数理化自学丛书

代数

第三册

数理化自学丛书

代　　数

第三册

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海人民出版社

王晓靖 78.5.

数理化自学丛书
代　　数（第 三 册）
数理化自学丛书编委会
数 学 编 写 小 组 编
（原上海科技版）
上海人民出版社出版　云南人民出版社重印
七二一六工厂印刷　新华书店发行
开本787×1092 1/32　印张12.25　字数270,000
1963年12月第1版　1977年11月新1版
1978年2月昆明第1次印刷
统一书号：13171·218　定价：0.81元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书中代数第三册，内容包括不等式，函数和它的图象，一次函数，二次函数，有理指数的幂函数，指数函数和对数函数，常用对数，指数方程和对数方程，数列等九章．书中有详细的说明和分析，并附有大量例题和习题，供练习巩固之用．

本书供学完本丛书代数一、二册的青年工人、在职干部、知识青年自学之用，也可供中等学校青年教师参考．

重印说明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的．计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册；《物理》四册；《化学》四册．这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序前进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用．这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎．但是在"四人帮"及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版．

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的"四人帮"．我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期．党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗．许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》．根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要．

十多年来，科学技术的发展是很快的．本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的．同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐．这些，要请读者在阅读时加以注意．

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考．

一九七七年十一月

目　录

第一章　不　等　式

在日常生活、生产实际和科学研究中，我们不但要考察量与量之间的相等关系，也要考察量与量之间的不等关系．反映在数学里，我们不但要研究等式，并且也要研究不等式．

在代数第二册里，我们曾学习过关于不等式的一些初步知识．这一章里，我们将在复习这些知识的基础上，系统地学习关于不等式的知识．

§1·1　不等式的概念

1．实数大小的比较　我们知道，两个实数 a 与 b 之间，总存在，而且只存在，下面三种关系中的一种：

(1) a 大于 b，记做 $a>b$；

(2) a 小于 b，记做 $a<b$；

(3) a 等于 b，记做 $a=b$．

我们还知道，要比较两个实数 a 和 b 的大小，只要考察它们的差就可以了，就是：

如果 $a-b$ 是正的，那末 $a>b$，如果 $a-b$ 是负的，那末 $a<b$，如果 $a-b$ 是零，那末 $a=b$；

反过来，如果 $a>b$，那末 $a-b$ 是正的，如果 $a<b$，那末 $a-b$ 是负的，如果 $a=b$，那末 $a-b$ 是零．

用式子来表示，就是：

设 a，b 为两实数，

$$\text{如果}\quad a-b\begin{cases}>0,\\<0,\\=0,\end{cases}\quad\text{那末}\quad a\begin{cases}>b,\\<b,\\=b;\end{cases}$$

$$\text{反过来,如果}\ a\begin{cases}>b,\\<b,\\=b,\end{cases}\quad\text{那末}\ a-b\begin{cases}>0,\\<0,\\=0.\end{cases}$$

在上面所讲的式子里，$a>b$ 和 $a<b$ 这两个式子是用不等号“$>$”和“$<$”把两个实数 a 和 b 联结起来构成的，它们都叫做**不等式**；$a=b$ 是用等号“$=$”把两个实数 a 和 b 联结起来构成的，它叫做**等式**.

2. 代数式的值的大小比较 有时候，我们也要比较两个代数式的值的大小. 这时，可以根据一个代数式的值大于、小于、或者等于另一个代数式的值，而分别用符号“$>$”，“$<$”，或者“$=$”把它们联结起来. 在前两种情况下，就组成了不等式；在后一种情况下，就组成了等式. 例如

$$3+2>4,\quad a+1<a+2$$

等等都是不等式；

$$3+2=5,\quad (a+1)^2=a^2+2a+1$$

等等都是等式.

因为单独用一个字母或数字所表示的数，也可以看做是代数式，所以我们说：

用不等号“$>$”或者“$<$”把两个代数式联结起来所成的式子叫做不等式；用等号“$=$”把两个代数式联结起来所成的式子，叫做等式.

象比较两个实数的大小一样，比较两个代数式的值的大小，也只要考察它们的差就可以了.

例 1. 比较 $(x+3)(x-5)$ 和 $(x+2)(x-4)$ 的大小.

