经济学百科全书 6

于宗先：主编

经济计量学

經濟學百科全書

第六編

經濟計量學

于宗先 主編

凡　例

一、本全書共分八編，卽㈠經濟史，㈡經濟思想史，㈢經濟理論，㈣財政學，㈤貨幣與金融、國際經濟學，㈥經濟計量學，㈦人力資源、資源經濟學和農業經濟學，以及㈧空間經濟學。

二、每編前面有該編之目錄，中（英）文對照；其次序是按中文的筆劃，由少而多。每編之末則有該編之中文和英文索引。中文索引按中文筆劃，由少而多，英文索引則按ＡＢＣ次序。

三、每一名詞正文之後，均列有參考文獻，供讀者作進一步研究之用。

四、所有外國人名，均按其家庭姓氏譯成中文，中文後，再附以外文全名。

五、凡名詞係由外文翻譯而來者，在其後面括號內均附外文，以供參考。

六、每一名詞之撰述者，其姓名均放在該名詞正文之後。

七、參考文獻中，常有縮寫之外文雜誌名稱，為便於查考，玆列一對照表於后：

縮寫	全　名
AER	*American Economic Review*
CJE	*Canadian Journal of Economics*
EHR	*Economic History Review*
EI	*Economic Inquiry*
EJ	*Economic Journal*
IER	*International Economic Review*
JASA	*Journal of American Statistical Association*
JDE	*Journal of Development Economics*
JE	*Journal of Econometrics*
JEH	*Journal of Economic History*
JEL	*Journal of Economic Literature*
JFE	*Journal of Farm Economics*
JHR	*Journal of Human Resources*
JIE	*Journal of Industrial Economics*
JME	*Journal of Monetary Economics*

JPE	*Journal of Political Economy*
LE	*Land Economics*
QJE	*Quarterly Journal of Economics*
RES	*Review of Economics and Statistics*
REST	*Review of Economic Studies*
SEJ	*Southern Economic Journal*
SES	*Social and Economic Studies*
SJE	*Swedish Journal of Economics*

序

專爲一門社會科學編撰「百科全書」(encyclopedia)，在中華民國固是初創，在西方國家也是罕見。就社會科學而言，在美國有1930年到1935年出版的〔社會科學百科全書〕(*Encyclopaedia of the Social Sciences*)及1968年出版的〔社會科學國際百科全書〕(*International Encyclopedia of Social Sciences*)；在國內，近似社會科學百科全書的，則爲民國六十一年初出版的〔雲五社會科學大辭典〕。就作爲社會科學一支的經濟學而言，在西方國家，常見的是經濟學詞典，難見的也是經濟學百科全書；在國內，坊間有編譯的經濟學詞典，但經濟學百科全書亦付闕如。考其原因，這不僅在於編撰一種百科全書耗資龐大，非一般出版公司的能力所及，而且要使這種百科全書涵蓋完全，且能達到傳播新知的目的，亦非少數學者專家所能完成。我們之敢於嘗試爲經濟學編撰一部百科全書主要爲下列兩個動機所驅使：

一、臺灣經濟，經過三十多年的快速發展，已由落後狀態進展爲現代化境地，也已由貧窮處境提升爲繁榮、富足的局面，而這一成就已受到國際上的認定和讚揚。可是在經濟學方面的發展，是否也同臺灣經濟一樣，有長足的進步？似乎尚找不到表達它的方式，及衡量它的標準。爲了替經濟學在臺灣的發展，建立一個里程碑，我們感到有編一部經濟學百科全書的必要。就民國七十年前後臺灣的學術境況而言，這無疑是個拓荒的工作。

二、有系統地介紹一種學科的基本概念、涵蓋範圍及發展趨向，對於一般知識分子，可說十分重要。對研讀專門性的論著，往往需要具備些基本知識，如讀者在此方面無相當的修養，將不會產生很大的興趣。至於經濟學詞典，通常過於簡略，一般讀者要想對某一經濟問題有個來龍去脈的瞭解，也無法由其獲得滿足。百科全書就是利用較通俗的文字，有系統的敍述，將問題之前因後果交代得比較清楚，容易產生較大的吸收效果。卽使對有志於學術研究的讀者而言，百科全書也有很大的指點作用。

