高等学校“十二五”规划教材

动力学

李宏亮 李 鸿／主编

DONGLIXUE

哈爾濱工程大學出版社

动 力 学

主编 李宏亮 李 鸿

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

内容介绍

全书共分十章，分别阐述了点的运动学、刚体的简单运动、点的复合运动、刚体的平面运动、质点动力学、动量定理、动量矩定理、动能定理、达朗伯原定理、虚位移原理和第二类拉格朗日方程。书中例题类型多，每章后有思考题和习题，适用于课堂教学。

本书可作为高等学校机械、土建、船舶和动力学等专业理论力学课程的教材，也可供夜大、函授、自考等相关专业及有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

动力学/李宏亮，李鸿主编．—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2014．3
ISBN 978－7－5661－0770－1

Ⅰ．①动… Ⅱ．①李… ②李… Ⅲ．①动力学－高等学校－教材 Ⅳ．①O313

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 037311 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451－82519328
传　　真 0451－82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1 092mm　1/16
印　　张 16.5
字　　数 409 千字
版　　次 2014 年 3 月第 1 版
印　　次 2014 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 35.00 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　　言

“理论力学”是一门重要的技术基础课程，哈尔滨工程大学重视对该课程的建设，历经二十多年，经过几代人的辛勤努力，积累了比较丰富的教学经验，形成了比较稳定的教学风格和教学特色。

哈尔滨工程大学2009版本科培养方案中单独开设了“力学基础”课程，并把该课程设定为面向全体理工类学生的公共基础课程，这体现了学校创新人才培养模式的思想，也符合国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020年）所指明的“牢固确立人才培养在高校工作中的中心地位，着力培养信念执著、品德优良、知识丰富、本领过硬的高素质专门人才和拔尖创新人才”方向。

“理论力学”设定为56学时和40学时两个进度，教学内容分为运动学和动力学两部分。“理论力学”原来设定的学时进度有80学时、64学时和48学时三类，80学时对象为强机类专业和工程力学专业，64学时对象为近机类专业，48学时针对自动控制等非机类专业，现在平台变为56学时和40学时两种，设定的对象和各专业选择的学时之间有落差，这时就要求我们承担该课程的教师重新思考，什么样的理论力学知识才是作为一名工程技术人员应该掌握的，这些应该掌握的知识又应该用什么样的方式传授给学生？

我们经过深入调查研究，综合考虑了国内外理工类学校理论力学课程的设课思路，最终确定重组运动学和动力学知识，以新的教学方式开展教学。

一种新的教学大纲安排，相应地应该推出一种新的教材，哈尔滨工程大学“理论力学”课程教学团队对这一任务比较慎重。通过了解学生的需求，经过认真分析和思索，调整知识平台，为提高学生的创新意识和综合素质，为提高学生提出问题，分析问题，解决问题的能力，我们编写了具有较鲜明特点的教材。内容强化矢量和矢量系简化及主矢主矩的概念及理论，将静力学中的矢量系简化及主矢主矩的概念及理论引申到了质点系统的动量系简化，将静力学求解平衡问题的技巧方法映射到动力学问题的求解上，形成了理论力学体系内容的完整对应。

经过2011—2013年三个春季学期的教学实践，我们不断补充新鲜素材，更新例题和习题。在对学生问卷调查的基础上，有的放矢地更新陈旧教学内容，在定理的证明上做到准确、清楚。在具体章节的安排上能够吸收有关最新科研成果，更新陈旧教学内容，在定理的证明、例题选配上广泛参考国内外同类教材；既能全面、准确、清楚地讲解基本概念和基本方法，又为不同的教学要求提供了足够的教学内容，做到专业照应，重点突出；注意理论联系实际，不断渗透应用意识。让学生感受生活实际中的例子，将书本知识转化为解决工程实际问题的理念和思路，能够增加学生的感性认识，锻炼他们的分析问题和解决问题的能力。内容讲解注重知识的内涵和实质、知识与知识的联系，注重对学生分析问题和解决问题的能力培养。针对较难理解的教学内容，采用循序渐进的编写方法，启发学生的思维、激励并锻炼他们解决问题的能力和意识，激发学生学习的兴趣和积极性。

