Advanced Time
Series Econometrics

高级时间序列经济计量学

〔英〕陆懋祖 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

Advanced Time Series Econometrics

高级时间序列经济计量学

〔英〕陆懋祖 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高级时间序列经济计量学/(英)陆懋祖著. —北京:北京大学出版社,2015.10
ISBN 978-7-301-24300-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陆… Ⅲ. ①时间序列分析—计量经济学—教材 Ⅳ. ①F224.0
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 226897 号

书　　名	高级时间序列经济计量学 Gaoji Shijian Xulie Jingji Jiliangxue
著作责任者	〔英〕陆懋祖　著
责任编辑	刘誉阳
标准书号	ISBN 978-7-301-24300-8
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn
电子信箱	em@pup.cn　　QQ:552063295
新浪微博	@北京大学出版社　@北京大学出版社经管图书
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752926
印 刷 者	三河市北燕印装有限公司
经 销 者	新华书店
	730 毫米×1020 毫米　16 开本　18.75 印张　347 千字 2015 年 10 月第 1 版　2015 年 10 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
定　　价	48.00 元

再版前言

自 1998 年本书出版以来，在非稳定的时间序列领域中又出现了许多重要的研究成果，故借本书由北京大学出版社再版之际尽力添加了些内容，但还是保持了原书的结构，不至于篇幅过大。

在过去的十几年中，经济计量学在各个领域内都取得了重要的进展。这不仅使得经济计量学本身成为一门日趋重要的学科，也使得它在现代经济学和现代金融学中起到越来越重要的作用。如今很多研究经济学或经济计量学的人往往称自己为宏观经济计量学家、微观经济计量学家等，可见经济计量学与现代经济学已不可分割。

本书旨在介绍过去几十年中经济计量学在时间序列领域的一些重要发展，重点介绍非稳定的单位根过程、协整过程和协整系统，变异性和随机变异性模型的一些主要理论。这些理论在 20 世纪 80 年代初兴起后，在很大程度上改变了传统的时间序列经济计量学的理论和方法。稳定的时间学列不再是经济计量学研究的唯一对象，非稳定的时间序列也不再是不可涉足的领域，特别是其中的 $I(1)$ 和 $I(2)$ 过程与协整过程已成为研究的主要对象，它们已在经济学和金融学中得到了广泛的应用。经济计量学的这些发展也得益于数学方法上的改进，基于维纳过程的泛函中心极限定理成为研究非稳定时间序列的主要数学工具，这使得我们能在更为广泛的条件下研究时间序列的统计量的极限分布。

当然，要在一本书中全面介绍这些内容是有很大困难的。尽管这些理论和方法只有十几年的发展历史，它们已包含了如此丰富的内容，以至于在一本书中对这些理论作详细介绍是不可能的。不仅如此，这些浩瀚的文献中存在着不同的体系和观点，它们对整个学科的发展起着相辅相成的作用，但却很难在一本书中全面反映。

本书以介绍单位根过程、协整过程、ARCH 模型和随机变异性模型的基础的数学结构作为主要目的，旨在帮助经济系或统计系的本科高年级学生、研究生及科研人员掌握现代化的经济计量学工具，使他们在理论基础上受到一定的训练，以便今后在此领域中作出自己的贡献。这也是本书自称为“高级”的原因，以强调理论推导的严格性。书中对主要定理都作了较为详细的数学证明，希望对研究生和研究人员有帮助，作者一直认为理解这些证明对进一步掌握理论是有益的。当然，初学者可将这些证明留到以后必要时或更久的将来再读。

本书的第一章至第三章介绍了单位根过程的结构和主要特征，以及对单位根过程的参数估计和假设检验；第四章至第六章介绍了协整过程和协整系统的结构、主要特征与表示形式，以及参数估计和假设检验的方法，重点介绍了约翰逊的系统方法，并以一个例子详细说明了约翰逊建模方法；第七章介绍 ARCH 模型和它的几种重要的衍生和推广，以及随机变异性模型的理论和应用，以及它们在金融学中的应用。我们特别介绍了“间接推理估计方法(IIE)”以及它在随机变异性模型估计中的应用。