完成一部符合理想的經濟學百科全書，並非易事。除所需的經費有着落外，最重要的是編撰人才的選擇與邀請，取材的範圍與原則。在人才的

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

選擇和邀請方面，我們深切認識到在臺灣尚沒有像美國那麼多的經濟學者及專家，同時就研究的成就而言，與他們相較，似乎尚有段距離。處在這種條件下，很難達到西方國家所顯示的水準。像在西方國家，編撰百科全書時，通常由一位學者撰述一個名詞，因爲他們的國家大，人才多，他們有機會從衆學者中，挑選最具資格的人來擔任每個名詞的撰述工作。但在臺灣，雖然我們也想這樣做，但條件不許可，原因是經濟學方面的人才畢竟有限。在人才有限的情況下，不可能將標準訂的太高，所以有的學者同時撰述很多名詞。不過，我們所把握的原則，乃這位學者是這門學科中，至少在國內，他是最具資格來撰寫這些名詞的人。

在取材的範圍和原則方面，我們儘可能將當前最流行的重要經濟學名詞包括進來；而撰寫的方式主要是系統性的綜合與有層次的分析。在文獻參考上，主要是英文的論著和專書。尤其是在美國出版的〔社會科學國際百科全書〕，它不僅引發我們編撰這部百科全書的最早動機，更提供了豐富的材料。譬如在經濟思想史部分，我們所介紹的西方經濟學家及其經濟思想，主要是參照〔社會科學國際百科全書〕的有關部分，經迻譯、補充然後改寫而成，因爲那些都是被確定的資料，無另立新意的必要。

無論如何，這部〔經濟學百科全書〕的撰述者幾乎包括了國內經濟學界的所有學者和專家。大部分的名詞是由學術機構的學者撰寫的，少數是由有關業務部門的專家負責的。這部〔經濟學百科全書〕不僅包括一般性、無地域性的經濟觀念，也涵蓋了有關國內的經濟名詞。對於前者，所參考的文獻主要爲西方的；對於後者，所參考的文獻則是來自實證研究成果，以及有關財經的法令規章。

從每部百科全書編撰所費時間之長，可印證編撰一部百科全書確是件艱鉅的工作。像美國的〔社會科學百科全書〕，其準備工作即費了六年(1927–32)，出版又費了六年（1930–35）。1968 年出版的〔社會科學國際百科全書〕，1955 年起構想，1960 年起準備，到 1968 年方得以出版問世。我們這部〔經濟學百科全書〕，自準備到出版，也先後費了七年多的時間（民國六十七年至七十五年）。在這七年多的過程之中，臺灣經濟環境固有了重大的變化，而經濟學的發展也有了相當大的演變。凱因斯經濟學的光芒幾爲供給面經濟學所掩蓋，理性預期理論在經濟學領域中已占有一席之地，貨幣學派的主張在受到重視之後復又面臨新環境的挑戰。在這種劇烈變遷的局面之下，我們的編撰工作也受到了影響。四、五年以前所撰的名詞，有些摻有時間的性質，必須加以修改與補充，同時新發生的經濟問題，也必須加以斟酌與引進。我們在這方面雖然盡了些力，但仍覺與所期望的條件有些距離。

這部〔經濟學百科全書〕共分八編，分別由十位教授負責彙集稿件和初步審閱工作。這八編依次爲：第一編：經濟史，包括中國經濟史和西洋經濟史，由劉翠溶教授負責；第二編：經濟思想史，包括中國經濟思想史和西洋經濟思想史，前者由侯家駒教授負責，後者由于宗先教授負責；第三編：經濟理論，包括個體經濟理論和總體經濟理論，由陸民仁教授負責；第四編：財政學，由陳聽安教授負責；第五編：國際經濟學、貨幣與金融，前一部分由周宜魁教授負責，後兩部分由邱正雄教授負責；第六編：經濟計量學，由于宗先教授負責；第七編：人力資源、資源經濟學和農業經濟學，前一部分由劉克智教授負責，後兩部分由吳功顯教授負責；第八編：空間經濟學，由唐富藏教授負責。在這八編中，每編篇幅大體相若，而在每編所包括的許多經濟學名詞中，又有很多有關名詞涵蓋在內，且被釋義。爲便於讀者之追根究柢，在每一名詞之後，開列出許多可資參考的文獻。

