内 容 简 介

本书介绍数理逻辑及其在机器证明中的应用.

数理逻辑部分包括绪论、前三章及附录. 绪论简要地说明了数理逻辑的研究对象和方法. 前三章分别介绍命题逻辑、一阶逻辑以及它们的可靠性和完备性问题. 附录中阐述了重言式的推理，并且论证了它与自然推理的关系. 第四至第六章是机器证明部分，主要描述与数理逻辑有关的机器证明问题.

本书可用作计算机专业及有关专业的教材，也可供有关专业的科技人员参考.

计算机科学丛书

数理逻辑与机器证明

陆钟万 著

责任编辑 杨家福 那莉莉

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983 年 11 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1983 年 11 月第一次印刷 印张：6

印数：0001—8,650 字数：156,000

统一书号：15031·535

本社书号．3324·15—8

定价：1.15 元

目　　录

绪论 …… 1
第一章　命题逻辑 …… 7
1.1　命题连接词 …… 7
1.2　公式 …… 10
1.3　形式推理系统(上) …… 20
1.4　形式推理系统(下) …… 38
1.5　赋值 …… 52
1.6　逻辑推论 …… 58
1.7　合取范式和析取范式 …… 69
1.8　连接词的完备集 …… 74
第二章　一阶逻辑 …… 80
2.1　命题函数和量词 …… 80
2.2　公式 …… 83
2.3　形式推理系统 …… 91
2.4　赋值 …… 99
2.5　逻辑推论 …… 105
2.6　前束范式 …… 111
第三章　可靠性和完备性 …… 117
3.1　恒真性和可真性 …… 117
3.2　可靠性 …… 120
3.3　命题逻辑的完备性 …… 121
3.4　一阶逻辑的完备性 …… 124
3.5　一阶逻辑(带等词)的完备性 …… 130
3.6　形式数学系统 …… 134
第四章　机器证明 …… 138
4.1　试探法 …… 138
4.2　判定法 …… 143

4.3 计算机辅助证明 …… 144
4.4 证明算法 …… 145
第五章 Herbrand 定理 …… 147
5.1 无∃前束范式 …… 147
5.2 Herbrand 定理 …… 148
第六章 Davis-Putnam 方法和分解法则 …… 154
6.1 Davis-Putnam 方法 …… 155
6.2 统一代入 …… 158
6.3 分解法则 …… 164
附录 重言式系统 …… 178
参考书目 …… 186

绪　论

数理逻辑，又称符号逻辑，是研究推理、特别是研究数学中推理的科学.

各门科学中都有推理和论证，特别是在数学中要通过推理和证明来建立定理. 定理证明中的每一个步骤都是根据逻辑推理的规则从某些命题推出另一些命题. 从它们出发进行推理的命题称为前提，由此而推出的命题称为结论.

例如在初等代数中，我们研究二元一次方程组

1) $$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

的解，证明了由下面的前提

2) $$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

可以推出结论

3) 方程组 1) 有唯一的解.

但如果把前提 2) 改为

4) $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

那么由 4) 就不能推出 3)，而能推出结论

5) 方程组 1) 没有解.

又如果把前提改为

6) $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

则由 6) 不能推出 3)，也不能推出 5)，而能推出结论

7) 方程组 1) 有无限多的解.

上面是数学定理的例子，数学定理是由前提和结论构成的具

体的推理关系. 建立这些定理都需要推理和证明的过程，由定理中的前提推出定理中的结论. 证明包括一系列的步骤（我们不必写出这些步骤），每一步骤都是由某些命题根据逻辑推理的规则推出另一些命题. 在初等代数中，通过这些推理的过程证明了定理，研究了二元一次方程组的解，但并不是研究在推理过程中作为根据的逻辑推理的规则，或者简单地说，并不是研究推理.

再举一个例子. 在数学分析中，研究连续函数的性质时，证明了由下面的前提

8)　　函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

9)　　$f(a)$ 与 $f(b)$ 异号.

能推出结论

10)　　有 c，使得 $a < c < b$，并且 $f(c) = 0$.

但如果把 8) 中的闭区间 $[a, b]$ 改为开区间 (a, b)，那么由改变后的 8) 和 9) 就不能推出 10) 这个结论.