全书共十章，分别阐述了运动学、动力学的基础理论。书中例题类型多，每章后有思考

题和习题,适用于课堂教学。

运动学部分由李鸿负责组织统稿,第1,2章由吴国辉编写;第3,4章由李鸿编写;张瑞编写了3,4章的习题。动力学部分由李宏亮负责组织统稿,第5,6章由樊涛编写;第8,9,10章由李宏亮编写;第7章及5~10章的习题由杜秀丽编写。

本书可作为高等工科院校机械、土建、船舶和动力等专业理论力学课程的教材,也可供夜大、函授大学、自考等相关专业及有关工程技术人员参考。

本书在编写过程中,参考或引用了国内一些专家学者的论著,在此表示感谢!由于编者水平有限,错漏之处难以避免。不当之处敬请读者批评指正。

编　　者
2013年3月

目　　录

第1章　点的运动学

当物体运动时，一般情况下，物体内各点的运动是不同的。因此我们先研究几何点的运动，再转到刚体和刚体系统的运动。点的运动学中最基本的问题，是描述点在某参考系中位置随时间变化的规律，这种点的运动规律的数学表达式称为点的运动方程，确定了点在参考系中的运动方程后，就能求出点在空间运动所行经的路线——**点的运动轨迹**；点在空间位置的变化——**位移**；点运动时位移变化的快慢——**速度**；点速度变化的快慢——**加速度**等等。

因此对于点的运动，本章主要研究四个问题：点的运动方程；点的运动轨迹；点的运动速度；点的加速度。对于上述主要问题，可以有多种描述方法，本章将讨论矢量法，直角坐标法，自然法（弧坐标法）等基本方法。

1.1　点的运动方程及点的轨迹

研究点的运动，首先要确定点在任意瞬时在所选坐标系中的位置及点的位置随时间变化的规律。本节讨论点的运动所采用的基本方法。

1.1.1　矢量法

设动点 M 作任一空间曲线运动，任意一个瞬时 t，动点在 M 点，如图 1-1 所示。

选取任意一个空间固定点 O 为参考点，则可用矢径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$来表示动点 M 在 t 瞬时在空间的位置。随着 M 点在空间的运动，表示动点 M 位置的矢径 $\boldsymbol{r}$ 也在变化，有一个时刻，就会有一个对应的矢径，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向都随时间而改变，因此，我们可以得到时间与矢径的对应方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

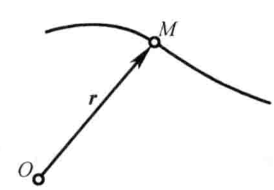

图1-1　用矢量描述点的运动图

$\boldsymbol{r}$ 是时间 t 的单值连续函数。

式(1-1)称为以矢量表示的动点 M 的运动方程。它表示动点 M 在空间的位置随时间的变化规律，也叫运动规律。函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 知道后，即可确定动点 M 在任一瞬时的位置，随着动点的运动，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的端点将能连成一条曲线，称为矢端曲线，它就是动点 M 的运动轨迹。

1.1.2　直角坐标法

以空间任一固定点 O 为原点，建立空间直角坐标系 $Oxyz$，如图 1-2 所示，当动点 M 做空间任意曲线运动时，任一瞬时 t，M 点的位置可用直角坐标 x,y,z 唯一地确定，有一个时刻 t，就有一组空间直角坐标对应，我们可得到直角坐标与时间的一一对应关系。

$$\begin{cases} X = X(t) \\ Y = Y(t) \\ Z = Z(t) \end{cases} \tag{1-2}$$

式(1－2)是一组时间的单值连续函数,称为动点的直角坐标形式的运动方程,它准确描述了动点任意时刻在空间的位置。

在这组方程中,消去时间参数 t,则得只含 x,y,z 的曲线方程 $f(x,y,z)=0$,这就是动点在空间直角坐标系下的运动轨迹方程。

若从直角坐标系原点 O 向动点 M 引矢径,则能得到矢径 $\boldsymbol{r}$ 的直角坐标系下的解析表达式:

$$\boldsymbol{r}(t) = X(t)\boldsymbol{i} + Y(t)\boldsymbol{j} + Z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-3}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是 $Oxyz$ 坐标系的 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的单位矢量,式(1－3)表明了矢量法表示的运动方程与直角坐标法表示的运动方程之间的关系。