本书在写作过程中得到了易纲教授和秦朵教授的鼓励和支持，在此谨表示感谢；本书第一版出版后，许多读者来信指出了书中的错误和缺点及改进的建议，在此作者特别感谢南开大学张晓桐教授、南京财经大学徐承明教授和上海社科院朱平芳教授。

最后，我在此恭谦地引用已故的格兰杰爵士（Sir Clive Granger）为我的另一本书——《预测经济时间序列》作的序言中的一段话：“预测的形成过程过去是，现在和将来仍将是令人振奋的科研领域，它将不断地产生新的技术和方法，并应用于新领域中新的时间序列。这本书为研究者和学生提供了这样的机会，使他们能带着信心进入这一充满希望的领域，并得到理性上的享受。”本书介绍了格兰杰爵士首创的、获诺贝尔经济学奖的协整理论，没有涉及预测，但也希望读者能带着信心进入这一充满希望的领域，并在其中得到理性上的享受。

陆懋祖

2015 年 6 月于英国南安普敦

目录

第一章　单位根过程

1.1　简介

现代时间序列经济计量学的一个重要研究课题，是探索经济时间序列的动态结构，研究它们的统计性质，理解产生这些经济数据的数据生成过程（data generating process）的特点和性质，从而更有效地利用经济数据构造和建立经济计量模型，用作经济预测，检验各种经济理论的可靠性和可行性，并为各级政府和企业的经济决策提供数量化的建议。

传统的时间序列经济计量学在进行这些研究时，通常假设经济数据产生的随机过程是稳定的过程（stationary process），在此基础上对经济计量模型中的参数作估计和假设检验。稳定过程是数理统计和随机过程理论中最常研究的一种过程，已有很成熟的研究结果。图 1.1 和图 1.2 给出了两个稳定过程的图像，这两个过程的一个共同特点是都有一固定的均值，且在每一时刻对均值的偏离基本相同。下面给出稳定过程的定义。

定义 1.1　单变量的稳定过程

随机过程$\{x_t,\ t=1,\ 2,\cdots\}$，其中 x_t 为一随机变量，是矩稳定过程（moment stationary process），简称稳定过程，若

（a）在每一时刻 t，$t=1,2,\cdots$，x_t 的期望值和方差为常数，$E(x_t)=\mu$，$\mathrm{var}(x_t)=\sigma^2$；

（b）$x_t(t=1,2,\cdots)$的协方差 $\mathrm{cov}(x_t,x_j)$只与随机变量 x_t 和 x_j 在过程中的间隔 $t-j$ 有关，而与它们的具体位置无关，即

$$\mathrm{cov}(x_t,x_{t-s}) = E\{(x_t-\mu)(x_{t-s}-\mu)\} = \mu_s < \infty \tag{1.1}$$