这又是一个数学定理的例子. 建立这个定理也需要一个推理和证明的过程. 在数学分析中，通过这个推理的过程研究了连续函数的一个性质，但也并不是研究推理.

数学中除数理逻辑之外的各个分支都有各自的研究对象，但都并不研究它们在各自的研究中所共同使用的逻辑推理规则，都并不研究推理. 因此在这些数学分支中都不考虑“什么是推理和证明”这样的问题. 推理和证明是数理逻辑研究的对象. 数理逻辑把推理和证明作为数学对象来研究，而且在研究中使用了近代数学的工具，因而使得它成为数学的一个分支.

数理逻辑在其自身的研究中也要使用推理，就象数学的其它分支在各自的研究中都要使用推理一样. 因此，数理逻辑要涉及两种推理：一种是所研究的对象，陈述这种推理时要论证它的正确性；另一种推理是研究时所使用的，使用时就象在其它数学分支中使用推理一样，不需要论证它的正确性. 关于这些，读者在读了第一章后就会清楚.

数理逻辑研究推理时，并不考虑具体的前提和结论之间的推

理关系，并不涉及前提和结论的涵义，而是研究前提和结论的逻辑形式之间的关系.

前面讲过，前提和结论都是命题，命题都是有涵义的. 此外，命题也都有逻辑形式，或者说逻辑结构. 我们考虑下面的推理关系：

11) $\begin{cases}\text{如果三角形是等腰的，则它有两个角相等；}\\ \text{这个三角形没有两个角相等，}\\ \text{它不是等腰三角形.}\end{cases}$

再考虑另一个推理关系：

12) $\begin{cases}\text{如果行列式中有两行成比例，则行列式为零；}\\ \text{这个行列式不为零，}\\ \text{它没有两行成比例.}\end{cases}$

11) 和 12) 中推理关系的涵义是不相同的. 其中的前提有不同的涵义，结论也有不同的涵义，但是它们所根据的推理规则却是相同的，它们的推理形式是相同的.

再考虑

13) $\begin{cases}\text{如果 } A\text{，则 } B\text{；}\\ \text{非 } B\text{，}\\ \text{非 } A.\end{cases}$

其中的 A 和 B 是任何命题. 因为没有说明 A 和 B 是怎样的命题，所以我们不知道 13) 中的三个命题各有怎样的涵义，但三个命题的逻辑形式都是清楚的. 第一个命题有“如果～～～，则——”的逻辑形式，另外两个命题都有“非……”的逻辑形式，而且这三个命题是互相有联系的. 这表现在第一个命题中“如果”后面的命题 A 和“则”后面的命题 B 分别是第三个命题中“非”后面的 A 和第二个命题中“非”后面的 B. 显然，任何三个命题，如果它们分别具有 13) 中的逻辑形式(不论其中的 A 和 B 是怎样的命题)，那么由前两个命题能推出后一个命题，就是说，当其中的前两个命题都是真命题时，后一个命题也必然是真命题.

11)和 12)都是 13)的例子. 在 11)和 12)中，都是由具体的前

提推出具体的结论，它们都是具体的推理关系．而 13) 中前两个逻辑形式和后一个逻辑形式所表示的，却是推理中前提和结论的逻辑形式之间的一种关系，这就是说，由具有 13) 中前两个逻辑形式的命题作为前提，能推出具有 13) 中后一个逻辑形式的命题作为结论．13)中所表示的这种前提和结论的逻辑形式之间的关系，就是 11) 和 12) 中的推理所共有的推理形式．显然，研究推理中的这种逻辑形式之间的关系是不涉及前提和结论的涵义的，因此 13)中的 A 和 B 可以是任何的命题．

13) 中所表示的前提和结论的逻辑形式之间的关系称为演绎推理关系．在演绎推理中，当前提是真命题时，结论必然是真命题，数理逻辑中的演绎逻辑就是研究演绎推理关系的．推理中前提和结论的关系并不都是演绎推理关系，也可以当前提是真命题时，结论并不必然是真命题，数理逻辑中的归纳逻辑和概率逻辑就是研究这种推理关系的．本书所陈述的数理逻辑限于演绎逻辑的范围．

