# 内 容 提 要

本书共分二十讲，全面介绍函数、极限、连续、导数、不定积分、定积分、广义积分、矢量代数、多元函数、无穷级数、重积分、线积分、面积分和微分方程的主要概念和各种题型，每讲开始都有内容及公式提要，例题的综合性较强，并配有一定量的练习题（尽可能给出提示和答数），各讲自成系统，可挑选阅读，对于应用题和证明题、解题和复习要注意的问题，都单列一讲给予指导。

本书可作为第二课堂教材，适合自学，是学完高等数学的大学生或报考研究生复习的良好材料，也可供教师选题参考。

# 高 等 数 学 复 习 讲 座

Gaodeng Shuxue Fuxi Jiangzuo

—第 二 课 堂 教 材

张亚军 编

大连工学院出版社出版发行
（大连市甘井子区凌水河）
大连凌山印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：16 字数：345千字

# 目　　录

# 第一讲　函数概念

**内容及公式提要**

函数的定义：设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，当变量 $x$ 在数轴上某一部分取某一数值时，如果变量 $y$ 按照某一确定的法则，总有一个或多个确定的数值与之对应，则变量 $y$ 叫做变量 $x$ 的函数，而 $x$ 叫自变量，记 $y=f(x)$。这里的"$f$"是指某种确定的对应规律，即给出一个 $x$，按此规律便能找到对应的 $y$。

使函数有意义的一切自变量的全体，称为函数的定义域。

函数的形式：最大量出现和研究的是基本初等函数组成的初等函数。基本初等函数包括幂函数、三角函数、反三角函数、对数函数和指数函数，初等函数是指用一个式子表示的由基本初等函数通过有限次的加减乘除、乘方开方和复合步骤构成的函数。

初等函数的定义域、连续区间、求导和求积分应熟练掌握。

非初等函数一般是指这两种函数：其一是由两个或两个以上式子分段定义的函数；另一类是指用非初等方法，如极限、导数、积分、级数等形式定义的函数。

在微积分学中出现的函数，在形式上是多种多样的。

参数形式：有些函数用参数形式表示在求导和积分等应

用问题中，在处理上比较方便。常用的参数方程有圆、椭圆、直线、摆线、螺旋线等。

隐函数：如果在方程 $F(x, y)=0$ 中，令 $x$ 取某一区间内任一确定值，相应地总有满足这个方程的 $y$ 值存在，那么我们就说方程 $F(x, y)=0$ 在该区间上确定了一个隐函数 $y$。有些方程确定的隐函数很容易写成显函数 $y=f(x)$ 的形式，但多数隐函数写不出显式。

在许多证明问题和近似计算中，常常要将函数表示成所需阶数的泰勒公式。例如函数的一阶泰勒公式是：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

（$\xi$ 在 $x$ 与 $x_0$ 之间）

函数的幂级数展开式是函数呈无限形式的一种。这个问题将在第十二讲中作专题叙述。

函数的奇偶性：如对任何 $x$，满足 $f(x)=f(-x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如对任何 $x$，满足 $f(x)=-f(-x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，在研究函数图象、导数和积分时，常常要利用函数的奇偶性，在函数的富里叶级数展开中函数的奇偶性概念更是必不可少的。

函数的周期性：若有满足等式 $f(x)=f(x+a)$ 的最小正数 $a$，则称 $f(x)$ 是以 $a$ 为周期的周期函数。

函数的单调性：若对任意 $x_1\leqslant x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 是单调递增的；若对任意的 $x_1\leqslant x_2$，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 是单调递减的，在微积分中，主要用函数的一阶导数来判别函数的单调性的。在 $(a, b)$ 上，如有 $f'(x)\geqslant 0$，则称 $f(x)$ 在该区间单调递增；若有 $f'(x)\leqslant 0$，

则称$f(x)$在该区间单调递减。

函数方程：如果一个方程中含有 $f(x)$，而最终要求出 $f(x)$ 的解析式的显式，则这个方程称为函数方程，显然求解函数的微分方程也是函数方程。

## 一、函数的定义

### 1．函数的解析表达式

例 1．设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，计算 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$及$f\{f[f(x)]\}$。