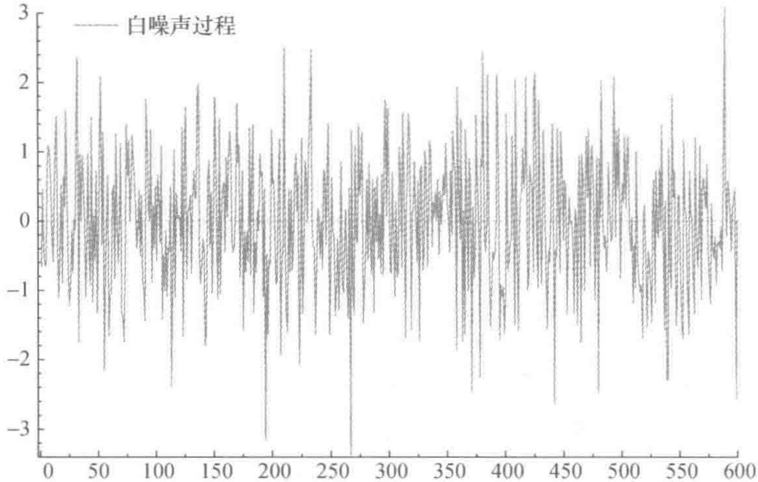

图 1.1　白噪声过程

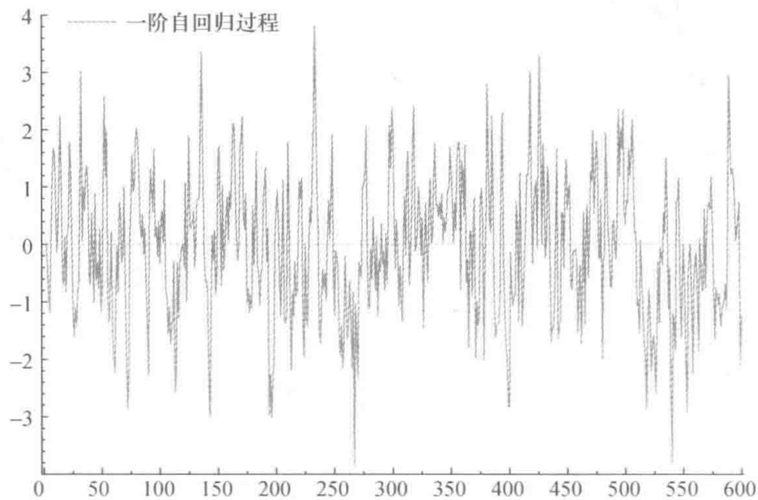

图 1.2　一阶自回归过程 ($\rho=0.5$)

以图 1.2 中的一阶自回归过程 $y_t=0.5y_{t-1}+\varepsilon_t$ 为例，这里 $\{\varepsilon_t\}$ 为独立同分布，且 $E(\varepsilon_t)=0$，$\mathrm{var}(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t^2)=\sigma^2$。由于：

$$y_t=0.5y_{t-1}+\varepsilon_t=\sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^j\varepsilon_{t-j},$$

因此，

$$E(y_t)=\sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^jE(\varepsilon_{t-j})=0,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(y_t, y_{t-s}) &= E\left\{\left[\sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^j \varepsilon_{t-j}\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty}(0.5)^j \varepsilon_{t-j-s}\right]\right\}\\ &= (0.5)^s\sigma^2\{1+(0.5)^2+(0.5)^4+\cdots\}\\ &= (0.5)^s\frac{\sigma^2}{1-(0.5)^2}.\end{aligned}$$

它们显然都和时间 t 无关，因此 $y_t=0.5y_{t-1}+\varepsilon_t$ 为稳定的随机过程。

由于稳定的时间序列过程有固定的一阶和二阶矩，过程中的未知参数常可用最小二乘法或最大似然方法估计得到，在一定的条件下这些估计量的极限分布可由中心极限定理得到。比如，一阶自回归过程

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1,2,\cdots,T,$$

若 $\{\varepsilon_t\}$ 为独立同分布，$E(\varepsilon_t)=0$，$\operatorname{var}(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t^2)=\sigma^2$，$|\rho|<1$，那么 $\{y_t\}$ 为稳定过程，它的参数 ρ 可以由最小二乘法(OLS) 估计得到：

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2},$$

这里的 T 为样本量。当 $T\to\infty$ 时，最小二乘估计量 $\hat{\rho}$ 是未知参数 ρ 的一致估计(consistent estimation)，根据中心极限定理，$\sqrt{T}(\hat{\rho}-\rho)$ 有正态的极限分布。

再如，简单的两变量回归模型

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t,$$

如果变量 $\{x_t\}$ 为稳定过程，$\{\varepsilon_t\}$ 为独立同分布，且有 $E(\varepsilon_t)=0$，$\operatorname{var}(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t^2)=\sigma^2$，$x_t$ 和 ε_t 不相关，即 $\operatorname{cov}(x_t,\varepsilon_t)=0$，那么 $\{y_t\}$ 也是稳定过程，参数 α，β 和 σ^2 的估计量可由最小二乘法得到，而且都是一致估计量。