为了研究推理，即研究前提和结论的逻辑形式之间的关系，就要对命题进行精确的逻辑分析，以弄清楚它们的逻辑形式．命题通常是在自然语言中陈述的，而自然语言中结构上的不确切之处使得不易弄清楚命题的逻辑形式．另外，对命题的结构进行逻辑分析还需要把命题的形式和内容分开．例如，分析 11)和 12)中命题的结构就得到 13)，而对于 13)，我们只研究其中各命题的逻辑形式，不考虑它们的内容．

由于上述原因，在数理逻辑的研究中要构造一种人工的形式语言，称为**逻辑演算**．逻辑演算中的符号就象某种欧洲语言中的字母一样．逻辑演算反映自然语言的某些特征．在逻辑演算中，由符号构成公式，公式是表示命题的，且能精确地反映命题的逻辑形式．因此，在逻辑演算中，可以通过公式的形式结构之间的关系精确地反映我们所要研究的命题的逻辑形式之间的关系．

和自然语言一样，逻辑演算也有它的语法和语义．语法涉及怎样由符号构成公式以及公式的形式结构之间的关系，它是纯形

式的，与符号和由符号构成的公式的涵义没有关系．语义涉及给符号以某种解释以及在这种解释之下公式所具有的涵义．语法和语义既有区别又有联系．

我们在研究问题时要使用语言，研究总是在某个语言中进行的，而现在所研究的对象本身就是语言，它就是逻辑演算这种形式语言．于是就有了两种语言，它们属于不同的层次：一种是逻辑演算，属于研究的对象，称为**对象语言**；另一种是研究逻辑演算时所使用的语言，称为**元语言**．数理逻辑研究推理就是通过研究逻辑演算中公式的形式结构之间的关系来进行的．

在数理逻辑中要经常使用数学归纳法．数学归纳法用于证明所有自然数都有某种性质这样的命题．例如，当证明

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

时，就要用数学归纳法．一般地，令 P 是自然数的一种性质，令 $P(n)$ 表示 n 有 P 性质，那么命题

14) 所有 $n, P(n)$.

就要用数学归纳法证明．证明分为两步：第一步证 $P(0)$（这里假设自然数从 0 开始，如果假设自然数从 1 开始，那么第一步就是证 $P(1)$），称为**基始**；第二步是在假设了 $P(n)$（n 是任何自然数）的情形下证 $P(n+1)$，称为**归纳**．称其中所假设的 $P(n)$ 为**归纳假设**．由基始和归纳，就证明了 14)．

用数学归纳法（简称归纳法）作出的证明称为**归纳证明**．对 14）这样的命题作归纳证明称为**施归纳于** n，称 n 为**归纳变元**，称 $P(n)$ 为**归纳命题**．

归纳法还有另外的形式，即在证明的第二步（归纳）中，把归纳假设 $P(n)$ 改为 $P(0), \cdots, P(n)$．于是，在假设了 $P(0), \cdots, P(n)$ 的情形下证明 $P(n+1)$，称这种形式的归纳法为**串值归纳法**，它

和原来的形式是等价的.

象 14) 这样的命题之所以能够用归纳法证明，是自然数用**归纳定义**来定义的缘故. 自然数的定义如下:

15) 0 是自然数.

16) 如果 n 是自然数,则 n 的后继 n' 是自然数.

17) 只有由 15)和 16)生成的对象是自然数.

在 15), 16), 17)中, 15) 直接生成了一个自然数,就是 0 (如果规定自然数从 1 开始,就把 15)中的 0 改为 1). 16) 给出了一个一元运算,即后继运算,使用它可以由已生成的一个自然数生成新的自然数. 仅由 16)是不能生成任何自然数的,但由 15) 和 16) 就能生成无限多的自然数. 17) 是说,除了由 15)和 16)所生成的自然数之外,再没有别的自然数.

在归纳证明中，由基始证明了 $P(0)$，又由归纳陆续证明了 $P(1), P(2), \cdots$. 由 17)，在 0，1，2，……之外没有别的自然数. 因此,由 $P(0), P(1), P(2), \cdots$就证明了"所有 n, $P(n)$".

数理逻辑中的许多对象都是用归纳定义来定义的，因此关于这种对象的命题要用数学归纳法来证明，读者在读到后面时就会清楚.

