优化设计方法在工程机械中的应用

章成器　编著

同济大学出版社

(沪)新登字204号

内 容 提 要

本书从工程实用出发，阐述常用优化设计方法原理及其应用。所选优化设计实例均为工程机械在机构、结构、液压、气动诸方面有关的优化设计问题，有一定代表性。实用优化设计方法附有在微机上运算的BASIC语言源程序，以利于其推广和普及。

本书可作为高等学校有关专业本科生、研究生的教材或自学参考书，也可供工程机械行业工程技术人员和管理干部参考使用。

责任编辑　陆菊英
封面设计　王肖生

优化设计方法在工程机械中的应用
章成器　编著
同济大学出版社出版
(上海四平路1239号)
新华书店上海发行所发行
常熟市文化印刷厂印刷
开本 787×1092　1/16　印张　7　　字数　175千字
1993年5月第1版　　1993年5月第1次印刷
印数：1—2200　　定价：2.30元
ISBN 7-5608-1152-3/F·132

目　　录

优化设计方法引述

优化设计方法是60年代随着电子计算机的普遍使用而迅速发展起来的一种现代设计法。它将数学规划理论、计算机技术和工程设计三者揉合在一起。它能在一系列受诸多因素影响和制约的设计方案中，按照一定的逻辑格式，高效率的优选出一个方案（即一组技术参数），就是最佳设计方案。工程技术人员若能掌握这种现代设计法，则设计出来的产品富有竞争能力。

一项好的设计方案，应保证产品具有良好的技术性能，同时，还要满足生产的工艺性、使用可靠性和安全性，而且制造费用最省、各种消耗最少，作业误差最小等。这些要求就是设计活动需要达到的目标。设计人员在设计过程中一般总要研究几个候选方案，从中选择最优者。但是，传统的设计方法所能提供的选择方案极其有限，要想取得一项最优设计方案是困难的，有时几乎是不可能的。随着设计过程的日益计算机化，迫切要求为自动选取最优设计方案建立一种迅速和有效的方法。优化设计方法就是适应这一需求而发展起来的一种自动探优的方法。

优化设计过程是以计算机自动设计选优为其基本特征。一项工程优化设计的实际课题，其求解过程一般分为四个阶段。

一、设计课题分析

首先决定设计目标，它可以是单项指标，也可以是多项指标的组合。从技术经济观点出发，机器的运动学和动力学性能、体积与重量、效率、成本、可靠性等等，都可以作为设计所追求的目标。然后分析设计应满足的要求，主要的有：某些参数的取值范围；某种设计性能或指标按设计规范推导出的技术性能；还有工艺条件对设计参数的限制等。

二、建立数学模型

将工程设计课题用数学方程的形式予以全面、准确地描述，其中包括：确定设计变量，即哪些技术参数参与优选；构造目标函数，即评价设计方案优劣的设计指标；选择约束函数，即把设计应满足的各类条件以等式或不等式的形式表达。建立数学模型要做到准确、齐全这两点，即必须严格地按各种规范作出相应的数学描述，必须把设计中应考虑的各种因素全部包括进去，这对于整个优化设计的效果是至关重要的。

三、选择优化方法

根据数学模型的函数性态、设计精度要求等选择适用的非线性规划的优化方法，并以某种算法语言编制相应的程序。

四、电算自动择优

将所编程序及有关数据输入计算机进行运算，自动解得最优值，然后对所算结果作出分析判断，得到最优设计方案。

优化设计课题，一般要求归纳为如下形式的数学模型：

在约束条件(不等式约束和等式约束)

$$g_u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g_u(X) \geqslant 0,\ u = 1, 2, \cdots, m$$
$$h_v(x_1, x_2, \cdots, x_n) = h_v(X) = 0,\ v = 1, 2, \cdots, p$$

限制下，求得 n 个参数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使目标函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(X) \rightarrow O_{opt}$$

