

Advanced Applied Mathematical Problem
Solutions with MATLAB[®] (second edition)

高等应用数学问题的 MATLAB[®] 求解

(第二版)

薛定宇 陈阳泉 著

Dingyü Xue and Yangquan Chen



清华大学出版社

029

3-2

Advanced Applied Mathematical Problem
Solutions with MATLAB[®] (second edition)

高等应用数学问题的 MATLAB[®] 求解

(第二版)

薛定宇 陈阳泉 著

Dingyü Xue and Yangquan Chen

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书首先介绍了 MATLAB 语言程序设计的基本内容,在此基础上系统介绍了各个应用数学领域的问题求解,如基于 MATLAB 的微积分问题、线性代数问题的计算机求解、积分变换和复变函数问题、非线性方程与最优化问题、常微分方程与偏微分方程问题、数据插值与函数逼近问题、概率论与数理统计问题的解析解和数值解法等,还介绍了较新的非传统方法,如模糊逻辑与模糊推理、神经网络、遗传算法、小波分析、粗糙集及分数阶微积分学等领域。

本书可作为高等学校理工科各专业本科生和研究生学习计算机数学语言的教材和参考书,也可供科技工作者、教师学习和应用 MATLAB 语言解决实际数学问题时参考,还可作为读者查询某数学问题求解方法的手册。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学问题的 MATLAB 求解/薛定宇,陈阳泉著. —2 版. —北京:清华大学出版社, 2008.10

ISBN 978-7-302-18618-2

I. 高… II. ①薛…②陈… III. 应用数学—计算机辅助计算—软件包, MATLAB—高等学校—教材 IV. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 145761 号

责任编辑:王一玲

责任校对:李建庄

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:北京密云胶印厂

装 订 者:三河市溧源装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印 张:28.5 字 数:657 千字

版 次:2008 年 10 月第 2 版 印 次:2010 年 6 月第 4 次印刷

印 数:7501~10500

定 价:45.00 元

第二版前言

数学问题是科学研究中经常需要解决的问题。研究者通常将自己研究的问题用数学建模的方法建立起数学模型，然后通过求解数学模型的方法获得所研究问题的解。

本书有两个目标，其一是系统地介绍基于 MATLAB 语言的应用数学问题求解方法，这里涉及的内容涵盖理工科学生本科或研究生期间所接触到的几乎所有数学分支，而深度与广度远远超过相关数学课程的内容。对于非数学专业的读者来说，通过系统地学习本书的方法和思路，求解应用数学问题的能力会有质的提升。本书的另一个目标是作为实用数学问题求解手册供研究者参考。读者在实际研究工作中遇到数学问题的时候，完全可以套用本书的相关内容和语句直接求解，这无疑对读者会有巨大的帮助。

自本书第一版于 2004 年出版以来，作者在教学研究中又有了很多新的想法，同时得到了很多读者的反馈信息，为本书出版新版增添了新的素材。本书第二版在写作风格和格局上沿用第一版成功的套路，仍然根据系统求解数学问题的需要，组织 MATLAB 语言求解的材料，由浅入深地系统介绍数学问题的求解方法，侧重点仍然放在基于 MATLAB 的数学问题求解上。除了 MATLAB 语言版本上的更新外，本版进一步充实、完善了很多第一版的原有内容；另外添加了多重数值积分、差分方程递推求解、分形、线性矩阵不等式、多目标规划、动态规划、矩阵方程与矩阵微分方程求解、切换微分方程与随机微分方程求解、特殊函数、主成分分析、Monte Carlo 方法、径向基神经网络、粒子群优化等诸多新的主题，分数阶微积分学一节融入了作者许多新的研究成果，所以本版的内容更充实、更全面。

本书的英文版“Solving Applied Mathematical Problems with MATLAB”将由 CRC 出版社 2008 年出版，而本书第二版的内容略多于英文版的内容。本书配备的习题参考解答是配合英文版编写的，可以作为本书的习题参考。本书还配备了中、英文版的教学课件可供直接使用。

在本书新版写作过程中仍得到师长、朋友和学生的支持和建议，特别感谢东北大学徐心和教授、新加坡国立大学葛树志教授、首都师范大学赵春娜博士等。在写作过程中和同事潘峰博士、石海滨博士、陈大力博士、胡清河博士、庞哈利教授、张雪峰副教授、王斐博士等的有益讨论也为本版最终成型起了重大作用。另外，学生鄂大志、张玲敏、熊鲲、董雯彬、彭军、罗映等为本书的勘误、代码验证和辅助教学课件开发等起了重要作用，在此表示深深的感谢。