本书中我们规定用

18) $$—— =_{df} \sim\sim\sim$$

表示——为~~~的更简单的写法. 18)读作"——定义为~~~",称其中的——为被定义者,~~~为定义者. 例如,令

$$a \leqslant b =_{df} a < b \text{ 或 } a = b$$

就是说,把"$a < b$ 或 $a = b$" 简写为"$a \leqslant b$", 或者说,把"$a \leqslant b$" 定义为"$a < b$ 或 $a = b$".

我们又规定,令

$$A \Rightarrow B =_{df} \text{如果 } A\text{, 则 } B.$$

$$A \Leftrightarrow B =_{df} A \text{ 当且仅当 } B.$$

其中的 A 和 B 是任何的命题.

第一章　命题逻辑

命题逻辑是逻辑演算的基本部分，也是其中比较简单的部分。命题逻辑也称为命题演算.

命题经使用命题连接词构成复合命题. 命题逻辑研究复合命题的逻辑形式和它们之间的推理关系. 复合命题的逻辑形式是由在其中出现的命题连接词所确定的.

构成复合命题的支命题本身也可以是复合命题. 称不是复合命题的支命题为简单命题. 在命题逻辑中，简单命题被看作一个整体，我们不分析它们内部的逻辑形式.

1.1　命题连接词

命题可以是真的，也可以是假的，二者必居其一. 例如在下面的命题中：

1）　凡素数都是奇数.

2）　3 是最小的奇素数.

3）　凡大于 2 的偶数都可表成两个素数的和.

1)是假命题，2)是真命题，3)就是哥德巴赫猜想，它至今还没有被证明，还没有被确定其真假，但它也是命题.

命题的真或假称为命题的**真假值**，简称为命题的**值**. 因此，命题有两个可能的值，即真和假. 真命题的值是真，假命题的值是假. 通常以“1”表示真，以“0”表示假.

我们在绪论中讲过，本书中所要陈述的数理逻辑限于演绎逻辑的范围，演绎逻辑是研究演绎推理关系的. 演绎推理关系是前提和结论的逻辑形式之间的这样一种关系，即当前提是真命题时，结论必然也是真命题. 因此，在研究演绎推理关系时，我们要研究

具有一定逻辑形式的命题之间的真假关系，这时，我们只考虑命题的真假值，不考虑它们的涵义.

称由命题连接词连接而构成的更为复杂的命题为**复合命题**. 命题连接词简称为**连接词**. 我们考虑五个基本而常用的连接词：非(并不是)，与(并且)，或(或者)，蕴涵(如果，则)，等值(当且仅当). 它们之中除了"非"是连接一个命题的一元连接词之外，其余四个都是连接两个命题的二元连接词.

下面是使用连接词构成复合命题的例子：

4) 2是偶数并且2是素数.

5) 如果四边形的一双对边平行并且相等，则它是平行四边形.

称构成复合命题的命题为**支命题**. 支命题本身可以是复合命题，也可以不是. 例如上面4)中的两个支命题："2是偶数"和"2是素数"以及5)中的支命题："它是平行四边形"都不是复合命题. 但5)中的支命题："四边形的一双对边平行并且相等"却仍然是复合命题，它是由下面两个支命题

四边形的一双对边平行，这双对边相等.

经使用连接词"并且"构成的. 这两个支命题都不再是复合命题.

不是复合的命题称为**简单命题**.

复合命题的真假值由构成它的支命题的真假值确定. 令 A，B 是任何命题，使用五个基本的连接词，我们构成以下的复合命题：

非A(并不是A).

A与B(A并且B).

A或B(A或者B).

A蕴涵B(如果A，则B).

A等值B(A当且仅当B).

我们要说明这些复合命题的真假值怎样由支命题的真假值确定.

"非A"的值与A的值相反：A真时"非A"假，A假时"非A"真. 这是清楚的.