例 1－1　曲柄连杆机构如图 1－3 所示。曲柄 OA 以规律 $\varphi=\omega t$ 绕 O 点转动,并通过连杆带动滑块 B 在水平槽内滑动。设 $OA=AB=L$,求连杆 AB 上 M 点($AM=h$)的运动方程和轨迹方程。

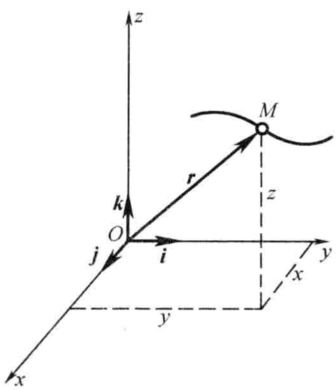

图 1－2　用直角坐标描述点的运动示意图

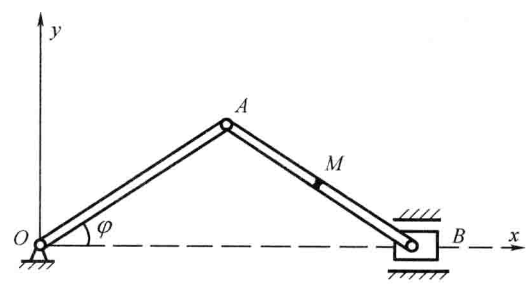

图 1－3　例 1－1 图

解:本题是在未知动点轨迹的情况下,求点的运动,故应使用直角坐标法。选取坐标系如图 1－3 所示,则 M 点的运动方程为

$$x = OA\cos\omega t + AM\cos\omega t = (L+h)\cos\omega t$$

$$y = MB\sin\omega t = (L-h)\sin\omega t$$

从运动方程中消去时间 t,即得其轨迹方程

$$\frac{x^2}{(L+h)^2} + \frac{y^2}{(L-h)^2} = 1$$

可见,其轨迹是一个椭圆。

例 1－2　杆 AB 长为 l,A 和 C 两滑块各沿铅直和水平槽运动,如图 1－4 所示,设 $BC=a$,$\theta=\omega t$(ω 为常数),试写出 B 点的运动方程,并求其轨迹。

解:(1)分析运动　A,C 分别在铅直和水平槽内滑动,而 B 点做平面曲线运动。

(2)列运动方程　取两互相垂直的直线交点 O 为原点,作直角坐标系 Oxy。根据图示

的几何关系，B 点的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x &= l\sin\theta \\ y &= a\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

将 $\theta=\omega t$ 代入式(a)中，便得

$$\left.\begin{aligned} x &= l\sin\omega t \\ y &= a\cos\omega t \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

这就是 B 点的直角坐标运动方程。

从运动方程中消去时间 t，得出 B 点的轨迹方程。为此，将式(b)改写成

$$\sin\omega t=\frac{x}{l},\cos\omega t=\frac{y}{a}$$

将上二式两边平方后并相加，得

$$\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2$$

即

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

这就是 B 点的轨迹方程。

例 1－3　一铰链机构由长为 a 的杆 OA_1，OB_1，CA_2，CB_2 及长为 $2a$ 的杆 B_1A_2 和 B_2A_1 构成，如图 1－5 所示，求铰链 C 沿 x 轴运动时铰链 A_1，A_2 所走的轨迹。

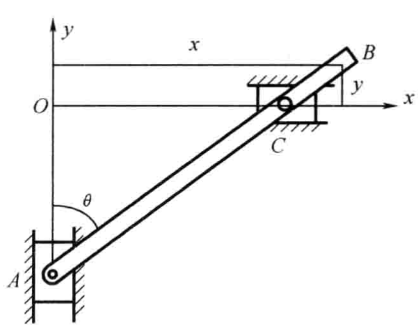

图 1－4　例 1－2 图

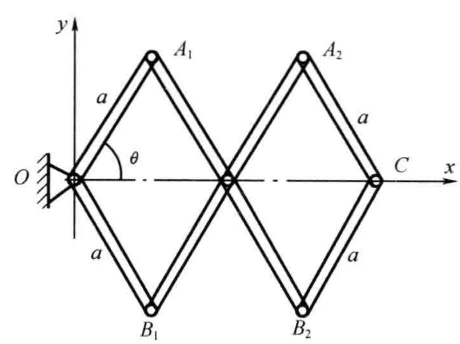

图 1－5　例 1－3 图

解：由图 1－5 可以看出，当铰链 C 沿 x 轴运动时，铰链 A_1，A_2 在平面内作曲线运动。取坐标轴 Oxy，根据图示的几何关系，A_1 点的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\cos\theta \\ y_1 &= a\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