为了简明地阐述以数学规划方法进行优化设计的基本原理，引用一个简单的实例。

有一圆形截面的悬臂梁，在其自由端作用有集中载荷 $q = 10000$ N、扭矩 $M = 10000$ N·cm，悬臂伸出长度的允许取值范围为 5 cm$\leqslant l \leqslant$15 cm，直径的允许取值范围为 2 cm$\leqslant d \leqslant$10 cm，试在满足材料强度、刚度条件下，设计一个用料最省的方案。

已知材料的许用弯曲应力	$[\sigma] = 100000$ kPa
许用扭转转剪应力	$[\tau] = 75000$ kPa
允许挠度	$[f] = 0.01$ cm
弹性模量	$E = 7.03 \times 10^7$ kPa
圆截面惯性矩	$J = \pi d^4/64$ cm^4

由工程力学知道，梁的弯曲强度条件为 $\dfrac{Pl}{0.1d^3} \leqslant [\sigma]$，扭转强度条件为 $\dfrac{M}{0.2d^3} \leqslant [\tau]$，刚度条件为 $\dfrac{Pl^3}{3EJ} \leqslant [f]$。由于剪切强度和扭转刚度易于满足，可不予考虑。

以上优化设计课题，归纳为数学模型：

设 $x_1 = d$, $x_2 = l$，求

$$F(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2/4$$

的最小值，并受约束于

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 - 2 \geqslant 0 \qquad \text{(直径边界条件)}$$
$$g_2(x_1, x_2) = 10 - x_1 \geqslant 0 \qquad \text{(直径边界条件)}$$
$$g_3(x_1, x_2) = x_2 - 5 \geqslant 0 \qquad \text{(长度边界条件)}$$
$$g_4(x_1, x_2) = 15 - x_2 \geqslant x \qquad \text{(长度边界条件)}$$
$$g_5(x_1, x_2) = (x_1^3/x_2) - 10 \times 10^{-2} \geqslant 0 \qquad \text{(弯曲强度条件)}$$
$$g_6(x_1, x_2) = x_1^3 - 6.66 \times 10^{-2} \geqslant 0 \qquad \text{(扭转强度条件)}$$
$$g_7(x_1, x_2) = (x_1^4/x_2^3) - 0.965 \times 10^{-2} \geqslant 0 \qquad \text{(弯曲刚度条件)}$$

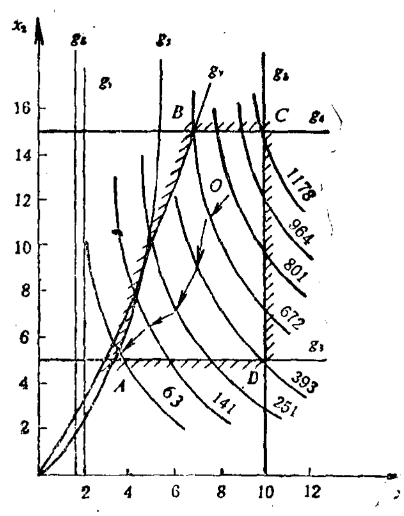


图 1 悬臂梁优化设计

在此数学模型中，由于目标函数和约束函数里有非线性函数，所以属于非线性规划问题。

图 1 表示出这个非线性规划优化设计问题的几何关系。

横坐标轴为 d (即变量 x_1)，纵坐标轴为 l (即变量 x_2)，按直径和长度的上下界可以给出所有方案的区域，但在这些方案中，应该找出体积最小，又保证满足强度和刚度条件的最优方案。为此，在图上可以画出

弯曲强度的约束边界 g_5、扭转强度的约束边界 g_6、弯曲刚度的约束边界 g_7，这就构成了一个所有约束条件都满足的可行设计区域(阴影线所围的区域)，简称可行域。