但是，许多经济指标的时间序列并不具有稳定过程的特征。如图 1.3 中所示的英国 M1 货币年度供应量的时间序列，显然不具有固定的期望值，因此不是稳定的时间序列。

对于由非稳定随机过程 (non-stationary stochastic process) 生成的时间序列数据，传统的数理统计和经济计量方法显得无能为力。特别地，这时传统的中心极限定理不再适用。值得注意的是，如对图 1.3 中的时间序列取一阶差分，

$$\Delta \ln M_t = \ln M_t - \ln M_{t-1},$$

其图像(见图 1.4) 呈现出稳定过程的特征。

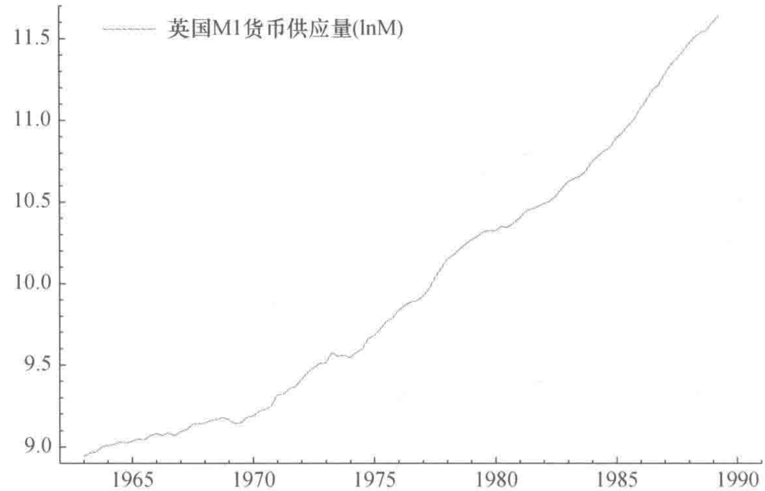

图 1.3　英国 M1 货币年度供应量($\ln M_t$)

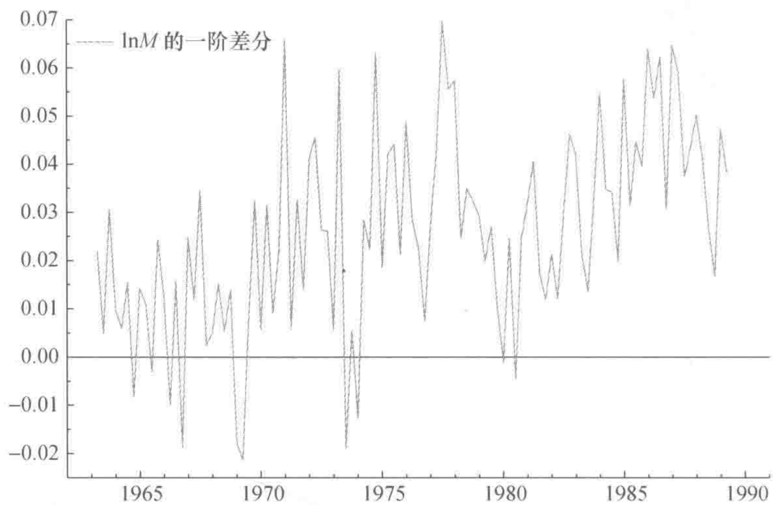

图 1.4　$\Delta\ln M$ 的一阶差分

若随机过程$\{x_t\}$的一阶差分$\{\Delta x_t = x_t - x_{t-1}\}$为稳定过程，则称$\{x_t\}$为一个单位根过程(unit root process)。特别地，若$\{\varepsilon_t\}$为独立同分布，且 $E(\varepsilon_t)=0$，$\mathrm{var}(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t^2)=\sigma^2$，我们可以由$\{\varepsilon_t\}$构造一个随机游动过程(random walk process)：$x_t = x_{t-1}+\varepsilon_t$。显然，随机游动过程是单位根过程的一个特例（见图 1.5)。