由於經濟學名詞及經濟學家多非產自中國，而在一般翻譯上，不免各自爲政，致使一般讀者對其不知所云。對於這個問題，除在重要名詞及人名之後附列英文名詞，我們力求其同。同時，有些名詞之錯誤翻譯已被沿用了二、三十年，且形成了「積非成是」的局面，我們也趁這個機會加以修正。譬如常見的「線性」(linear)、「非線性」(nonlinear)，我們將其修正爲「直線性」、「非直線性」。習用的「計量經濟學」(Econometrics)也改正爲「經濟計量學」。類似的事例很多，無需贅述。

無論如何，歷經七年多的漫長時間，這部〔經濟學百科全書〕終於問世了。在此，我們對聯經出版事業公司總經理劉國瑞先生之耐心等待，鼎力支持，致最高的敬意；對發行人王必成先生爲推動學術發展，提高文化水準，不惜花費鉅資，出版學術性著作之精神，致欽佩之意。最後，對東吳大學侯家駒教授之協助策劃，熱心督導，以及對參與撰寫這部百科全書的學術界朋友，表示衷心的感激。如果沒有他們之熱誠合作，獻出他們的知識，這部百科全書不可能問世。

無疑，這部〔經濟學百科全書〕是當前臺灣經濟學發展的里程碑。它所涵蓋的範圍固有待繼續增大，而它所達到的水準亦有待繼續提升。同時，由於這是份拓荒性的工作，亟待改進之處很多，而且發生的各種錯誤也在所難免。在此，竭誠歡迎批評與指教。

主編　于宗先謹識

民國七十五年三月

目錄

巴克斯—珍金斯時間序列分析法 (Box-Jenkins Time Series Methods)

一、前言

統計學在經過不斷的研究與發展之後，已成爲多項學科的基礎與主要的分析工具；加以近代各國對經建計畫的重視，使得統計分析在決策過程中亦占有一席之地。因此，統計理論與統計方法的應用不但愈來愈普遍，而且也愈見成熟，時間序列分析法 (time series analysis) 即爲其中的佼佼者。

時間序列分析法的基本理論架構可溯至 1920 年代耶勒 (W. Yule) 的貢獻，其後歷經斯路斯基 (E. Slutsky)、肯達爾 (M. G. Kendall)、巴特勒特 (M. S. Bartlett) 等多位學者的推展，該模型乃漸趨完善。但是時間序列模型的建立方法卻是直到 1970 年代初期，始由巴克斯(G. E. P. Box) 與珍金斯 (G. M. Jenkins) 兩位學者在 1970 年完成，此即所謂的「綜合性自我迴歸移動平均模型」(autoregressive integrated moving average models, 簡寫爲 ARIMA 模型)。此後由於電子計算機快速發展的配合，時間序列分析法乃普遍被應用在經濟、商業、工程等多種領域的資料分析上，成效頗爲卓著，尤其在短期預測上更見功效。

經濟計量學是一門融合經濟理論與統計方法於一爐的學科。計量分析時常用到經濟變數的時間序列資料，而不論是單一方程式或是聯立方程式模型，絕大部分的計量模型都可用來分析時間序列資料，藉以瞭解經濟變數間的因果關係，進而預測未來。然而，一般所沿用的迴歸分析法固然方便，但在引用既有的理論因果關係時，對於落後變數 (lagged variables) 與誤差項自我相關性 (autocorrelation) 的設定上，卻顯得力有所不逮，而時間序列分析法正好可以彌補這些缺點。