再在图上画出一些等体积曲线(目标函数的等值线)，则最优方案就是最小值的等体积线与约束边界线的一个交点 A。由于引例是二维的(两个变量)，又较简单，这 A 点的值(目标函数值)是容易算出的。只要把梁的长度下限值 $l=5$ cm 代入弯曲强度条件的约束函数方程 $g_5(x_1, x_2)=0$，即可求得最优方案：

$$x_1^* = d^* = 3.68\ cm$$

$$x_2^* = l^* = 5\ \mathrm{cm}$$

$$F(x_1^*, x_2^*) = 53.18\ \mathrm{cm}^3$$

当然，优化设计的工程课题并不如此简单，一般需要选用合适的优化方法，按照一定的搜索策略，逐步调优，直到取得最优设计方案，其寻优的搜索运动路线是从可行域内某一初始点(即初始设计方案、如图上的点 O)出发，沿着目标函数值(图上等值线)的下降方向，在可行域内逐次不断搜索，直到找到目标函数值最小而又不破坏所有约束条件的最优方案为止。

采用优化设计方法，是设计方法上的一项变革，它可以使许多复杂的工程设计问题，能够迅速取得最优的方案，不仅提高了设计质量和设计效率，而且改进了产品的效能，可以获得较显著的经济效益。如对机器的机构进行优化设计后，可以改善动力学性能、提高运动精度。一般地说，工程设计问题愈复杂，其优化设计结果所取得技术经济效益愈是显著。

第一章　优化问题的数学模型

工程设计的最优化问题，先要用数学的形式表达出来，也就是要建立数学模型。最优化问题的数学模型需要用设计变量、设计约束和目标函数等基本概念才能予以完整地描述。

§1-1　设计变量

任何一个设计方案，皆可用一组参数来表示，虽然由于设计问题的类别不同，这些参数也各不相同，但概括起来也不外是两种类型。一类为几何参数，如零件的外形尺寸、截面尺寸、机构的运动尺寸等等；另一类是物理参数，如构件重量、惯性矩、频率、载荷、力和力矩等等。在这些参数中，有些是可以根据设计要求给定的，有一些则需要在设计中优选，对于需要优选的参数，在设计过程中均把它看作是变化的量，称为设计变量。

最优化问题中设计变量的数目称为该问题的维数。设计变量越多，即问题的维数越高，则设计的自由度也越大，容易得到比较理想的结果。但是，随着设计变量的增多，也必然使问题的求解更复杂，给最优化设计带来更大的困难。因此在一般情况下，设计者还是应该尽量地减少设计变量的数目，而把对设计所追求目标有较大影响的少量参数选为设计变量。

设计变量相当于数学上的独立自变量，一般是若干相互独立的基本参数。n 个设计变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，可以按一定次序排列成数组，表示一个 n 维列向量，即

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$$

这就是说，x_i 是 n 维向量 X 的第 i 个分量。

一般设计变量对应着一个以坐标原点出发的 n 维向量，向量端点的坐标值就是这一组设计变量。一组设计变量表示一个方案，它与一向量的端点相对应，因此也称为设计点，设计点的集合称为设计空间。设计空间由代表各个设计变量的坐标轴来组成。由于工程设计中的设计变量都是实数，所以设计空间是以 n 个设计变量为坐标轴的实空间，或称 n 维欧氏空间，用 R^n 来表示。

最优设计方案，也称最优设计点，简称最优点，其记号为 X^*。

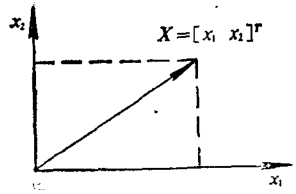
设计空间是所有设计方案的集合，用符号 $X\in R^n$ 表示。

当 $n=2$ 时，设计空间是以 x_1, x_2 为坐标轴的平面，平面上任一点的坐标(x_1, x_2)，对应着一个二维设计变量 $X=[x_1 \quad x_2]^T$。