【解】 $(x+3)(x-5)-(x+2)(x-4)$

$$=(x^2-2x-15)-(x^2-2x-8)$$
$$=-7<0,$$
$$\therefore\quad (x+3)(x-5)<(x+2)(x-4).$$

例 2．比较$(x^2+1)^2$和x^4+x^2+1的大小.

【解】 $(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$

$$=(x^4+2x^2+1)-(x^4+x^2+1)$$
$$=x^2.$$

(1) 如果$x=0$, 那末$x^2=0$, 这时有

$$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=0,$$
$$\therefore\quad (x^2+1)^2=x^4+x^2+1.$$

(2) 如果$x\neq0$, 因为不等于零的任何实数的平方都是正数,所以$x^2>0$. 这时有

$$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)>0,$$
$$\therefore\quad (x^2+1)^2>x^4+x^2+1.$$

注 上面这两种情况,合在一起可以写做

$$(x^2+1)^2\geqslant x^4+x^2+1.$$

这个式子表示$(x^2+1)^2$的值不小于x^4+x^2+1的值.

象这种用符号"$\geqslant$"(读做大于或等于)或者"$\leqslant$"(读做小于或等于)把两个代数式联结起来的式子,也叫做不等式. 为了区别,我们把用符号"$>$"或者"$<$"联结而成的不等式叫做**严格不等式**,而用符号"$\geqslant$"或者"$\leqslant$"联结而成的不等式叫做**非严格不等式**.

例 3．比较$(a-1)^2$和a^2+1的大小.

【解】 $(a-1)^2-(a^2+1)=(a^2-2a+1)-(a^2+1)$

$$=-2a.$$

因为字母a可能表示正数或负数,也可能表示零,所以要分做三种情况来考察:

(1) 如果a是正数,那末$-2a$就是负数,这时有

$$(a-1)^2<a^2+1.$$

(2) 如果 a 是负数，那末 $-2a$ 就是正数，这时有

$$(a-1)^2>a^2+1.$$

(3) 如果 a 是零，那末 $-2a$ 也是零，这时有

$$(a-1)^2=a^2+1.$$

上面讨论的三种情况，合在一起可以写做

$$(a-1)^2\begin{cases}<a^2+1 & \text{如果 } a>0,\\ >a^2+1 & \text{如果 } a<0,\\ =a^2+1 & \text{如果 } a=0.\end{cases}$$

习　题　1·1

比较下列各题中两个代数式的值的大小：

1. $(a-5)(a-7)$和$(a-6)^2$.

2. $(a+1)(a^2-a+1)$和$(a-1)(a^2+a+1)$.

3. $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ 和 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, $(x\neq0)$.

4. a^2+b^2 和 $2ab$.

[提示：按照 $a=b$ 或者 $a\neq b$ 分别考察.]

5. $(\sqrt{x}-1)^2$和$(\sqrt{x}+1)^2$.

§1·2　绝对不等式和条件不等式

在上节的例 1 中，我们看到不论字母 x 表示什么实数，不等式

$$(x+3)(x-5)<(x+2)(x-4)$$

总能成立. 在例 2 中，我们看到当 $x\neq0$ 的时候，不等式

$$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$$

才能成立，而当 $x=0$ 的时候，这个不等式就不成立.

如果不论用什么数值代替不等式中的字母，它都能够成立，这样的不等式叫做绝对不等式. 如果只有用某些范围内的数值代替不等式中的字母，它才能够成立，这样的不等式叫做条件不等式.

例如，不等式

$$(x+3)(x-5)<(x+2)(x-4)$$

和

$$a+1>a-2$$

都是绝对不等式；而不等式

$$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$$

和

$$(a-1)^2<a^2+1$$

都是条件不等式.

两边都不含有字母而能够成立的不等式，也叫做绝对不等式. 例如

$$5>3, \quad -5<-3$$

等等，都是绝对不等式.

例 1. 判断下列这些不等式中，哪些是绝对不等式，哪些是条件不等式？哪些不能成立？

(1) $\sqrt{2}>1.4$;　　(2) $x^2+1>0$;

(3) $x^2+1<0$;　　(4) $x+1<0$.

【解】 (1) 因为不等式 $\sqrt{2}>1.4$ 的两边都不含有字母，并且 $\sqrt{2}=1.414\cdots$ 的值确实大于 1.4，所以这个不等式是绝对不等式.