将式(a)两边平方后并相加得

$$x_1^2+y_1^2=a^2$$

这就是 A_1 点的轨迹方程。

同理可得出 A_2 点的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 3a\cos\theta \\ y_2 &= a\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

将式(b)两边平方后并相加，得

$$\frac{x_2^2}{(3a)^2}+\frac{y_2^2}{a^2}=1$$

这就是 A_2 点的轨迹方程。

例 1－4　半径为 r 的圆轮沿水平直线轨道滚动而不滑动，轮心 C 则在与轨道平行的直线上运动。设轮心 C 的速度为一常量 v_c，试求轮缘上一点 M 的轨迹。

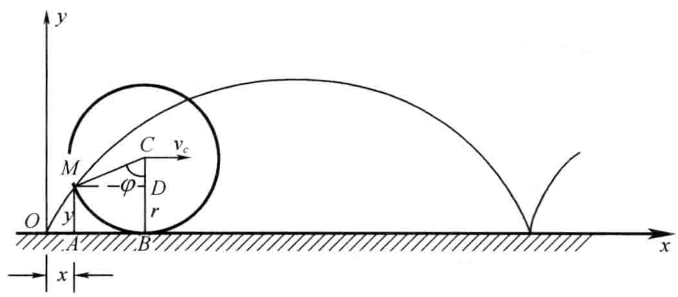

图 1－6　例 1－4 图

解：为了求 M 点的轨迹，须要建立 M 点的运动方程。以 M 点与轨道第一次接触的瞬时作为计算时间的起点（即在该瞬时 $t=0$），并以该瞬时轨道上与 M 接触的点为坐标原点 O，x 轴水平向右，y 轴铅直向上。取 M 点在任一瞬时 t 的位置来考察，由图 1－6 可见，M 点的坐标为

$$x=OB-AB=OB-MD=OB-r\sin\varphi \tag{a}$$

$$y=MA=CB-CD=r-r\cos\varphi \tag{b}$$

因圆心 C 以速度 v_c 做匀速直线运动，故

$$OB=v_c t \tag{c}$$

又因轮子滚动而不滑动，故

$$OB=\widehat{MB}=r\varphi$$

由此可得

$$\varphi=\frac{OB}{r}=\frac{v_c t}{r} \tag{d}$$

将式(c)、(d)代入式(a)、(b)，得

$$x=v_c t-r\sin\frac{v_c t}{r} \tag{e}$$

$$y=r-r\cos\frac{v_c t}{r} \tag{f}$$

这就是 M 点的运动方程，同时也是以时间 t 为参数的 M 点的轨迹方程。根据这组方程可画出 M 点的轨迹曲线如图 1－6 中实线所示，该曲线称为旋轮线或摆线。

1.1.3　自然法（弧坐标法）

1. 弧坐标

在工程实际中，有些动点的运动轨迹往往是已知的，那么我们不妨采用一种与点的运动轨迹结合最密切的办法来描述点的运动，就是自然法，也称为弧坐标法。

设动点 M 沿已知轨迹曲线运动，我们把此轨迹曲线看作是一条弧形曲线形式的坐标轴，简称弧坐标轴，如图 1－7 所示，在轨迹上任取一点（固定点）O 作为原点，规定轨迹的一端为运动的正方向，另一端为运动的负方向，动点 M 在某瞬时的位置，由从原点 O 到 M 点的那段弧长 S 来表示，当 $S>0$ 时，表示 M 点在轨迹的正的一边；当 $S<0$ 时，表示 M 点在轨迹的负的一边。像这样带有正、负号的弧长 S，称为点的弧坐标，由此可知，弧坐标是一代数量，用弧坐标来确定动点在任意瞬时的位置的方法称为弧坐标法，也叫自然法。