当 $n=3$ 时，设计空间是以 x_1, x_2, x_3 为坐标轴三维空间，空间内任一点的坐标 (x_1, x_2, x_3)，对应着一个三维设计变量 $X=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$，(见图 1-1)。

当 $n>3$ 时，设计空间是以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为坐标轴的 n 维空间，称为超越空间。超越空间内任一点的坐标$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，对应着一个 n 维设计变量

$$X=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$$



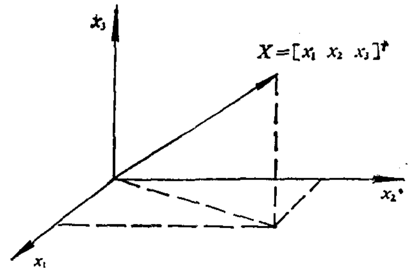


图 1-1 设计变量

根据设计要求，大多数设计变量是有界连续量，称为连续量。但在一些情况下，有些设计变量是离散量，如齿轮模数、齿数等。对于离散设计变量，在优化设计过程中常是先把它视为连续量，在求得连续量的优化结果后再进行圆整或标准化，以求得一个实用的最优设计方案。

§1-2 设计约束

在最优化过程中，对于设计变量的选取常加以某些限制或给于一些附加设计条件，这种限制条件就称为设计约束。由于约束条件的存在，使得在优化设计过程中，求解满足设计约束条件的设计点的工作难度加重了。

约束一般分为两种：

一、边界约束

又称区域约束，即考虑设计变量的取值范围，如构件长度 $l_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 应满足

$$l_{i\min} \leqslant l_i \leqslant l_{i\max}$$

于是可得不等式约束方程

$$g_1(X)=l_i-l_{i\min} \geqslant 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$
$$g_2(X)=l_{i\max}-l_i \geqslant 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

二、性能约束

或称性态约束，是由某种设计性能或指标推导出来的一种约束条件。例如对零件工作应力、变形的限制，对机械效率、振动频率、输出扭矩、波动最大值的限制，对运动学参数如位移、速度、加速度值的限制等等，这种约束条件一般总可以根据设计规范中的计算公式，或者通过物理学和力学的基本分析导出约束函数来表示。

例如要保证机构在运动中具有良好的传力性能，则其最小传动角 $\gamma_{\min}$ 必须大于某一规定允许值 $[\gamma]$，于是可导出它的不等式约束条件为

$$g_3(X)=\gamma_{\min}-[\gamma] \geqslant 0$$

由于引入了设计约束，就将设计空间划分为两个部分。一部分满足约束条件，称为可行域（可行设计区域）：

$$g_u(X) \geqslant 0, \ u=1, 2, \cdots, m$$

另一部分不满足约束条件，称为非可行域（非可行设计区域）：

$$g_u(X) < 0, \ u=1, 2, \cdots, m$$

这两部分的分界面称为约束面(约束边界)：

$$g_u(X)=0,\ u=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

凡在可行域内的设计点，称可行设计方案，简称内点。否则，称为非可行设计方案，简称外点。

某一可行设计方案 $X^{(k)}$，若至少有一个约束 $j(1\leqslant j\leqslant m)$使

$$g_j(X^{(k)})=0$$

则称 $X^{(k)}$为可行域的边界点，这一 j 约束称为起作用约束，在约束优化设计问题中，通常得到的最优点是约束区域的边界点。

除了不等式约束条件外，某些优化设计问题可能还存在几个等式的约束条件：

$$h_v(X)=0(v=1,\ 2,\ \cdots,\ p<n)$$

从理论上说，有一个等式约束条件，就可以消去一个设计变量，即可以减少优化设计问题的维数，但是一个复杂的隐函数，其消元过程是很难实现的，所以对于较复杂的等式约束，一般不采用降维办法处理。