(2) 因为不论 x 是什么实数，x^2 都不是负数，因此 x^2+1 的值总大于零. 这就是说，不论 x 是什么实数，不等式 $x^2+1>0$ 总能成立，所以这个不等式是绝对不等式.

(3) 因为不论 x 是什么实数，x^2+1 的值总大于零，所以不论用什么数值代替 x，不等式 $x^2+1<0$ 都不能成立.

(4) 因为只有用比 -1 小的值代替 x，不等式 $x+1<0$ 才能成立，所以这个不等式是条件不等式.

在含有字母的不等式中，求出字母应当取什么范围内的数值才能使不等式成立，这个手续叫做**解不等式**．这里的字母叫做不等式的未知数，所求出的使不等式能够成立的未知数的那些数值范围，叫做**不等式的解**.

从上面所举的例子中，可以看到不等式的解可能有三种不同情况：

(1) 任何实数都是不等式的解：例如任何实数都是不等式 $x^2+1>0$ 的解．这种不等式就是绝对不等式.

(2) 只有某些范围内的实数是不等式的解：例如只有比 -1 小的实数是不等式 $x+1<0$ 的解．这种不等式就是条件不等式.

(3) 任何实数都不是不等式的解：例如任何实数都不是不等式 $x^2+1<0$ 的解．通常我们说这个不等式没有解.

例 2．通过观察，确定下列各不等式的解：

(1) $x^2<0$; (2) $(x-1)^2>0$; (3) $(x-1)^2+1>0$.

【解】 (1) 不论 x 是什么实数，x^2 的值不能小于零，这个不等式没有解.

(2) 只要 $x\neq 1$，$(x-1)^2$ 的值总大于零，所以这个不等式的解是除去 $x=1$ 以外的全体实数，也就是

$$x<1 \quad \text{或者} \quad x>1.$$

(3) 不论 x 是什么实数，$(x-1)^2$ 的值都不能是负数，因此 $(x-1)^2+1$ 的值总大于零．所以这个不等式的解是全体实数.

习 题 1·2

1．应用比较不等式左右两边两个代数式值的大小的方法，证明下

列各不等式是绝对不等式:

(1) $(x+1)(x-5)<(x-2)^2$;

(2) $(a+1)\left(a^2+\frac{1}{2}a+1\right)>\left(a+\frac{1}{2}\right)(a^2+a+1)$.

2. 通过观察,确定下列各不等式的解:

(1) $x^2>0$; (2) $(x+1)^2<0$;

(3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$; (4) $(x+1)^2>0$.

3. 把下列不等式中左边的式子先配方化成$(x+m)^2+k$的形式,再确定它的解:

(1) $x^2-2x+3>0$; (2) $x^2-x+1<0$;

(3) $x^2+3x+\frac{9}{4}>0$; (4) $x^2+x+\frac{1}{4}<0$.

§1·3 不等式的基本性质

对于等式来说,我们已经知道它具有下面这些基本性质:

(1) 如果 $a=b$, 那末 $b=a$; 反过来, 如果 $b=a$, 那末 $a=b$. (相等的对称性)

(2) 如果 $a=b$, $b=c$, 那末 $a=c$. (相等的传递性)

(3) 如果 $a=b$, 那末 $a+c=b+c$.

(4) 如果 $a=b$, 那末 $ac=bc$.

类似地,不等式也有下面这些基本性质:

性质 1. 如果 $a>b$, 那末 $b<a$; 反过来, 如果 $b<a$, 那末 $a>b$.

这个性质叫做**不等的对逆性.** 利用这个性质, 以后当我们研究不等式的时候,只需研究用一种不等号(例如用大于号“>”)联结起来的不等式的性质,就可以推出用另一种不等号(例如用小于号“<”)联接起来的不等式所具有的类似性质.

性质 2. 如果 $a>b$, $b>c$, 那末 $a>c$.

这个性质叫做**不等的传递性**. 利用这个性质，我们可以从一个不等式过渡到另一个不等式.

例如，从不等式 $\pi>3$ 和 $3>2\sqrt{2}$, 可以得出不等式

$$\pi>2\sqrt{2}.$$

性质 3. 如果 $a>b$, 那末 $a+c>b+c$.