作者

2008 年 7 月

第一版前言

美国 The MathWorks 公司推出的 MATLAB 语言一直是国际科学界应用和影响最广泛的三大计算机数学语言之一。从某种意义上讲,在纯数学以外的领域中, MATLAB 语言有着其他两种计算机数学语言 Mathematica 和 Maple 无法比拟的优势和适用面。在很多领域, MATLAB 语言是科学研究者首选的计算机数学语言。目前关于 MATLAB 语言和应用的书籍在国际上数以千计,但从其覆盖面和应用水平来说,往往难以达到日益增长的 MATLAB 语言使用者的要求。国内外出版的著作从涵盖面及深度与广度上缺乏高层次、全面系统介绍高等应用数学问题各个分支的计算机求解的书籍^①。本书试图填补这个空白,在更高层次上系统介绍 MATLAB 语言在高等应用数学各个分支中的应用,包含的应用数学分支为微积分、线性代数、积分变换和复变函数、非线性方程与最优化、常微分方程与偏微分方程、数据插值与函数逼近、概率论与数理统计以及新的非传统方法,如模糊逻辑与模糊推理、神经网络、遗传算法、小波分析、粗糙集及分数阶微积分学等。本书不同于现有的类似于 MATLAB 手册的著作,不是 MATLAB 有什么内容就介绍什么内容,而是根据系统求解数学问题的需要,组织 MATLAB 语言求解的材料,由浅入深地介绍数学问题的求解方法。本书比作者所见识到的国内外任何一部基于 MATLAB 语言的应用数学著作都要全面、系统。

由于工作性质,作者接触过众多非数学专业的本科生、研究生、博士生,感觉大多数学生缺乏对应用数学问题的较全面了解,他们对什么问题能用数学描述、什么样的数学问题能求解不清楚,以致于在学习与研究中走了很多弯路。作者坚信,通过阅读本书可以使读者的数学能力,尤其是数学问题求解能力上一个很大的台阶。即使读者在阅读本书时对有些数学公式理解得不太透彻,只要学习本书的 MATLAB 求解方法,也能容易地求解类似的数学问题。本书的重要目标是让数学基础不深厚的读者同样能轻易地利用计算机解决较高深的应用数学问题。

本书是为东北大学自动化专业新课程“MATLAB 与数学运算”编写的教材;但内容完全脱离了自动化专业的背景,同样适用于其他理工科专业的本科生、研究生教学。本书的大部分内容在东北大学自动化专业本科生以及全校研究生选修课中讲授过,受到普遍欢迎。由于 MATLAB 语言在很多理工科专业的后续课程中有很大作用,建议有条件的学校也开设相应的课程,使学生能认识和掌握该语言,提高应用数学问题求解的水平。为此,本书配有全套的、适用于计算机辅助教学的 CAI 课件材料。

作者从 1988 年开始系统地使用 MATLAB 语言进行程序设计与科学研究,积累了丰富的第一手经验,也了解 MATLAB 语言的最新动态。作者用 MATLAB 语言编写的程序曾作为英国 Rapid Data 软件公司的商品在国际范围内发行,新近编写的几个通用程序在

^①由对 The MathWorks 图书网站列出的全部相关书目及目录的分析得出的结论。

The MathWorks 公司的网站上可以下载, 其中反馈系统分析与设计程序 CtrlLAB 长期高居控制类软件的榜首, 已经用于国际上很多高校的实际教学。

多年来, 作者一直在试图以最实用的方式将 MATLAB 语言介绍给国内的读者, 并在清华大学出版社出版了 4 部有关 MATLAB 语言及其应用方面的著作, 受到了国内外广大中文读者的普遍欢迎。其中, 1996 年出版的《控制系统计算机辅助设计——MATLAB 语言与应用》一书被公认为国内关于 MATLAB 语言方面书籍中出版最早、影响最广的著作, 被国内期刊文章引用近千次。

本书合作者陈阳泉博士现在美国 Utah 州立大学任教, 任自组织与先进智能控制中心执行负责人, IEEE 学会高级会员, 在先进智能控制、分数阶系统理论及设计、机器人导航与控制等领域均有很深的造诣和学术影响, 2002 年与本人合作在清华大学出版社出版的《基于 MATLAB/Simulink 的系统仿真技术与应用》在中文读者中有很影响, 并被广为引用。

本书主要介绍目前最新的 MATLAB 7.0 版, 即 MATLAB Release 14, 但相应的内容对 MATLAB 及相关工具箱的版本依赖程度不高, 所以这里介绍的算法函数绝大部分均可以在 MATLAB 6.x 甚至更早期版本下正常运行。同时, 考虑到在将来很长时间内两个版本可能并存, 所以在很多地方也将介绍 MATLAB 6.x 的解法。