§1-3 目标函数

在许多可行设计方案中，要论各个方案是好、是差，需要有衡量的标准。若把这个"标准"表示为设计变量的可计算函数，优化这个函数，则可以取得最优设计方案。因此，在优化设计中，这一用于评选设计方案的函数，称为目标函数，或称评价函数，记作：

$$F(X)=F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

例如，在悬臂梁的优化设计中，如期望得到一个重量最轻的设计方案，就可以优化重量函数或体积函数来达到。

在工程实际问题中，优化目标函数有两种表达形式，即目标函数的极小化和目标函数的极大化，即

$$F(X)\to\min$$

或

$$F(X)\to\max$$

由于求目标函数的极大化等价于求目标函数 $-F(X)$的极小化，因此为了算法和程序统一，约定最优化就是指极小化。对于某些追求目标函数极大化问题，例如追求效率最高，承载能力最大等，可以转化成求其负值最小的问题。因此，研究优化方法的书籍，一律把优化问题描述为目标函数极小化问题，其一般形式为

$$\min F(X)=F(X^*)$$

建立目标函数是整个优化设计中比较重要的问题。目标函数主要按设计准则、评价指标来建立。

在机构设计中，这种准则可以是运动学和动力学的性能，如运动误差、作用力和约束反力值、振动特性等。

在零件设计中，可以用重量、体积、可靠性、承载能力等表示。

在产品设计中，可以将使用性能、制造成本、市场价格、工作寿命作为追求的目标。

在机械设计中，可以将起重机的起重量、稳定性，挖掘机的挖掘力、作业尺寸，装载机的掘起力、平移性、凿岩机的冲击能、振动速度、耗气量等作为评价指标，建立目标函数。

在一般情况下，这些评价指标都有明显的设计变量的函数关系。但当有的指标尚无确

切的计算公式或精确的测量工具时，也可以用一个与它等价的定量指标来代替。

确定优化设计的目标函数时，其中有些问题是不容忽视的。例如，重量最轻的设计方案，并不一定是工艺上最合适的方案，或者成本最低的方案；机构的最大加速度极小化了，其动态响应可能不好等。所以，建立目标函数是优化设计中的一项重要决策，它将影响最优设计方案的适用价值。

某些优化设计问题，要求同时兼顾若干项设计准则，有若干项评价指标需按主次进行均衡兼顾，那就得建立多目标函数，并以加权因子来反映各项评价指标的重要程度。

$$F(X)=\sum_{j=1}^{q} w_j F_j(X)$$

应该指出，由于各个分目标函数在求极小化过程中会发生矛盾，在多目标函数优化设计中，很难求得一个各分目标函数同时都达到最优的多目标最优解。关于多目标优化问题的处理策略，又是优化设计中的一项研究专题。

§1-4 数学模型

优化设计问题的数学模型是实际工程设计问题的抽象。在明确设计变量、约束条件、目标函数及相应的一些概念之后，来讨论优化设计问题的一般数学表达形式、问题的类型。

设某项工程设计有 n 个设计变量

$$X=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$$

在满足

$$g_u(X)\leqslant 0,\ (u=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

和

$$h_v(X)=0,\ (v=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

的约束条件下，求目标函数

$$F(X)=F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

的最小值。可以简记为

$$\left.\begin{aligned} &\min F(X),\ X\in R^n \\ &\text{s.t.}\ g_u(X)\leqslant 0(u=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \\ &h_v(X)=0(v=1,\ 2,\ \cdots,\ p<n) \end{aligned}\right\}$$

其中 s.t 为 Subjected to (受约束于)的缩写，这一优化设计数学模型，称为约束优化设计问题。

若所列数学模型内 $m=p=0$，则成为

$$\min F(X),\ X\in R^n$$

这一优化问题不受任何约束，称为无约束优化设计问题。

在工程实际问题中，不加任何限制的设计问题是极少的。但是，对于无约束问题的研究、理论上有一定意义，因为它可以为约束优化设计问题提供一个基础，也就是说，在实践中常常将有约束的问题转化为无约束的问题来求解，以便能使用一些比较有效的无约束极小化的算法和程序。