二、ARIMA 模型的理論架構

(一)時間序列的基本結構

假定$\{Y_t\}$($t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$) 係由隨機過程 (stochastic pro cess）產生的等時距（equispaced intervals of time）序列，具備定態（stationarity）與可逆轉（invertibility）的特性。再設 $\{a_t\}$（$t=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots$）代表「純噪音」（white noise），爲一羣以 0 爲均數，$\sigma_a{}^2$ 爲變異數之互相獨立的常態變數，亦即 $a_t \sim \text{iid } N(0,\sigma_a{}^2)$。

我們可用兩種完全不同的模型來表現 Y_t 數列的產生過程。一爲自我迴歸模型（autoregressive models，簡寫爲 AR (p)），一爲移動平均模型（moving-average models，簡寫爲 MA(q)）。AR(p) 模型可以下列數學式表爲:

$$y_t=\phi_1 y_{t-1}+\phi_2 y_{t-2}+\cdots\cdots+\phi_p y_{t-p}+a_t$$

或變爲:

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots\cdots-\phi_p B^p)y_t=a_t$$

式中

$y_t=Y_t-\mu$，μ 爲均數

$\phi_1,\phi_2,\cdots\cdots,\phi_p$ 爲自我迴歸係數，p 爲其次數（order）。

B 則爲落後移動運算數（backward shift operator）

MA(q) 模型的數學模式則爲:

$$y_t=a_t-\theta_1 a_{t-1}-\theta_2 a_{t-2}-\cdots\cdots-\theta_q a_{t-q}$$

或寫爲:

$$y_t=(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots\cdots-\theta_q B^q)a_t$$

式中

$\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_q$ 爲移動平均係數，q 爲其次數。

有限次數的 AR(p) 模型可以改寫爲無限次數的 MA(∞) 模型，即

$$y_t=\phi_p{}^{-1}(B)a_t$$

式中

$$\phi_p(B)=1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots\cdots-\phi_p B^p$$

以 AR(1) 爲例:

$$\begin{aligned} y_t&=(1-\phi_1 B)^{-1}a_t,\ |\phi_1|<1 \\ &=(1+\phi_1 B+\phi_1{}^2 B^2+\cdots\cdots)a_t \end{aligned}$$

同理，有限次數的 MA(q) 模型亦可改寫爲無限次數的 AR(∞) 模型。如此，Y_t 數列的產生即可完全以 AR 模型或完全以 MA 模型來表現；但實際上，爲達到模型的「精簡」（parsimony），常有必要同時考慮 AR 與 MA 兩部分，而以 ARMA（p，q）之混合模型來表現 Y_t 數列，即

$$\begin{aligned} y_t=&\phi_1 y_{t-1}+\phi_2 y_{t-2}+\cdots\cdots+\phi_p y_{t-p}+a_t-\theta_1 a_{t-1} \\ &-\theta_2 a_{t-2}-\cdots-\theta_q a_{t-q} \end{aligned}$$

或寫爲:

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$$(1-\phi_1B-\phi_2B^2-\cdots\cdots-\phi_pB^p)y_t=(1-\theta_1B-\theta_2B^2-\cdots\cdots\phi_qB^q)a_t$$

如 ARMA(1, 1) 可寫爲:

$$(1-\phi_1B)y_t=(1-\theta_1B)a_t$$

(二)自我相關函數與局部自我相關函數

以上所述的三類模型，可分別由自我相關函數(autocorrelation function，簡寫爲 ACF) 與局部自我相關函數 (partial autocorrelation function，簡寫爲 PACF) 看出各類模型的基本特徵。

就自我相關函數而言，各期的自我相關係數可寫爲:

$$\rho_k=\frac{E[(Y_t-\mu)(Y_{t+k}-\mu)]}{\sqrt{E[(Y_t-\mu)^2]E[(Y_{t+k}-\mu)^2]}}$$

$$=\frac{Cov(Y_t,Y_{t+k})}{Var(Y_t)},\quad k=1,2,\cdots\cdots$$

MA(q) 模型的 ACF 呈現「立即消失」(cut off) 的形式，亦即除了前面 q 期之外，其餘各期的 ρ_k 均等於零，其 ACF 可寫爲:

$$\rho_k=\begin{cases}\dfrac{-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\cdots\cdots+\theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^{\,2}+\cdots\cdots\theta_q^{\,2}} & k=1,\cdots\cdots,q\\[2ex] 0 & k>q\end{cases}$$