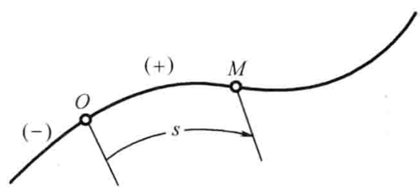

图 1－7　用弧线标描述点的运动示意图

当 M 点运动时，其弧坐标是时间的单值连续函数

$$S=S(t) \tag{1-4}$$

方程（1－4）唯一地确定了任意瞬时点的位置，建立了点在空间的位置和时间的一一对应关系，表达了动点的运动规律，称为用弧坐标表示的点的运动方程。

2. 自然轴

用弧坐标法分析点在曲线上的运动时，为了使点的速度和加速度方向与点的轨迹特性能更密切结合，除用弧坐标外，还要用到自然轴系，为此，先来介绍自然轴系的概念。

设有一空间任意曲线，如图 1－8 所示，在其上任取一点为 M 点，在 M 点附近另取一点 M' 点，曲线在 M 点的切线为 MT，在 M' 点的切线为 $M'T'$，自 M 点作 MT_1 平行于 $M'T'$，则 MT 与 MT_1 将决定一平面，当 M' 点接近 M 点时，因 MT_1 方位的改变，这平面将绕 MT 转动，当 M' 点无限接近 M 点时，这平面将转到某一极限位置，这个处于极限位置的平面称为曲线在 M 点的密切面，对于一般空间曲线，密切面的方位随 M 点的位置而改变，至于平面曲线，密切面就是曲线所在的平面。通过 M 点而与切线 MT 垂直的平面，称为曲线在 M 点的法平面。法平面内通过 M 点的一切直线都和切线垂直，因而都是曲线的法线。为了区别，规定在密切面内的法线 MN（即法面与密切面的交线）称为曲线在 M 点的主法线，法面内与主法线垂直的直线 MB，则称为副法线。图 1－9 所示自然轴系也由三条相互垂直的轴组成，其三个单位矢量分别为 $\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{\tau}$ 沿轨迹在该点的切线方向，并指向弧坐标的正向，称为切向单位矢量；$\boldsymbol{n}$ 沿轨迹凹的一侧指向曲线在该点的曲率中心，即沿曲线在该点的主法线方向，称为主法线方向单位矢量；$\boldsymbol{b}$ 则沿曲线在该点的副法线方向，其指向由右手螺旋定则确定，即 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$，称为副法线方向单位矢量。弧坐标轴本身是动点运动的轨迹曲线，它一经选定就不变了，所以是一种静止的坐标系，但是自然轴系是与动点在某一瞬时的位置有关的，某一瞬时动点在哪里，自然轴系的原点就在哪里，随着点的运动，其自然轴的方位也随之改变，所以 $\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 都是随着点的位置而变化的变矢量，对于曲线上的任一点，都有属于该点的一组自然轴系。

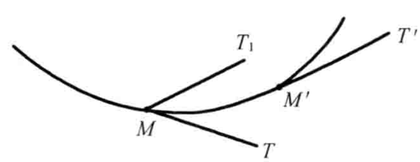

图 1－8　曲线上 M 点的切线图

例 1－5　飞轮以 $\varphi=2t^2$ 的规律转动（φ 以 rad 计），如图 1－10 所示，其半径 $R=50$ cm。

试求飞轮上一点 M 的运动方程。

解：由于飞轮作转动，故飞轮上点 M 运动的轨迹是以 R 为半径的圆，因而宜用自然法确定其位置，建立运动方程。

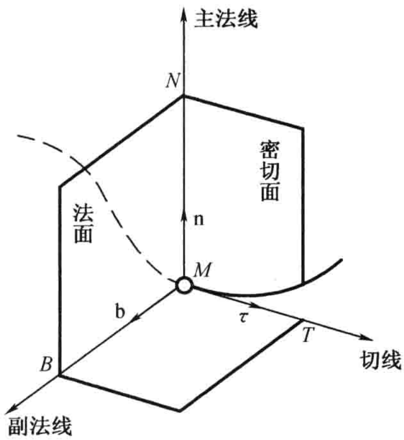

图 1－9　曲线上 M 的自然轴系图

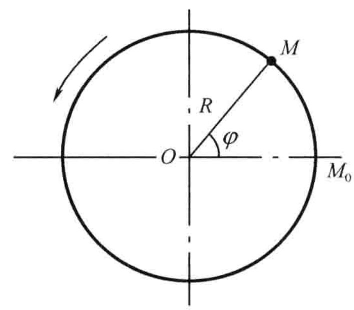

图 1－10　例 1－5 图

当 $t=0$ 时，点 M 位于 M_0 处，现以这点为参考点，则弧长 $\overline{M_0M}$ 为

$$S=R\varphi=100t^2$$

这就是以自然法表示的点 M 的运动方程。

例 1－6　摇杆机构由摇杆 BC、滑块 A 和曲柄 OA 组成，如图 1－11(a)所示。已知 $OA=OB=100(\mathrm{mm})$，BC 绕 B 轴转动，并通过滑块 A 在 BC 上滑动而带动 OA 杆绕轴 O 转动。角度 φ 与时间 t 的关系是 $\varphi=2t^3(\mathrm{rad})$，$t$ 以秒计。试求 OA 杆上 A 点的运动方程。