"A 与 B"只有当 A 和 B 都真时才是真的，当 A 和 B 中有一个是假时，"A 与 B"就是假的．这也是符合通常对"与"的理解的．

"A 或 B"，当 A 和 B 都假时，它的值是假的，当 A 和 B 一真一假时，它的值是真的．当 A 和 B 都真时，"A 或 B"的值要根据对于"或"采用相容的还是不相容的涵义来确定．若采用相容的涵义，则"A 或 B"的意思是"A 真或 B 真或两者都真"，因而"A 或 B"是真的．若采用不相容的涵义，则"A 或 B"的意思是"A 真或 B 真但不是两者都真"，因而"A 或 B"是假的．

在数学中，"或"是按照相容的涵义被使用的．例如，由 $ab=0$ 可得

$$a=0 \text{ 或 } b=0$$

这是说"$a=0$ 或 $b=0$ 或两者都真"．在数理逻辑中，对于"或"也采用相容的涵义．

"A 蕴涵 B"(即"如果 A，则 B")的真假值确定如下：首先，当 A 和 B 都真时，"A 蕴涵 B"是真的，这是没有问题的．其次，当 A 真而 B 假时，"A 蕴涵 B"是假的，因为"A 蕴涵 B"是说"如果 A 真，则 B 真"，也就是说，不能 A 真而 B 假．然后，当 A 假时，不论 B 是真还是假，"A 蕴涵 B"都是真的，对此需要作比较多的说明．

人们可能会认为，当 A 假时，"A 蕴涵 B"是没有意义的，因而没必要考虑其真假值的问题．然而我们要研究的主要是数学中的推理，在数学中"A 蕴涵 B"的意思是由 A 真能得到 B 真，即不能 A 真而 B 假．当 A 假时，不论 B 是真还是假，都不会发生 A 真而 B 假的情况，这样，"A 蕴涵 B"就不会是假的．所以当 A 假时，"A 蕴涵 B"总是真的．

下面这个数学命题能帮助说明这一点：

6) 如果 $n>3$，则 $n^2>9$．

这是一个真命题，不论其中的 n 是什么整数．令 A，B 分别为"$n>3$"和"$n^2>9$"，那么当 $n=4$ 时就得到 A 和 B 都真，当 $n=-4$ 时就得到 A 假 B 真，当 $n=2$ 时就得到 A 和 B 都假．可见在这三种情形下，"A 蕴涵 B"都是真的．

只有当 A 真 B 假时，"A 蕴涵 B"才是假的. 事实上没有整数 n 使得"$n>3$"真而"$n^2>9$"假，因为 6)是真命题.

我们再考虑集论中的一个命题作为例子：空集 $\varnothing$ 是任何集 S 的子集，这就是说，

7) 如果 $\alpha\in\varnothing$，则 $\alpha\in S$.

其中的 α 是任何一个元素. 因为 $\varnothing$ 中没有元素，故 $\alpha\in\varnothing$ 总是假的. 所以不论 $\alpha\in S$ 的真假值如何，7) 总是真命题.

最后，"A 等值 B"，当 A 和 B 都真或都假时，是真命题，否则(即当 A 和 B 一真一假时)"A 等值 B"是假命题. 这也是符合通常对于"等值"(即"当且仅当")的理解和使用的.

1.2 公　式

本节中我们要构造命题逻辑的形式系统.

绪论中讲过，逻辑演算是一种形式语言，它反映自然语言的某些特征. 作为一种语言，逻辑演算也有它的语法和语义，我们先讲它的语法.

在构造逻辑演算时，首先要列出它的符号，由符号构成表达式，然后在其中确定一类特殊的表达式，即公式. 逻辑演算中的符号以及由之构成的公式等，都是我们的研究对象. 逻辑演算中的符号也称为**形式符号**，以区别于不是研究对象的符号. 不是研究对象的符号包括进行研究时所使用的元语言(本书中使用的是汉语)中的符号，例如文字和标点符号以及代替文字的符号，如⇒，⇔和=等，它们都不是研究的对象. 在不至于引起误会时，"形式符号"中的"形式"二字可以省略.

命题逻辑中的形式符号分为三类. 第一类包括一个无限序列的形式符号，称为**命题词**. 本书中，词就是符号，故命题词就是命题符号. 我们以英文正体小写字母(可以加下标或其它记号)

$$\mathrm{p}\quad \mathrm{q}\quad \mathrm{r}\quad \mathrm{p}_i\quad \mathrm{q}_i\quad \mathrm{r}_i\qquad (i=1,2,3,\cdots)$$

表示任何命题词. 第二类形式符号包括五个基本的**命题连接词**，

简称为**连接词**:

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$$

它们依次被称为**否定词**,**合取词**,**析取词**,**蕴涵词**,**等值词**. 命题连接词是一种逻辑词，即带有逻辑性质的符号. 第三类形式符号是两个技术性符号:

$$[\quad]$$

它们依次被称为**左括号**和**右括号**. 在生成公式时要使用技术性符号.