AR(p) 模型的 ACF 所呈現的則是「逐漸消失」(die out) 的形式；當 $p=1$ 時，卽 AR(1) 模型的 ACF 爲:

$$\rho_k=\phi_1^{\,k},\quad k=1,2,\cdots\cdots$$

當 $\rho>1$ 時，AR 模型的 ACF 則較爲複雜，可經由下列耶勒-瓦勒克 (Yule-Walker) 方程式解出 $\rho_1,\cdots\cdots,\rho_p$ 等值:

$$\begin{cases}\rho_1=\phi_1+\phi_2\rho_1+\cdots\cdots+\phi_p\rho_{p-1}\\ \rho_2=\phi_1\rho_1+\phi_2+\cdots\cdots+\phi_p\rho_{p-2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \rho_p=\phi_1\rho_{p-1}+\phi_2\rho_{p-2}+\cdots\cdots+\phi_p\end{cases}$$

且

$$\rho_j=\phi_1\rho_{j-1}+\phi_2\rho_{j-2}+\cdots\cdots+\phi_p\rho_{j-p}\ j>p$$

至於 ARMA(p，q) 模型的 ACF 則兼具 AR 模型與 MA 模型的特性。

其次，各模型所呈現的局部自我相關函數的形式正好與其自我相關函數是相對的。亦卽，AR 模型的 PACF 是「立卽消失」的形式，MA 模型的 PACF 是「逐漸消失」的形式，而 ARMA 模型的 PACF 則仍兼有上述兩者的特徵。假定 ϕ_{kj} 代表次數爲 k 的 AR 模型之第 j 項自我迴

歸係數，則 ϕ_{kk} 代表該模型之最後一項係數。如此，$\phi_{11}, \phi_{22}, \cdots\cdots, \phi_{kk}$，……乃形成 PACF 的各項係數。PACF 可由 Yule-Walker 方程式解得，就 AR(p) 模型而言，

當 $p=1$ 時，$\phi_{11}=\rho_1$

當 $p=2$ 時，

$$\phi_{22}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

當 $p=3$ 時，

$$\phi_{33}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

如此類推。既然 $\phi_{kk}(k=1,2,\cdots\cdots)$ 代表各次 AR(p) 模型的最後一項係數，因此，次數等於 p 的 AR 模型之 PACF 將延續至 p 期，p 期以後的各項係數均等於零，此即爲「立即消失」的形式。相反地，MA(q) 模型相當於無限次數的 AR(∞) 模型，因此其 ϕ_{kk} 將延續至無限期，而呈現「逐漸消失」的形式。

爲進一步考慮非定態 (nonstationary) 數列，可將上述 ARMA(p , q) 模型一般化，亦即化成下面的 ARIMA(p , d , q) 模型:

$$\phi_p(B)(1-B)^d y_t=\theta_0+\theta_q(B)a_t$$

式中

$$\phi_p(B)=1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots\cdots-\phi_p B^p;$$
$$\theta_q(B)=1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots\cdots-\theta_q B^q;$$

θ_0 爲常數項，代表趨勢值;

d 爲差分次數。

當 $d=0$ 時，表示 Y_t 爲定態數列; 而 $d>0$ 時，Y_t 爲非定態數列，此時可藉助差分的方式將之變爲定態數列。例如 $d=1$ 時，表示非定態的 Y_t 數列經過一次差分後即成爲定態; 而 $d=2$ 時，即表示 Y_t 數列須經過二次差分方能成爲定態，如此類推，且 $(1-B)^d y_t=(1-B)^d Y_t$。