解：$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x-1}{x}$，

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}$$

$$=\frac{x-1}{x-1-x}$$

$$=1-x.$$

又 $f[f(x)]=f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$$=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}$$

$$=x.$$

$$\therefore\quad f\{f[f(x)]\}=f(x)=\frac{x}{x-1}.$$

例 2．已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

解：$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$

$$=2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=2-2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=2-(1+\cos x)$$

$$=1-\cos x$$

例 3．若 $f(2x+a)=xe^{\frac{x}{b}}$（$a$、$b$ 为常数，$b\neq0$），求 $\int_{a+2b}^{y}f(t)dt$

解：设 $2x+a=t$，$x=\frac{t-a}{2}$.

由 $f(2x+a)=xe^{\frac{x}{b}}$ 得：

$$f(t)=\frac{t-a}{2}e^{\frac{t-a}{2b}},$$

$$\therefore\quad \int_{a+2b}^{y}f(t)dt=\int_{a+2b}^{y}\frac{t-a}{2}e^{\frac{t-a}{2b}}dt$$

$$= 2b^2 \int_{a+2b}^{y} \frac{t-a}{2b} e^{\frac{t-a}{2b}} d\left(\frac{t-a}{2b}\right) \left(设 \frac{t-a}{2b} = u\right)$$

$$= 2b^2 \int_{1}^{\frac{y-a}{2b}} ue^u du$$

$$= 2b^2 (ue^u - e^u) \Big|_{1}^{\frac{y-a}{2b}}$$

$$= 2b^2 \left(\frac{y-a}{2b} e^{\frac{y-a}{2b}} - e^{\frac{y-a}{2b}}\right)$$

$$= 2b^2 e^{\frac{y-a}{2b}} \left(\frac{y-a}{2b} - 1\right)$$

$$= b e^{\frac{y-a}{2b}} (y - a - 2b).$$

例 4．已知 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$，试求 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解：为求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，设 $t = \frac{1}{u}$，$dt = -\frac{du}{u^2}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t} dt$$

$$= \int_1^x \frac{-\ln u}{u^2\left(1+\frac{1}{u}\right)} (-du)$$

$$= \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)} du$$

$$=\int_1^x \frac{\ln t}{t(1+t)}dt$$

$$\therefore \quad f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\left[\frac{\ln t}{1+t}+\frac{\ln t}{t(1+t)}\right]dt$$

$$=\int_1^x \frac{t\ln t+\ln t}{t(1+t)}dt$$

$$=\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2}(\ln t)^2\Big|_1^x$$

$$=\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

**例5.** 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & 当\ x<0\\ 1, & 当\ x\geqslant 0\end{cases}$ 求$f[f(x)]$。

**解：** 先求 $f(x)\geqslant 0$ 及 $f(x)<0$ 的区域。

由 $f(x)\geqslant 0$，对应 $x\geqslant -1$；

由 $f(x)<0$，对应 $x<-1$。

$$\therefore \quad f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & x<-1\\ 1, & x\geqslant -1\end{cases}$$

又当 $x<-1$ 时，$f(x)=1+x$，故有

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1.\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