由形式符号构成**表达式**，表达式是有限的形式符号串. 例如 p, qr, $[p]$, $p \rightarrow q \rightarrow r$, $\neg[p \wedge q]$ 等都是表达式.

我们规定以英文正体大写字母(可以加下标或其它记号):

$$\mathrm{U} \quad \mathrm{V} \quad \mathrm{W} \quad \mathrm{U}_i \quad \mathrm{V}_i \quad \mathrm{W}_i \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

表示任何表达式.

表达式中符号出现的数目称为表达式的**长度**. 例如上面的五个表达式, p 的长度是 1, qr 的长度是 2, $[p]$ 的长度是 3, $p \rightarrow q \rightarrow r$ 的长度是 5, $\neg[p \wedge q]$ 的长度是 6.

表达式中有一个特殊的表达式，它的长度是零，称为**空表达式**. 空表达式是写不出来的，因为它没有符号. 表达式中有空表达式,正象集合中有空集合一样.

称 U 和 V 为**等同的**,记作 $\mathrm{U} = \mathrm{V}$, 如果它们的长度相同,并且依次有相同的符号.

U 和 V 并列起来,仍然是表达式,记作 UV. 任何表达式 U 和空表达式并列,结果仍然是 U, 就是说,如果 V 是空表达式,那么

$$\mathrm{UV} = \mathrm{VU} = \mathrm{U}$$

称 U 为 V 的**部分**,如果有 W_1 和 W_2, 使得 $\mathrm{V} = \mathrm{W}_1\mathrm{U}\mathrm{W}_2$($\mathrm{W}_1$ 和 W_2 可以是空表达式).

表达式一般是没有涵义的. 我们要从表达式中定义公式. 公式是有涵义的，它是通过形成规则定义的. 命题逻辑有以下三条**形成规则**:

(i) 单独一个命题词是公式(**原子公式**).

(ii) 如果U是公式，则$\neg U$是公式.

(iii) 如果U和V是公式，则$[U\wedge V]$，$[U\vee V]$，$[U\rightarrow V]$，$[U\leftrightarrow V]$是公式.

使用形成规则，可以逐步地生成公式.

【例 1】 表达式

$$[[\neg p\rightarrow[\neg[p\wedge\neg q]\vee r]]\leftrightarrow q]$$

是公式，它可以使用形成规则经以下步骤而生成：

(1)	p	(i)
(2)	q	(i)
(3)	$\neg q$	(2) (ii)
(4)	$[p\wedge\neg q]$	(1) (3) (iii)
(5)	$\neg[p\wedge\neg q]$	(4) (ii)
(6)	r	(i)
(7)	$[\neg[p\wedge\neg q]\vee r]$	(5) (6) (iii)
(8)	$\neg p$	(1) (ii)
(9)	$[\neg p\rightarrow[\neg[p\wedge\neg q]\vee r]]$	(8)(7) (iii)
(10)	$[[\neg p\rightarrow[\neg[p\wedge\neg q]\vee r]]\leftrightarrow q]$	(9)(2) (iii)

其中的(1)—(10)都是公式.

形成规则说明由之生成的表达式都是公式，但并没说明怎样的表达式不是公式，因此，形成规则并没有定义公式这一概念.

定义 1.2.1（公式） 命题逻辑中的一个表达式是**公式**，当且仅当它能由命题逻辑中的形成规则生成.

这个定义也可以陈述如下：

(i) 单独一个命题词是公式(原子公式).

(ii) 如果U是公式，则$\neg U$是公式.

(iii) 如果U和V是公式，则$[U\wedge V]$，$[U\vee V]$，$[U\rightarrow V]$，$[U\leftrightarrow V]$是公式.

(iv) 只有由(i)，(ii)，(iii)生成的表达式是公式.

也称公式为**合式公式**.

我们以英文正体大写字母(可以加下标或其它记号)：

$$A \quad B \quad C \quad A_i \quad B_i \quad C_i \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

表示任何公式.