此外，ARIMA 模型亦可涵蓋具有季節變動的數列，而進一步再化爲下列的形式:

$$\phi_p(B)\Phi_{p*}(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^{d*}y_t=\theta_0+\theta_q(B)\Theta_{q*}(B^s)a_t$$

式中

$$\Phi_{p*}(B^s)=1-\Phi_1B^s-\Phi_2B^{2s}-\cdots\cdots-\Phi_{p*}B^{p*s},$$

爲季節性自我迴歸部分，p^*爲其次數。

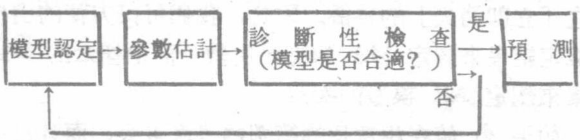
$$\Theta_{q*}(B^s)=1-\Theta_1B^s-\Theta_2B^{2s}-\cdots\cdots-\Theta_{q*}B^{q*s},$$

爲季節性移動平均部分，q^* 爲其次數。

d 爲規則性差分 (regular difference) 次數； d^* 則爲季節性差分 (seasonal difference)次數； s 爲季節期間 (seasonal period)。

三、ARIMA模型的建立

由於 ARIMA模型包含了相當廣泛的各類模型，無法一一加以試驗。因而，必須先由樣本資料初步認定一個或整個模型，再經由不斷的修正過程，最後才選擇一個最適當的模型來進行預測。根據巴克斯－珍金斯的設計方式，有關模型建立的基本步驟如下圖所示:



今將「認定」、「估計」、「診斷性檢查」與「預測」四部分簡單分述於後:

(一)認定 (identification or tentative specification)

模型的初步設計，乃是利用樣本資料的自我相關函數 (sample autocorrelation function，簡寫爲 SACF) 與局部相關函數 (sample partial autocorrelation function，簡寫爲 SPACF) 作爲認定的基本工具，SACF 的計算公式如下:

$$\hat{\rho}_k=\frac{\sum_{t=1}^{n-k}(Y_t-\bar{Y})(Y_{t+k}-\bar{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\bar{Y})^2},\quad k=1,2,\cdots\cdots$$

式中，n 爲樣本觀察點個數；$\bar{Y}$ 爲樣本均數。

對應的變異數即爲:

$$V_{ar}(\hat{\rho}_k) \simeq \frac{1}{n}\left(1+2\sum_{i=1}^{q}\rho_i^2\right),\quad k>q$$

至於 PACF 則可由下式逐次求得:

$$\hat{\rho}_j=\hat{\phi}_{k1}\hat{\rho}_{j-1}+\hat{\phi}_{k2}\hat{\rho}_{j-2}+\cdots\cdots+\hat{\phi}_{k(k-1)}\hat{\rho}_{j-k-1}+\hat{\phi}_{kk}\hat{\rho}_j$$
$$j=1,2,\cdots\cdots k$$

亦即　$\hat{\phi}_{11}=\hat{\rho}_1$

$$\hat{\phi}_{22}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \hat{\rho}_1\\ \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \hat{\rho}_1\\ \hat{\rho}_1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\hat{\rho}_2-\hat{\rho}_1^2}{1-\hat{\rho}_1^2}$$，如此類推。

則對應的變異數成為:

$$V_{ar}(\hat{\phi}_{kk})\simeq\frac{1}{n},\quad k\geq p+1$$

大樣本時，$\hat{\rho}_k$ 與 $\hat{\phi}_{kk}$ 皆可視為近似常態分配，由此可用來檢定各個估計值的顯著與否。

由於 MA(q) 與 AR(p) 的理論模型分別在 ACF 與 PACF 呈現 q 次與 p 次之「立即消失」的特徵。因此，我們可以方便的由樣本的 SACF 之顯著性檢定結果來認定 MA 模型的次數，而由樣本的 SPACF 之顯著性檢定結果來認定 AR 模型的次數。

此外，如果 $\hat{\rho}_k$ 值在相當長的範圍內一直很大，而且沒有逐漸消失的跡象，則表示此為一非定態數列，應先利用差分或取對數等方式將之轉換成定態數列後，再觀察其 SACF 或 SPACF 的形式來認定模型。