在上述数学问题中，如果 $F(X)$、$g(X)$、$h(X)$ 都是变量 X 的线性函数，则称它为线性

规划问题；如果 $F(X)$ 是 X 的非线性函数，则称它为非线性规划问题；若 X 只取整数值，则属于整数规划问题；若 X 取为函数值时，则属于动态规划问题；若 X 为随机值，则属于随机规划问题。

在一般机械及工程机械优化设计问题中，目前绝大多数仅限于对无约束或约束的非线性规划问题的研究。

第二章　目标函数的最优解

在工程优化设计中，大量的问题是多变量非线性问题，因此需要了解目标函数和约束函数的某些性质，目标函数达到设计最优解的某些规律，以便正确掌握和使用最优化方法。

§ 2-1　目标函数等值面

优化设计的目的是要得到一个最优的设计方案，而评定方案优劣的指标一般表示为 n 个设计变量的函数 $F(X)$，即目标函数。当给定一个设计方案，即给定一组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值(实值)时，目标函数 $F(X)$ 必有一定的数值，具有这种性质的函数称为可计算函数。

若给定 $F(X)$ 值，则有无限多组的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 数值与之对应。当 $F(X)=C$ 时，$X=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ 在设计空间中有一个点集。一般情况下，此点集是一曲面或超曲面，称之为目标函数等值面。当给定一系列 C_i，$(i=1, 2, \cdots)$ 时，可以得到一组曲面族——等值面族。显然，在一个特定的等值面上，每个设计方案的目标函数值都是相等的。

现以二维优化问题为例说明。如图 2-1 所示，$n=2$ 的目标函数 $F(x_1, x_2)$ 在以 x_1，x_2 和 $F(X)$ 为坐标轴的空间内是一个曲面。显然在二维的设计平面 x_1Ox_2 中，每一个点 (x_1, x_2) 都有一相应的目标函数值 $F(x_1, x_2)$，在图中表示为沿 $F(X)$ 轴方向的高度。

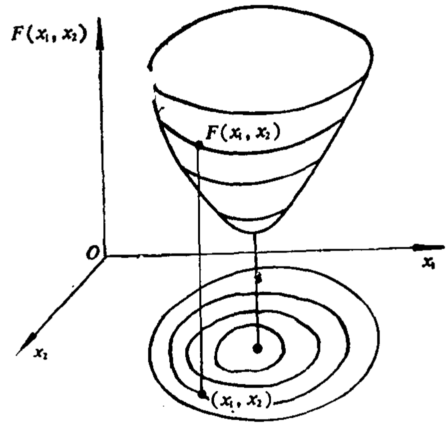


图 2-1　二维目标函数等值线

若将 $F(x_1, x_2)$ 曲面上具有相同高度的点投影到设计平面 x_1Ox_2 上，则得 $F(x_1, x_2)=C$ 的平面曲线，即是目标函数的等值线。它是等值面在二维设计空间中的特征形态。显然，当给定一系列不同的 C 值时，可以得到一组平面曲线：

$$F(x_1, x_2)=C_1$$
$$F(x_1, x_2)=C_2$$
$$\cdots$$

这组曲线构成目标函数的等值线族。

等值线反映了目标函数值的变化规律：愈内层的等值线，其函数值愈小，其中心点是函数的极值点。等值线的间隔愈密，表示该处函数值的变化率愈大。

等值线的分布规律，表示目标函数值的变化情况。因此，对于一个有中心的曲线族来说，目标函数的极值点就是等值线族的一个共同形心。求目标函数的极值点也就是求等值线族的共同形心问题。