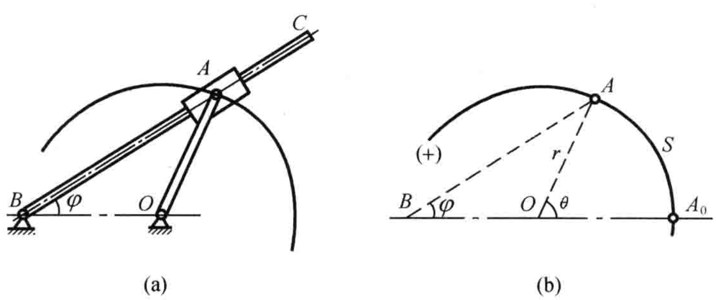

图 1－11　例 1－6 图

解：由图可以看出 A 点运动的轨迹是以 OA 为半径的圆弧，因而宜用自然法确定其位置，建立运动方程。

设 OA 与水平线的夹角为 θ，当 $t=0$ 时，$\varphi=0,\theta=0$，A 点在 A_0 处(图 1－11(b))。选取 A_0 点为弧坐标原点，由 A_0 向上定为弧坐标正方向。在任意瞬时 t，BC 转过的角度为 φ，动点由 A_0 运动至 A，弧坐标为

$$s=+\overset{\frown}{A_0A}=OA\cdot\theta$$

由于 ΔOAB 是等腰的,所以

$$\theta = 2\varphi = 2 \times 2t^3 = 4t^3$$

$$OA \cdot \theta = 0.1 \times 4t^3 = 0.4t^3$$

所以 $$S' = 0.4t^3 (\mathrm{m}) \tag{a}$$

式(a)就是以自然法表示的 A 点的运动方程。

例 1－7 图 1－12 所示机构中,半径为 R 的固定大圆 C 位于铅垂平面内,小环 M 同时活套在大圆环和摇杆 OA 上,摇杆 OA 绕 O 轴以匀角速度 ω 逆时针方向转动。运动开始时,摇杆在右侧水平位置。求小环的运动方程。

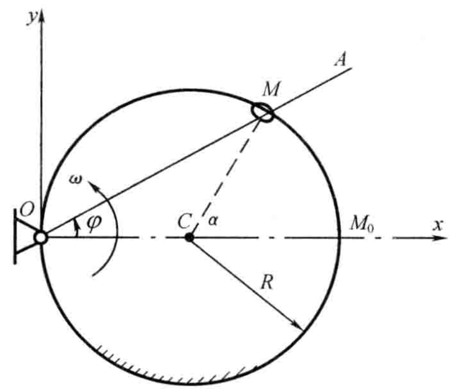

图 1－12 例 1－7 图

解:因为已知小环 M 的运动轨迹是半径为 R 的圆周,故采用自然法。

取 x 轴与大圆环的交点 M_0 为弧坐标的坐标原点,并规定逆时针转向为弧坐标的正方向。则 M 点的运动方程为

$$S = R\alpha$$

而 $$\alpha = 2\varphi, \varphi = \omega t$$

所以 $$S = R \cdot 2\varphi = 2R\omega t$$

1.2 用矢量法确定点的速度和加速度

1.2.1 速度

在矢量法中,设在某瞬时 t,动点位于 M 点,其矢径为 $\boldsymbol{r}$,经过 Δt 时间间隔后,动点运动到 M'点,其矢径为 $\boldsymbol{r}'$,则矢径 $\boldsymbol{r}$ 的增量为 $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$,(如图 1－13),$\Delta\boldsymbol{r}$ 就是 Δt 时间间隔内,动点 M 的位移,它是一个矢量,而比值$v^* = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$称为动点在 Δt 时间间隔内的平均速度。当$\Delta t \to 0$时,平均速度的极限表明在瞬时 t 动点运动的快慢和方向,用 $\boldsymbol{v}$ 表示,称为动点在瞬时 t 的瞬时速度,以后书中提到的速度都为瞬时速度。