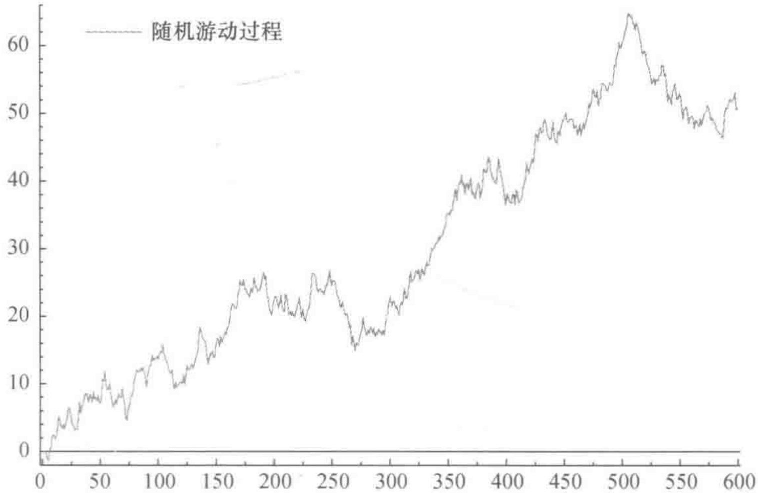

图 1.5　随机游动过程

单位根过程是最常见的非稳定过程之一。由于它在现代金融学和宏观经济学的理论和实践中应用广泛，对单位根过程的研究成为当今经济计量学的主要课题之一，特别是自 20 世纪 80 年代以来，出现了许多理论和实践上的重大突破，使得研究人员可以有效地处理以前不能处理的数据。金融市场中的股票价格是最常见的单位根过程：设 S_t 为某一股票在时刻 t 的价格，根据金融学中有效市场的假设(efficient market hypothesis)，在时刻 $t+1$ 的股价 S_{t+1} 可由单位根过程描述：

$$S_{t+1} = \rho S_t + u_{t+1}. \tag{1.2}$$

这里，$\rho=1$，$\{u_t\}$为独立同分布，且 $E(u_t)=0$，$\mathrm{var}(u_t)=\sigma^2<\infty$。如果将式(1.2)看作一阶自回归过程 AR(1) 的一个特例，参数 ρ 和 σ^2 可由最小二乘法估计得到，有非标准的分布。将式(1.2)不断向后迭代，并令 $\rho=1$，则有：

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t + u_{t+1} \\ &= S_{t-1} + u_t + u_{t+1} \\ &= u_1 + u_2 + \cdots + u_t + u_{t+1}, \end{aligned}$$

因此，$\mathrm{var}(S_{t+1}) = \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{t+1} u_i\right) = (t+1)\sigma^2$。当 $t\to\infty$时，S_t 的方差趋于无穷大，传统的中心极限定理在此是适用的。

在两变量回归模型 $y_t=\alpha+\beta x_t+\varepsilon_t$中，若$\{x_t\}$是单位根过程，未知参数 α 和 β 的最小二乘估计量有非标准的极限分布，因为这时传统的中心极限定理已不适用。一个折中的方法是先对 x_t 和 y_t 取一阶差分：

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1}, \quad \Delta y_t = y_t - y_{t-1},$$

由于$\{x_t\}$和$\{y_t\}$都为单位根过程，因此$\{\Delta x_t\}$和$\{\Delta y_t\}$都为稳定过程，对它们可以应用中心极限定理。然后，用Δy_t和Δx_t构造新的回归模型：

$$\Delta y_t = a + b\Delta x_t + v_t,$$

其中的未知参数a和b的最小二乘估计是一致的估计量，并有正态的极限分布。虽然这种差分方法在统计上是有效的，克服了用单位根数据作参数估计的困难，但由于层面数据y_t和x_t往往具有重要的经济意义，以一阶差分Δy_t和Δx_t建立的模型不能对层面变量之间关系作充分的描述，因此不能满足检验经济理论、进行经济预测的要求。

本章的以下几节将介绍有关单位根过程的一些基本概念和运算方法，着重讨论适合于单位根过程的中心极限定理，由此建立最小二乘估计的极限分布。

1.2 单位根过程的定义

我们首先定义随机游动过程。

定义 1.2 随机游动过程

随机过程$\{y_t, t=1,2,\cdots\}$为随机游动过程，若

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1,2,\cdots,$$

其中，$\{\varepsilon_t\}$为独立同分布，且$E(\varepsilon_t) = 0$，$\operatorname{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 < \infty$。

随机游动是一非稳定过程，因为尽管y_t有固定的期望值：

$$E(y_t) = E(y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t) = y_0.$$

但其方差却是时间的函数：

$$\operatorname{var}(y_t) = E(y_t - y_0)^2 = E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t)^2 = t\sigma^2,$$

而且随时间t发散到无穷大。

较随机游动更为一般的，是单位根过程。

定义 1.3 单位根过程

随机过程$\{y_t, t=1,2,\cdots\}$为单位根过程，若

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t, \quad t = 1,2,\cdots, \tag{1.3}$$