以上关于二维设计空间的等值线内容，完全可以推广到多维问题的分析中去。不过对于三维问题，是设计空间中的等值面。而高于三维的问题，将是设计空间中的超等值面。

§ 2-2　无约束极值条件

在无约束情况下的最优化问题，实际上是求多元函数 $F(X)$ 的极小值的问题。即

$$\min F(X)=F(X^*)$$

使目标函数 $F(X)$ 到达极值的向量端点 $X^*=[x_1^* \quad x_2^* \quad \cdots \quad x_n^*]^T$ 就是最优点，而 $F(X^*)$ 即称为最优值。

多元目标函数的形式往往是很复杂的，为了研究其极值问题，需要用简单函数作局部"逼近"，即用泰勒展开式得到目标函数在某点邻近的近似表达式。

设目标函数 $F(X)$ 在 $X^{(k)}$ 点存在连续的 1 到 $n+1$ 阶偏导数，则在这点邻近的泰勒展开式取到二次项时为

$$F(X)\approx F(X^{(k)})+[\nabla F(X^{(k)})]^T(X-X^{(k)})$$
$$+\frac{1}{2}[X-X^{(k)}]^T\nabla^2 F(X^{(k)})(X-X^{(k)})$$

其中 $\nabla F(X^{(k)}$ 是目标函数 $F(X)$ 在 $X^{(k)}$ 点的梯度，它就是对设计变量 x_i 一阶导数组成的一个向量。

$$\nabla F(X^{(k)})=\left[\frac{\partial F(X^{(k)})}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial F(X^{(k)})}{\partial x_n}\right]^T$$

其中 $\nabla^2 F(X^{(k)})$ 是目标函数 $F(X)$ 在 $X^{(k)}$ 点的二阶偏导数 $n\times n$ 阶对称矩阵，或称为 $F(X^{(k)})$ 的海赛(Hesse)矩阵，记作 $H(X^{(k)})$。

$$\nabla^2 F(X^{(k)})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 F(X^{(k)})}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F(X^{(k)})}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 F(X^{(k)})}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F(X^{(k)})}{\partial x_n\partial x_n}\end{bmatrix}$$

只取泰勒级数前三项，是自变量的二次函数表达式，称为目标函数的平方近似表达式。

梯度 $\nabla F(X^{(k)})$ 在优化设计方法中具有重要作用。梯度有下列几个重要性质。

(1) 梯度方向是函数值增长最快的方向。显然，负梯度 $-\nabla F(X^{(k)})$ 是函数 $F(X)$ 在 $X^{(k)}$ 点的下降最速的方向。

(2) 函数在 $X^{(k)}$ 点梯度只是反映在该点极小邻域内函数的最速变化方向，因而这种性质具有局部性，因点而异。

(3) 梯度 $\nabla F(X^{(k)})$ 与过 $X^{(k)}$ 点的函数等值线（或等值面）是正交的。梯度沿等值线过 $X^{(k)}$ 点切向的投影为零。

当多元函数在 $X^{(k)}$ 点附近的偏导数连续时，则多元函数在该点存在极小值的必要，充分条件是：$\nabla F(X^{(k)})=0$，即函数在该点的梯度为零向量；且 $\nabla^2 F(X^{(k)})$ 即海赛矩阵 $H(X^{(k)})$ 为正定的（其各阶主子式的值均恒大于零）。

§ 2-3　约束极值条件

在等式约束或不等式约束条件下的约束最优化问题，即是求一个设计点 $X^*=[x_1^* \quad x_2^* \quad \cdots \quad x_n^*]^T$，使目标函数

$$\min F(X)=F(X^*)$$

且满足约束条件

$$g_u(X^*)\leqslant 0 \qquad (u=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

$$h_v(X^*)=0 \qquad (v=1,\ 2,\ \cdots,\ p<n)$$

这个最优点 X^* 称为约束最优点或条件极值点。

显而易见，约束最优点不仅与目标函数的性质有关，而且还与约束函数的性质有关，因此约束的极值问题比无约束情况更为复杂。

为了判断一个条件极值点的存在，先用具有两个约束条件的情况来举例说明。

当有两个起作用约束时，设 $X^{(k)}$ 点在两个起作用的约束面交点处。在该点，目标函数负梯度是 $-\nabla F(X^{(k)})$，两个约束函数梯度分别是 $\nabla g_1(X^{(k)})$ 和 $\nabla g_2(X^{(k)})$。再分两种情况来分析。