这个性质指出：不等式的不等号两边加上一个相同的数，仍旧得到一个不等式，并且这个不等式与原来的不等式有相同的不等号.

例 1. 已知 $a+b>c$, 求证 $a>c-b$.

【证明】 在不等式 $a+b>c$ 的不等号两边同加上 $-b$, 得

$$a+b+(-b)>c+(-b),$$

$$\therefore\ a>c-b.$$

这个例子指出：不等式中任何一项可以把它的符号变成相反的符号后，从一边移到另一边.

过去我们在解一元一次不等式的时候，就经常应用到这一法则(移项法则).

例 2. 解不等式 $3x-1>2x$.

【解】 把不等式中含有 x 的项移到不等号的左边，常数项移到不等号的右边得

$$3x-2x>1.$$

$$\therefore\ x>1.$$

上面关于不等式的三个基本性质，都是很明显的. 现在我们进一步来研究在一个不等式的不等号两边同乘以一个数(正数、负数、或者零)的时候，将会产生怎样的结果. 我们先来看下面的例子.

例 3. 已知 $a>b$, 比较 ac 和 bc 的大小.

分析 要比较 ac 和 bc 的大小，只要考察它们的差 $ac-bc$，就是 $(a-b)c$ 是什么样性质的数就可以了．根据已知条件 $a>b$，可以知道差的一个因式 $a-b$ 一定是正数，因此，差 $(a-b)c$ 是正数、负数或者是零，要根据 c 是正数、负数或零来确定．

【解】 $$ac-bc=(a-b)c.$$

$$\because\ a>b,\quad \therefore\ a-b\ \text{是正数}.$$

(1) 如果 c 是正数，那末因为两个正数的积仍是正数，所以 $(a-b)c>0$，这时 $ac>bc$．

(2) 如果 c 是负数，那末因为一个正数与一个负数的积是负数，所以 $(a-b)c<0$，这时 $ac<bc$．

(3) 如果 c 等于零．那末 $(a-b)c$ 等于零，所以

$$ac=bc.$$

上面的例子，指出了不等式的第四个基本性质．

性质 4． 如果 $a>b$，那末

$$ac\begin{cases}>bc & (\text{当 } c>0 \text{ 的时候}),\\ =bc & (\text{当 } c=0 \text{ 的时候}),\\ <bc & (\text{当 } c<0 \text{ 的时候}).\end{cases}$$

过去，我们在解一元一次不等式的时候，也经常应用到这个性质．

例 4． 解不等式：

$$2(x+1)+\frac{x-2}{3}>\frac{7x}{2}-1.$$

【解】 在不等式的两边同乘以 6．得

$$12(x+1)+2(x-2)>21x-6,$$

就是
$$14x+8>21x-6.$$

移项，得

$$14x-21x>-6-8,$$

就是
$$-7x>-14.$$

在上式的两边同除以 $-7\left(\text{就是乘以}-\frac{1}{7}\right)$，得

$$x<2.$$

答：原不等式的解是 $x<2$.

为了讲法上的方便，当同时研究两个或几个不等式的时候，如果这些不等式里，每一个的左边都大于右边，或者每一个的左边都小于右边，那末就把这些不等式叫做同向不等式. 例如不等式

$$3x-1>2x, \quad 3x-2x>1 \quad \text{和} \quad x>1$$

是同向不等式. 如果两个不等式里，一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，那末就把这两个不等式叫做异向不等式. 例如不等式

$$-7x>-14 \quad \text{和} \quad x<2$$

是异向不等式.

这样，我们也可把不等式的基本性质 4 说成：

不等式的两边同乘以一个正数，那末得到和原不等式同向的不等式；如果同乘以一个负数，那末得到和原不等式异向的不等式；如果同乘以零，那末得到一个等式.

注意 等式的两边同乘以一个相同的数，不论是正数、负数或者零，结果总是一个等式，但不等式的两边同乘以一个相同的数，就须要根据乘数的性质来确定它的结果.

所以在应用不等式的这一性质的时候，首先必须要考察用来乘不等式两边的数(或者代数式的值)究竟是正数，是负数，还是零，否则就容易发生错误.

*例 5. 解关于 x 的不等式

$$mx-2>x-3m. \tag{1}$$

【解】 移项得

$$(m-1)x>2-3m, \tag{2}$$