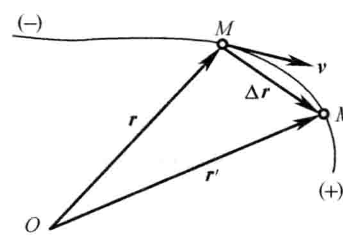

图 1－13 M 点的速度示意图

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1-5}$$

即动点的速度矢量等于它的矢径对时间的一阶导数。速度是一个矢量,它的大小等于 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$,它的方向由位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的极限方向所确定,即沿轨迹在 M 点的切线方向,并指向动点的运动方向。

在国际单位制中,速度的单位为米/秒(m/s)或厘米/秒(cm/s)等。

1.2.2 加速度

当动点作曲线运动时，其速度的大小和方向一般都随时间而变化，即 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$。如果 t 瞬时动点速度为 $\boldsymbol{v}_1$，经过 Δt 时间间隔后，$t+\Delta t$ 瞬时动点速度为 $\boldsymbol{v}_2$，则速度矢量的增量 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$，比值 $\boldsymbol{a}^*=\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$称为动点在时间间隔 Δt 内的平均加速度。而当 $\Delta t\to 0$ 时，平均加速度的极限即为动点在瞬时 t 的瞬时加速度，简称加速度。

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1-6}$$

可见动点的加速度等于它的速度对时间的一阶导数，或等于它的矢径对时间的二阶导数，加速度也是一个矢量。加速度的国际单位常用“米/秒^2”（$\mathrm{m/s^2}$）表示。

用矢量法描述点的运动，只需选择一个参考点就可以了，不需要建立参考系，这种方法运算简洁，把矢量的大小和方向统一起来了，便于理论推导。这一特点经常在矢量的公式推导中使用。

1.3 用直角坐标法确定点的速度和加速度

1.3.1 速度

前面已经得到动点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 在直角坐标系下的解析表达式：

$$\boldsymbol{r}(t)=X(t)\boldsymbol{i}+Y(t)\boldsymbol{j}+Z(t)\boldsymbol{k}$$

又利用 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(X(t)\boldsymbol{i})}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}(Y(t)\boldsymbol{j})}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}(Z(t)\boldsymbol{k})}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+X(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+Y(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}+Z(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

注意到 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 都是常矢量

因为有 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=0$

因而

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\dot{X}(t)\boldsymbol{i}+\dot{Y}(t)\boldsymbol{j}+\dot{Z}(t)\boldsymbol{k} \tag{1-7}$$

另一方面，$\boldsymbol{v}$ 是一个矢量，在直角坐标系下，同样可写出它的解析表达式

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

其中，v_x,v_y,v_z 分别表示速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 在 x,y,z 三个轴上的投影。

由式(1-7)，(1-8)可得

$$\begin{cases}v_x=\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{X}(t)\\[2ex] v_y=\dfrac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{Y}(t)\\[2ex] v_z=\dfrac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{Z}(t)\end{cases} \tag{1-9}$$

即动点的速度在直角坐标轴上的投影等于其相应轴方向的运动方程对时间的一阶导数。
式(1-9)完全确定了 $\boldsymbol{v}$ 的大小和方向,其大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

其方向可由速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向余弦来确定

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=\frac{v_x}{v}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=\frac{v_y}{v}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k})=\frac{v_z}{v}$$

1.3.2　加速度

对速度 $\boldsymbol{v}$ 的表达式进一步求导就得到加速度 $\boldsymbol{a}$ 的表达式

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\dot{X}(t)\boldsymbol{i}+\dot{Y}(t)\boldsymbol{j}+\dot{Z}(t)\boldsymbol{k})}{\mathrm{d}t}=\ddot{X}(t)\boldsymbol{i}+\ddot{Y}(t)\boldsymbol{j}+\ddot{Z}(t)\boldsymbol{k} \tag{1-10}$$

同时,加速度 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系下的解析表达式为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-11}$$