第一种情况（$X^{(k)}$ 不是约束最优点），如图 2-2a）所示。在 $X^{(k)}$ 点邻近区域内沿约束面切线方向 S_1 移动是允许的，约束 $g_1(X)$ 和 $g_2(X)$ 均未破坏，故 $X^{(k)}$ 是不稳定点，显然它不是条件极值点。由图可见，在这种情况下几何图形的特点是：向量 $-\nabla F(X)$ 不在由 $\nabla g_1(X^{(k)})$ 和 $\nabla g_2(X^{(k)})$ 向量所组成的扇形区域内。

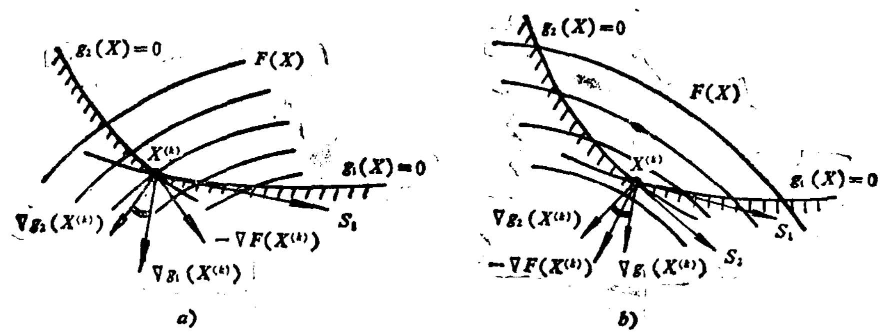


图 2-2 约束极值点的必要条件

第二种情况（$X^{(k)}$ 是约束最优点），如图 2-2b）所示。在 $X^{(k)}$ 点的邻近范围内，沿 S_1 或 S_2 方向作任意微小的移动，都会破坏约束 $g_1(X)$ 和 $g_2(X)$，显然，在这种情况下，$X^{(k)}$ 点就是一个条件极值点。这时，几何图形的特点是：目标函数负梯度向量 $-\nabla F(X)$ 在由约束函数梯度 $\nabla g_1(X^{(k)})$ 和 $\nabla g_2(X^{(k)})$ 向量所组成的扇形区域之内。如果用数学式表示，则 $-\nabla F^{(k)}$ 向量可以表示成 $\nabla g_1(X^{(k)})$ 和 $\nabla g_2(X^{(k)})$ 向量的线性组合。即

$$-\nabla F(X^{(k)})=\lambda_1\nabla g_1(X^{(k)})+\lambda_2\nabla g_2(X^{(k)})$$

式中 $\lambda_1\geqslant 0$，$\lambda_2\geqslant 0$。

这就是 $X^{(k)}$ 点成为条件极值点 X^* 的必要条件。

将上述条件推广到一般情况，就可以得到 Kuhn-Tucker 条件，即 $X^{(k)}$ 点成为条件极值点 X^* 的必要条件，可以作如下表述：

设某一设计点 $X^{(k)}$ 有 q 个约束起作用，也就是说，$X^{(k)}$ 是在 q 个约束面的交集上。在此交集上目标函数为 $F(X^{(k)})$，其负梯度为 $-\nabla F(X^{(k)})$，任一个约束函数的梯度为 $\nabla g_u(X^{(k)})$，则一个局部最优点的必要条件是：目标函数负梯度 $-\nabla F(X^{(k)})$ 可以表示成起作用诸约束梯度 $\nabla g_u(X^{(k)})$ 的线性组合，即