由于 A 和 B 都是任何公式(A 和 B 是怎样的公式,没有具体写出),所以它们可以是同一个公式(即 $A = B$),也可以不是(即 $A \neq B$).同样,U 和 V 可以是 $U = V$,也可以是 $U \neq V$;p 和 q 可以是 $p = q$ 或者是 $p \neq q$.但是,在同一个上下文中,A 的各次出现必定是代表同一个公式,U 的各次出现必定是代表同一个表达式,p 的各次出现必定代表同一个命题词.这类事情以后不再一一说明.

命题词、连接词以及由之生成的公式都是有涵义的.简单地说,命题词是表示命题的形式符号;在连接词中,$\neg$表示"并不是",$\wedge$表示"并且",$\vee$表示"或者",$\rightarrow$表示"如果,则",$\leftrightarrow$表示"当且仅当";于是,公式就表示命题.这方面的内容属于形式语言的语义范围,将在 1.5 节中严格说明.现在,形式符号和公式被看作没有涵义的形式对象.

称公式为原子公式,如果其中不出现逻辑词.在命题逻辑中,逻辑词就是连接词,所以命题逻辑中的原子公式就是其中不出现连接词的公式,它就是一个单独的命题词.

公式的定义是一个归纳定义.在这个定义中,先说明怎样直接生成一类公式,即原子公式(见定义中的形成规则(i)),然后使用五个连接词,由已有的公式生成新的公式(见形成规则(ii)和(iii)),最后说明只有这样生成的对象才是公式.

根据公式的归纳定义,我们可以用数学归纳法来证明涉及所有公式的命题.当用数学归纳法证明所有公式都有某一性质时,基始部分要证明所有原子公式都有这一性质;归纳部分要在任何 B 有这一性质的归纳假设之下,证明 $\neg B$ 有这一性质;在任何 B 和 C 都有这一性质的归纳假设之下,证明 $[B \wedge C]$,$[B \vee C]$,$[B \rightarrow C]$,$[B \leftrightarrow C]$ 都有这一性质.根据公式的定义 1.2.1,任何公式 A 都是经过有限次的使用形成规则逐步生成的.因为,证明了上述基始和归纳两个部分之后,经使用形成规则生成的公式就都有所要证

明的这一性质，所以A就具有这一性质了. 称这样的归纳证明为施归纳于公式的结构.

用数学归纳法证明所有公式都有某一性质，也可以施归纳于公式中连接词出现的数目 n. 对于这种情形，基始部分要针对 $n=0$ 给以证明. $n=0$ 就是说公式中不出现连接词，即公式是原子公式，故这时的基始部分也要证明原子公式都有这一性质. 这种情形下的归纳部分所要证明的内容和前面所说施归纳于公式的结构中的归纳部分也是相同的. 这一点不难验证，我们不再详述.

公式有一些重要的结构方面的性质，其中有些在后面要用到，我们来陈述这些性质并举例说明.

定理 1.2.1 任何A或者是原子公式，或者具有 $\neg p$，$[p\wedge q]$，$[p\vee q]$，$[p\rightarrow q]$，$[p\leftrightarrow q]$ 五种形式之一的部分.

这个定理显然是成立的. 因为，在生成A的过程中，若没有用到形成规则中的(ii)或(iii)，那么A是原子公式，否则，若首先使用的是(ii)，那么A就有具有 $\neg p$ 形式的部分，若首先使用的是(iii)中的 $\wedge$，那么A就有具有 $[p\wedge q]$ 形式的部分，等等.

定理 1.2.2 任何A具有以下六种形式之一：原子公式，$\neg B$，$[B\wedge C]$，$[B\vee C]$，$[B\rightarrow C]$，$[B\leftrightarrow C]$，并且在各种情形下，A的形式都是唯一的.

原子公式的这种形式当然是唯一的. $\neg B$ 这种形式的唯一性是说 $\neg B$ 只能由B使用形成规则(ii)而生成. $[B\wedge C]$ 这种形式的唯一性是说它只能由使用 $\wedge$ 连接B和C而生成，等等.

【例2】 设 $A=[[p\vee q]\rightarrow[p\rightarrow[\neg q\leftrightarrow r]]]$，那么A有 $[B\rightarrow C]$ 的形式：

$$A=[\underbrace{[p\vee q]}_{B}\rightarrow\underbrace{[p\rightarrow[\neg q\leftrightarrow r]]}_{C}]$$

而且A只能具有这种形式，即A不能在最后使用A中另外的连接词而生成. 例如令