其中，$\rho=1$，$\{u_t\}$为稳定过程，且$E(u_t)=0$，$\operatorname{cov}(u_t, u_{t-s})=\mu_s<\infty$，这里$s=0,1,2,\cdots$。

显然，随机游动过程是单位根过程的一个特例。单位根过程中的随机干扰项u_t只需服从一般的稳定过程。$\{\varepsilon_t\}$和$\{u_t\}$这种假设上的差异使它们在现代经济学

和金融学上有不同的应用。当然从统计学的角度，单位根过程在技术处理上更为复杂。

将式(1.3)改写成以下形式：

$$(1-\rho L)y_t = u_t,\quad t=1,2,\cdots,$$

其中，L 为滞后算子，使得 $Ly_t=y_{t-1}$。$(1-\rho L)$称为滞后多项式，它的特征方程为

$$1-\rho z=0, \tag{1.4}$$

有根 ρ^{-1}。当 $\rho=1$，方程(1.4)有一个单位根，这就是称呼“单位根过程”的来历。分别以 $I(1)$和 $I(0)$表示单位根过程和稳定过程，可将 y_t 和 Δy_t 记为：

$$y_t \sim I(1),\quad \Delta y_t \sim I(0).$$

虽然随机游动和单位根过程在定义上有所不同，为叙述上的简便，在不引起混淆的情况下，以下统称单位根过程。

为进一步理解单位根过程和稳定过程之间的本质区别，考虑以下一阶自回归过程

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t,\quad t=1,2,\cdots, \tag{1.5}$$

若这时$\{\varepsilon_t\}$为独立同分布，并且有 $E(\varepsilon_t)=0$，$\mathrm{var}(\varepsilon_t)=\sigma^2$，利用样本 $y_1,\cdots,y_T$ 构造 ρ 的最小二乘估计量：

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2} \tag{1.6}$$

将式(1.5)代入式(1.6)，可得

$$\hat{\rho} = \rho + \frac{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2} \tag{1.7}$$

当$|\rho|<1$，$\{y_t\}$为稳定过程。由于$\{\varepsilon_t\}$为独立同分布，滞后变量 y_{t-1} 与 ε_t 不相关，即 $\mathrm{cov}(y_{t-1},\varepsilon_t)=0$。根据大数定律，当 $T\to\infty$，$\hat{\rho}_T$ 以概率收敛于真实参数 ρ，因此最小二乘估计是一致的估计。再根据中心极限定理，统计量$\sqrt{T}(\hat{\rho}_T-\rho)$有正态的极限分布：

$$\sqrt{T}(\hat{\rho}_T-\rho) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2(1-\rho^2)). \tag{1.8}$$

这里，“$\xrightarrow{d}$”表示以分布收敛。从式(1.8)不难看出，当$\{y_t\}$是稳定过程，$|\rho|<1$时，方差 $\sigma^2(1-\rho^2)$为一个大于零的正数，$\sqrt{T}(\hat{\rho}_T-\rho)$的极限分布有明确定义。当

$\rho \to 1$ 时，$\{y_t\}$趋于一个单位根过程，这时 $\sigma^2(1-\rho^2)$相应地趋于零，$\sqrt{T}(\hat{\rho}_T-\rho)$趋于一退化的极限分布。这说明，最小二乘估计$\sqrt{T}(\hat{\rho}_T-\rho)$的极限分布在 $\rho=1$ 这点发生了质的变化，传统的稳定过程理论和中心极限定理这时已无能为力，需要有新的理论和工具。

研究单位根过程的有力工具是维纳过程 (Wiener process)和泛函中心极限定理 (functional central limit theorem)。正是在这一理论基础上，过去几十年中在单位根过程的研究中出现了许多重要的成果，使得我们能理解$\sqrt{T}(\hat{\rho}_T-\rho)$在 $\rho=1$ 时的极限分布。