**例6.** 若 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，并已知$y=1$时$z=x$，

试求 $f(x)$的分析表达式以及$z$的分析表达式。

解：∵ $y=1$ 时 $z=x$， ∴ $x=1+f(\sqrt[3]{x}-1)$，

即 $f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$，

设 $\sqrt[3]{x}-1=t$， $x=(t+1)^3$，

∴ $f(t)=(t+1)^3-1=t^3+3t^2+3t$，

$f(x)=x^3+3x^2+3x$

∴ $z=\sqrt{y}+x-1$

2．函数的定义域

例 7．求函数 $y=\arccos\dfrac{x}{x+y}$的定义域。

解：必须 $\left|\dfrac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$

$x^2\leqslant(x+y)^2$，

∴ $y(y+2x)\geqslant 0$

当 $\begin{cases}y\geqslant 0,\\ y+2x\geqslant 0;\end{cases}$

即：$y\geqslant 0$，$y\geqslant -2x$；

或 $\begin{cases}y<0\\ y+2x<0\end{cases}$

即：$y<0$，$y<-2x$。

定义域见图1.1阴影部分。

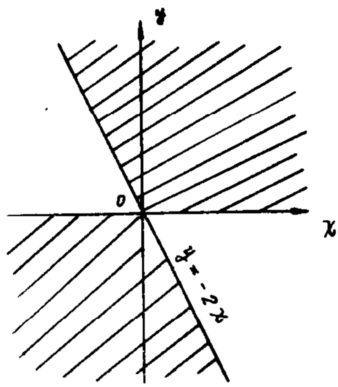


图 1.1

例 8．设函数 $f(x)$的定义域为[0，1]，试求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域．

解：由$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$．

当$-\dfrac{1}{2}\leqslant a<0$ 时，$x\in[-a,\ 1+a]$，

当 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$时，$x\in[a,\ 1-a]$

见图 1.2。图 1.2 中正方形四条边为：

$$x\pm a=0,$$

$$x\pm a=1.$$

从图中可以看出函数的定义域依赖于参数 $a$，当 $a$ 一旦确定后，对应的确定了 $x$ 的范围。

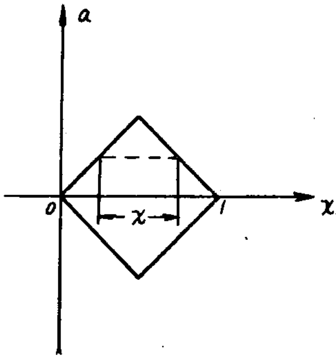


图 1.2

## 二、函数的形式

### 1．初等函数与非初等函数

例 9．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0\end{cases}$

求 $\int_0^2 f(x-1)dx$。

解：设 $x-1=u$，

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(u)du$$

$$=\int_{-1}^0 f(u)du+\int_0^1 f(u)du$$

$$=\int_{-1}^0\frac{dx}{1+e^x}+\int_0^1\frac{dx}{1+x}$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x}$$

$$=-\ln(1+e^{-x})\Big|_{-1}^{0}+\ln(1+x)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\ln\frac{1+e}{2}+\ln 2$$

$$=\ln(1+e).$$

例10．已知$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 当\ x\leqslant c,\\ ax+b, & 当\ x>c.\end{cases}$

（其中 $c$ 为常数）试确定 $a$、$b$，使 $f'(c)$存在．

解：要使 $f'(c)$存在，则至少应使 $f(x)$ 在 $x=c$ 处连续，即应有

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$

则 $\lim\limits_{x\to c-} f(x)=\lim\limits_{x\to c-}\sin x=\sin c$

$\lim\limits_{x\to c+} f(x)=\lim\limits_{x\to c+}(ax+b)=ac+b.$

应有 $\lim\limits_{x\to c-} f(x)=\lim\limits_{x\to c+} f(x)$

即 $\sin c=ac+b$,

$\therefore\quad b=\sin c-ac.$

$$\lim_{x\to c-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{\sin x-\sin c}{x-c}=\cos c,$$

$$\lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{ax+b-\sin c}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{ax+\sin c-ac-\sin c}{x-c}=a.$$

为使 $f'(c)$存在，必须

$$\lim_{x\to c-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

即应有

$$\cos c=a.$$

总之，为使 $f'(c)$存在，$a$、$b$必须满足

$$\begin{cases}a=\cos c,\\ b=\sin c-ac.\end{cases}$$

2. 用极限式定义的函数

例11. 作函数$y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$　　　$(x\geqslant 0)$的图形，并求不连续点。

解：$x=1$，$y=f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+1^n}=\dfrac{1}{2}$，

$0\leqslant x<1$，$y=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}=1$，

$x>1$，$y=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}=0$。

$$\therefore\quad y=f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

$x=1$ 为 $y$ 的第一类不连续点（见图 1.3）

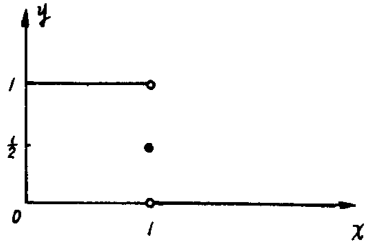


图 1.3

例12. 作函数$y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$的图形，并求不连续点。

解：$|x|\leqslant 1$,

$$y=f(x)=\lim_{n\to\infty}(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}}=1,$$

$|x|>1$,

$$y=f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=x^2.$$

$$\therefore\quad y=f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ x^2, & |x|>1\end{cases}$$

$y$ 处处连续。

3. 用积分定义的函数

例13. 已知$f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

求：$I(x)=\int_0^x f(x)\,dx$.

