 \quad (1.3-4)$$

注意 $F(\mathbf{x}^*) \geq 0$ 是指 $F(\mathbf{x}^*)$ 半正定, 即 $\mathbf{y}^T F(\mathbf{x}^*) \mathbf{y} \geq 0, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 。第二个条件能够保证找到的是最小值而不是最大值。条件 (1.3-3) 和 (1.3-4) 是 $\mathbf{x}^*$ 为最小值的必要条件而非充分条件, 除非 f 是凸函数。如果 f 是凸函数, 则条件 (1.3-3) 和 (1.3-4) 是 $\mathbf{x}^*$ 为全局最小值的充分必要条件。

现在利用牛顿法求解函数的最小值。该方法是基于第 k 步对解的估算 $\mathbf{x}[k]$, 为迭代法。然后利用更新公式来产生一个 (希望) 改进的最小值的估算 $\mathbf{x}[k+1]$ 。更新公式利用泰勒级数将函数 f 在当前估算解 $\mathbf{x}[k]$ 一阶近似展开, 即

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}[k]) + \nabla f(\mathbf{x}[k])(\mathbf{x} - \mathbf{x}[k]) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}[k])^T F(\mathbf{x}[k])(\mathbf{x} - \mathbf{x}[k]) + H \end{aligned} \quad (1.3-5)$$

其中, H 表示高阶项。忽略高阶项, 根据式 (1.3-5) 可以得到 $f(\mathbf{x})$ 的梯度

$$\nabla f(\mathbf{x}) \approx \nabla f(\mathbf{x}[k]) + F(\mathbf{x}[k])(\mathbf{x} - \mathbf{x}[k]) \quad (1.3-6)$$

根据必要条件 (1.3-3), 取式 (1.3-6) 等号的右边并将其等于零, 然后用希望改进的估计 $\mathbf{x}[k+1]$ 替代 $\mathbf{x}$, 得到