1.3 维纳过程

维纳过程也称为布朗运动(Brownian motion)，在现代随机过程理论中起了重要的作用。

定义 1.4 标准维纳过程

标准维纳过程$\{W(t), t\in[0,1]\}$是定义在闭区间$[0,1]$上的连续变化的单变量的随机过程，满足以下条件：

(a) $W(0)=0$；

(b) 对闭区间$[0,1]$上任何一组有限分割 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k\leqslant 1$，相应的 $W(t_j)$，$j=1,2,\cdots,k$ 的变化量

$$[W(t_2)-W(t_1)], \quad \cdots, \quad [W(t_k)-W(t_{k-1})],$$

为相互独立的随机变量；

(c) 对任何 $0\leqslant s<t\leqslant 1$，有

$$W(t)-W(s) \sim N(0, t-s). \tag{1.9}$$

标准维纳过程可看作闭区间$[0,1]$上连续变化的随机游动。事实上，若令 $s=t-\Delta t\geqslant 0$，根据式(1.9)，对任何 $t\in[0,1]$，有

$$W(t)-W(t-\Delta t) = \eta_t \sim N(0, \Delta t),$$

也即

$$W(t) = W(t-\Delta t) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \Delta t). \tag{1.10}$$

显然，式(1.10)可看作间隔为 Δt 的随机游动。

由标准维纳过程 $W(t)$，可定义一般维纳过程。令

$$B(t) = \sigma W(t)$$

其中 $\sigma>0$，$B(t)$称为方差为 σ^2 的维纳过程。显然，对任何 $0\leqslant s<t\leqslant 1$，有

$$B(t)-B(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s)),\tag{1.11}$$

特别地，若令 $s=0,t=1$，则有

$$B(1)\sim N(0,\sigma^2)$$

维纳过程 $B(t)$ 和标准维纳过程 $W(t)$ 是对正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 与标准正态分布的推广，它们具有连续函数和正态分布的良好性质，许多有关单位根过程的极限分布可表示成维纳过程的泛函。比如，可以定义：

$$V(t)=(B(t))^2.$$

根据维纳过程 $B(t)$ 的性质，在任何一时刻 t，$V(t)$ 有分布

$$V(t)\sim\sigma^2 t\chi^2(1).$$

这里，$\chi^2(1)$ 是自由度为 1 的 χ^2 分布。给定 $\chi^2(1)$，$V(t)$ 是 t 的连续函数。这一性质当然也适用于标准维纳过程 $W(t)$：在任一给定时刻，它是一个随机变量，同时它的轨线(path)是时间 t 的函数。标准维纳过程 $W(t)$ 的轨线对 t 的连续性是一个重要的特征。为了说明这一特性，给定任何 $t_1,t_2\in[0,1]$，$t_2>t_1$，我们可以定义 $W(t_1)$ 和 $W(t_2)$ 之间的距离：

$$d(t_1,t_2)=\sqrt{E\,(W(t_2)-W(t_1))^2}.\tag{1.12}$$

因为在任何一时刻 t，$W(t)$ 是一随机变量，所以这一度量基于 $(W(t_2)-W(t_1))^2$ 的期望值，与一般的距离函数不同。

定理 1.1　标准维纳过程 $W(t)$ 的轨线在闭区间 $[0,1]$ 上对于 t 处处连续。

证明　对于任何 $t_0\in[0,1]$，取 $\Delta t>0$，使得 $t_0,t_0+\Delta t\in[0,1]$，维纳过程 $W(t)$ 在 $t_0+\Delta t$ 和 t_0 之间的距离为

$$d(t_0,t_0+\Delta t)=\sqrt{E\,(W(t_0+\Delta t)-W(t_0))^2}.$$

若当 $\Delta t\to 0$ 时，$d(t_0,t_0+\Delta t)$ 也趋于零，则称 $W(t)$ 的轨线在 $t=t_0$ 处连续。由 $W(t)$ 的定义可知，

$$W(t_0+\Delta t)-W(t_0)\sim N(0,\Delta t).$$

因此，

$$E\,(W(t_0+\Delta t)-W(t_0))^2=\mathrm{var}(W(t_0+\Delta t)-W(t_0))=\Delta t$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，显然有

$$\begin{aligned}d(t_0,t_0+\Delta t)&=\sqrt{E\,(W(t_0+\Delta t)-W(t_0))^2}\\&=\sqrt{\Delta t}\to 0.\end{aligned}$$

由此，定理得证。

在闭区间 $[0,1]$ 上的连续性是标准维纳过程 $W(t)$ 最重要的性质之一，在有关