其中 a_x,a_y,a_z 为加速度 $\boldsymbol{a}$ 在 x,y,z 三个轴上的投影。根据式(1-10),(1-11)得

$$\begin{cases}a_x=\ddot{X}(t)=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\\ a_y=\ddot{Y}(t)=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\\ a_z=\ddot{Z}(t)=\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\end{cases} \tag{1-12}$$

因此动点的加速度在直角坐标系下的投影,等于该点速度的对应投影方程对时间的一阶导数,也等于该点的对应坐标方程对时间的二阶导数。
式(1-12)完全确定了 $\boldsymbol{a}$ 的大小和方向,其大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

其方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=\frac{a_x}{a}$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})=\frac{a_y}{a}$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})=\frac{a_z}{a}$$

当点做平面曲线运动时,运动方程中 $z=z(t)=0$,上述各速度,加速度公式仍然适用。

例 1-8　求例 1-1 中连杆 AB 上 M 点的速度和加速度。

解:利用计算速度和加速度的公式,可得

$$v_x=\dot{x}=-(L+h)\omega\sin\omega t$$

$$v_y=\dot{y}=(L-h)\omega\cos\omega t$$

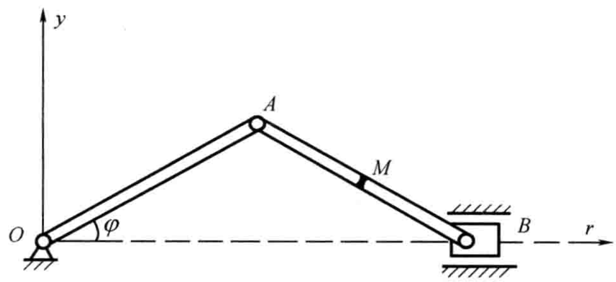

图 1－14 例 1－8 图

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\omega\sqrt{(L+h)^2\sin^2\omega t+(L-h)^2\cos^2\omega t}$$

其方向沿椭圆的切线方向。

$$a_x=\ddot{x}=-(L+h)\omega^2\cos\omega t=-\omega^2 x$$

$$a_y=\ddot{y}=-(L-h)\omega^2\sin\omega t=-\omega^2 y$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\omega^2\sqrt{x^2+y^2}=\omega^2 r$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=a_x/a=-x/r$$

$$\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=a_y/a=-y/r$$

由上式可见，加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦与矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦等值反向，因此，加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向始终指向原点 O。

例 1－9 如图 1－15(a) 所示运动机构，已知绳子的 A 端系在套筒上，B 端以匀速 u 水平向右运动，套筒可沿水平杆 CO 运动，已知 $DO=h$，试求任一瞬时套筒 A 的速度、加速度与 $AO=s$ 间的关系，并确定 A 的运动性质（即是加速运动，还是减速运动）。

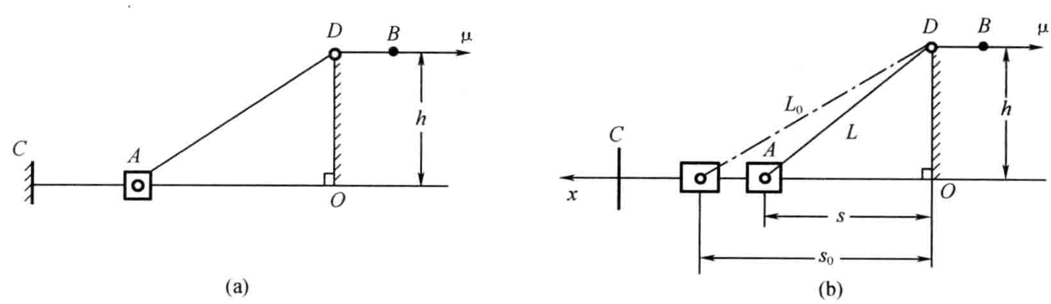

图 1－15 例 1－9 图

解：选如图 1－15(b) 所示坐标轴 Ox，s 的正方向与 x 轴一致，设开始运动时 $x_0=s_0$，运动到任一位置 $x=s$ 时，有

$$L_0-\sqrt{h^2+s^2}=ut \tag{a}$$

其中，$L_0=\sqrt{h^2+s_0^2}$。式(a)两边对时间 t 求导，注意到 L_0，h 和 u 均为常量，而套筒 A 的速度 $v=\dot{s}$，所以整理后可得

$$v=-\frac{u}{s}\sqrt{h^2+s^2} \tag{b}$$