解：$x\leqslant -\frac{\pi}{2}$，

$$I(x)=\int_0^x f(x)dx$$

$$=\int_0^{-\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(x)dx$$

$$=\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin x dx+0$$

$$=1,$$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$。

$$I(x)=\int_0^x f(x)dx$$

$$=\int_0^x \sin x dx$$

$$=1-\cos x,$$

$x\geqslant\frac{\pi}{2}$，

$$I(x)=\int_0^x f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx+0$$

$$=1。$$

$$\therefore \quad I(x)=\begin{cases} 1-\cos x, & |x|<\frac{\pi}{2} \\ 1, & |x|\geqslant\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

例14. 设 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^x \cos t^2 dt=x^2$，求 $y'$ 及 $y''$.

解：将原方程两边对 $x$ 求导，

$$e^{y^2}y'+\cos x^2=2x, \qquad (*)$$

由（*）解得：$y'=(2x-\cos x^2)e^{-y^2}$.

由（*）两边对 $x$ 再次求导，

$$e^{y^2}y''+2ye^{y^2}(y')^2-2x\sin x^2=2,$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad y''&=(2+2x\sin x^2)e^{-y^2}-2y(y')^2\\ &=2(1+x\sin x^2)e^{-y^2}-2y(2x-\cos x^2)e^{-2y^2}.\end{aligned}$$

4. 函数的参数形式

例15. 求曲线 $x=\frac{3at}{1+t^2}$，$y=\frac{3at^2}{1+t^2}$ 在 $t=2$ 处的切线方程及法线方程。

解：$t=2$ 时，$x=\frac{6a}{5}$，$y=\frac{12a}{5}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{3at^2}{1+t^2}\right)}{d\left(\frac{3at}{1+t^2}\right)}=\frac{\frac{2t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}}=\frac{2t}{1-t^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=-\frac{4}{3}.$$

$\therefore$ 切线方程：$y-\frac{12a}{5}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{6a}{5}\right)$，

即 $4x+3y-12a=0$。

法线方程：$y-\frac{12a}{5}=\frac{3}{4}\left(x-\frac{6a}{5}\right)$，

即 $3x-4y+6a=0$。

5．用泰勒公式表示函数

例16．若$f(x)$在$[a,b]$上有$n$阶导数存在，且$f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$，则在$(a,b)$内至少存在一点$\xi$，使得$f^{(n)}(\xi)=0$，其中$a\leqslant\xi\leqslant b$。

证：函数$f(x)$在$x=b$处的$n-1$阶泰勒公式为：

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2}(x-b)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-b)^n,$$

其中$\xi$在$x$与$b$之间，由于$f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$，故

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-b)^n$$

令 $x=a$，则有

$$f(a)=\frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}(a-b)^n$$

其中$\eta$在$a$与$b$之间。

$\because$ $f(a)=0$，$\therefore$ $(a,b)$内至少有一点$\eta$，使 $f^{(n)}(\eta)=0$。

## 三、函数的奇偶性、周期性和单调性

### 1. 函数的奇偶性

例17. 已知$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，问 $f(x)$是奇函数还是偶函数？

解：$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})$

$$=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$$

$$=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=-f(x)$$

∴ $f(x)$ 为奇函数。

例18. 设 $f(x)$满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中$a$、$b$、$c$为常数，且$|a|\neq|b|$。

求 (1) $f(x)$的表达式； (2) 证明 $f(x)$为奇函数。

解：在原给方程中，用$\frac{1}{x}$代 $x$ 得：

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$$

消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$得：

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx,$$