㈡估計 (estimation)

模型一經設定之後，在大樣本與常態分配的假定下，我們可利用最大概似估計法 (MLE) 得到具有不偏性、有效性與一致性等漸近的 (asymptotic) 參數估計特性。亦即在 ARIMA (p, d, q) 模型的設定下，假定 $a_t \sim$ iid $N(0,\sigma_a^2)$，則 $a_t=W_t-\phi W_{t-1}-\cdots\cdots-\phi_p W_{t-p}+\theta_1 a_{t-1}+\cdots\cdots+\theta_q a_{t-q}$，$t=1,2,\cdots\cdots,n$

式中

$$W_t=\begin{cases}Y_t-\mu, & \text{若 } d=0\\ (1-B)^d Y_t, & \text{若 } d>0\end{cases}$$

因此，a_t 可視為 $\underset{\sim}{\phi}(\phi_1,\cdots\cdots,\phi_p)$，$\underset{\sim}{\theta}(\theta_1,\cdots\cdots,\theta_q)$ 等參數的函數，因而可寫成 $a_t(\mu,\underset{\sim}{\phi},\underset{\sim}{\theta})$，尚且可以計算其平方和 $s(\mu,\underset{\sim}{\phi},\underset{\sim}{\theta})=\sum_{t=1}^{n}a_t^2(\mu,\underset{\sim}{\phi},\underset{\sim}{\theta})$。此時，MLE 的結果就近似於在 s 極小化的條件下所求得的

$\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\mu}$等估計值。

同時，我們亦可進一步利用前述之理論關係，求出對應參數的期初值(initial values)，以作爲估計的起始點。例如，就AR(1)模型而言，$\rho_1 = \phi_1$，因此可利用 $\hat{\rho}_1$ 作爲估計 ϕ_1 的期初值，即 $\hat{\phi}_1^{(0)} = \hat{\rho}_1$。就 MA(1) 模型而言，$\rho_1 = \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$，則$\hat{\theta}_1^{(0)} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1}$，但這兩個期初值中卻只有一個符合可逆轉性的限制。

㈢診斷性檢查 (**diagnostic checking**)

爲瞭解前所設定的模型是否合適，我們可以利用估計得到的殘差值(residuals)數列之分配特性加以診斷。若以 $\hat{a}_t$ 代表由ARIMA（p，d，q）得到的殘差值，則

$$\hat{a}_t = \hat{\theta}_q^{-1}(B)\hat{\phi}_p(B)(1-B)^d y_t$$

如果原先暫設的模型正確的話，在大樣本下，$\hat{a}_t$ 的分配那當近似於「純噪音」a_t 的假設；亦即屬於 a_t 的 ACF之各項ρ_k($k=1,2,\cdots\cdots$)均等於零，因而 $\hat{a}_t$ 數列的 SACF 也應該不顯著。而 $\hat{a}_t$ 數列的樣本自我相關係數爲：

$$\hat{\rho}_{a,k} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (\hat{a}_t - \bar{\hat{a}})(\hat{a}_{t+k} - \bar{\hat{a}})}{\sum_{t=1}^{n} (\hat{a}_t - \bar{\hat{a}})^2}, \quad k=1,2,\cdots\cdots$$

對應的變異數則爲：

$$V_{ar}(\hat{\rho}_{a,k}) \simeq \frac{1}{n}$$

除了可根據上列公式作個別自我相關係數的顯著性檢定外，亦可利用下式作整體的 x^2 值顯著性檢定（自由度爲$k-p-q$）：

$$Q = n^* \sum_{k=1}^{k} \hat{\rho}^2_{a,k} \quad n^* = n-d$$

當上述 SACF 的檢定結果，顯示 $\hat{a}_t$ 的分配與「純噪音」的假設不盡符合時，即應利用 $\hat{a}_t$ 數列的 SACF 所提供的「蛛絲馬跡」情報，對原設定模型作必要的修正。例如，若原設模型爲 AR(1)，即

$$(1-\phi_1 B)y_t = a_t$$

但由 $\hat{a}_t$ 數列的 SACF 顯示 a_t 卻呈現 MA(1) 的型態，即

$$a_t = (1-\theta_1 B)a_t^*$$

此時，即應將模型修正爲 ARMA（1，1），亦即

$$(1-\phi_1 B)y_t = (1-\theta_1 B)a_t^*$$

待重新估計後，再繼續利用新的殘差數列 $\hat{a}_t^*$，檢查其 SACF 是否符合

「純噪音」的假設，如此反覆進行，一直修正到令人滿意的模型爲止。

㈣預測 (forecasting)

當一個模型經過認定、估計與診斷性檢查等反覆的修正過程終而確定滿意後，即可用之進行預測。今將 ARIMA(p , d , q) 模型寫爲:

$$\phi(B)Y_t=\theta(B)a_t$$

式中 $\phi(B)=\phi(B)(1-B)^d$; 當 $d=0$ 時爲定態數列，而 Y_t 則可視爲 $y_t(=Y_t-\mu)$。

令 $Y_{t+l}(l\geq 1)$ 代表以 t 爲預測起始點時， l 期之後的觀察值。亦即

$$Y_{t+l}=\phi_1 Y_{t+l-1}+\cdots\cdots+\phi_{p+d}Y_{t+l-p-d}-\theta_1 a_{t+l-1}-\cdots\cdots$$
$$-\theta_q a_{t+l-q}+a_{t+l}$$

進一步以 $\hat{Y}_t(l)$ 代表 Y_{t+l} 的「最佳預測值」 (best forecast)，其係

$$\hat{Y}_t(l)=\phi_l{}^* a_t+\phi^*{}_{l+1}a_{t-1}+\phi^*{}_{l+2}a_{t-2}+\cdots\cdots$$

我們知道，利用「最小均方誤」 (minimum mean square errors) 的估計方法所求得的最佳預測值，即是以 t 爲起始點之 Y_{t+l} 的期待值。亦即

$$E[Y_{t+l}-\hat{Y}_t(l)]^2=(1+\phi_1{}^2+\cdots\cdots+\phi^2{}_{l-1})\sigma_a{}^2+\sum_{j=0}^{\infty}(\phi_{l+j}-\phi^*{}_{l+j})^2\sigma_a{}^2$$

令 $\phi^*{}_{l+j}=\phi_{l+j}$, 即可得到「最小均方誤」預測值。如此，可將 Y_{t+l} 寫成下式:

$$Y_{t+l}=(a_{t+l}+\phi_1 a_{t+l-1}+\cdots\cdots+\phi_{l-1}a_{t+1})+(\phi_l a_t+\phi_{l+1}a_{t-1}+\cdots\cdots)$$
$$=e_t(l)+\hat{Y}_t(l)$$

式中，$e_t(l)$ 表示預測誤差 (error of forecast)，而

$$\hat{Y}_t(l)=\phi_l a_t+\phi_{l+1}a_{t-1}+\cdots\cdots$$
$$=E[Y_{t+l}|Y_t,Y_{t-1},\cdots\cdots]$$
$$=\underset{t}{E}[Y_{t+l}]$$

對應的 $e_t(l)$ 之變異數則爲:

$$Var[e_t(l)]=[1+\sum_{j=1}^{l-1}\phi_j{}^2]\sigma_a{}^2$$

既然以 t 爲起始點的「最小均方誤」預測值 $\hat{Y}_t(l)$ 就是等於 Y_{t+l} 的條件期待值 $\underset{t}{E}[Y_{t+l}]$，我們即可利用這個結果來計算 $\hat{Y}_t(l)$。令

$$\underset{t}{E}[Y_{t+l}]=[Y_{t+l}]$$

$$\underset{t}{E}[a_{t+l}]=[a_{t+l}]$$

則 $$\hat{Y}_t(l)=\underset{t}{E}[Y_{t+l}]=[Y_{t+l}]$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com