本书从使用者的角度出发, 并结合作者十数年的实际编程经验和丰富的教学经验, 系统地介绍 MATLAB 语言的编程技术及其在科学运算中的应用, 书中融合了作者的许多编程思想和第一手材料, 内容精心剪裁, 相信仍然会受到读者的欢迎。

作者的一些同事、同行和朋友也先后给予作者许多建议和支持, 包括东北大学信息学院的徐心和教授、东北大学信息学院院长王福利教授、北京交通大学机电学院院长朱衡君教授等, 还有在互联网上交流的众多知名的和不知名的同行与朋友。本书部分内容由博士生张雪峰、潘峰编写, 部分辅助程序与模型由硕士生陈大力同学编写, 计算机辅助教学材料由硕士生刘莹莹同学开发, 在此表示深深的谢意。

本书的出版得到了清华大学出版社欧振旭编辑细心的加工, 得到清华大学出版社蔡鸿程主编的关怀, 本书的出版还得到了美国 The MathWorks 公司图书计划的支持, 在此表示谢意, 并特别感谢 Noami Fernandez 女士、Courtney Esposito 先生为作者提供的各种帮助, 感谢大连威尔思德科技发展有限公司王龙飞先生为教学网站 MATLAB 大观园提供的各种帮助。

由于作者水平所限, 书中的缺点和错误在所难免, 欢迎读者批评指教。

谨以此书献给我的妻子杨军和女儿薛杨。在编写本书时花费了大量本该陪伴她们的业余时间, 没有她们一如既往的鼓励、支持和理解, 本书不可能顺利完成。

薛定宇

2004 年 7 月 6 日于沈阳东北大学

目 录

第 1 章 计算机数学语言概述	1
1.1 数学问题计算机求解概述	1
1.1.1 为什么要学习计算机数学语言	1
1.1.2 数学问题的解析解与数值解	4
1.1.3 数学运算问题软件包发展概述	4
1.1.4 常规计算机语言的局限性	6
1.2 计算机数学语言简介	7
1.2.1 计算机数学语言的出现	7
1.2.2 三种有代表性的计算机数学语言	8
1.2.3 开放式免费科学运算语言简介	8
1.3 关于本书及相关内容	9
1.3.1 本书框架设计及内容安排	9
1.3.2 MATLAB 语言学习方法与资源	10
1.3.3 本课程与其他相关课程的关系	11
1.4 习 题	11
参考文献	12
第 2 章 MATLAB 语言程序设计基础	13
2.1 MATLAB 程序设计语言基础	14
2.1.1 MATLAB 语言的变量与常量	14
2.1.2 数据结构	14
2.1.3 MATLAB 的基本语句结构	16
2.1.4 冒号表达式与子矩阵提取	17
2.2 基本数学运算	18
2.2.1 矩阵的代数运算	18
2.2.2 矩阵的逻辑运算	19
2.2.3 矩阵的比较运算	20
2.2.4 解析结果的化简与变换	20
2.2.5 基本数论运算	22
2.3 MATLAB 语言的流程结构	23
2.3.1 循环结构	23
2.3.2 转移结构	24
2.3.3 开关结构	25

2.3.4	试探结构	26
2.4	函数编写与调试	27
2.4.1	MATLAB 语言函数的基本结构	27
2.4.2	可变输入输出个数的处理	30
2.4.3	inline 函数与匿名函数	30
2.5	二维图形绘制	31
2.5.1	二维图形绘制基本语句	31
2.5.2	其他二维图形绘制语句	34
2.5.3	隐函数绘制及应用	35
2.5.4	图形修饰	36
2.6	三维图形表示	38
2.6.1	三维曲线绘制	38
2.6.2	三维曲面绘制	39
2.6.3	三维图形视角设置	42
2.7	图像处理简介	44
2.8	习 题	44
	参考文献	46
第 3 章	微积分问题的计算机求解	47
3.1	极限问题的解析解	47
3.1.1	单变量函数的极限	48
3.1.2	多变量函数的极限	49
3.2	函数导数的解析解	49
3.2.1	函数的导数和高阶导数	49
3.2.2	多元函数的偏导数	51
3.2.3	多元函数的 Jacobian 矩阵	52
3.2.4	Hessian 偏导数矩阵	53
3.2.5	隐函数的偏导数	53
3.2.6	参数方程的导数	54
3.3	积分问题的解析解	54
3.3.1	不定积分的推导	55
3.3.2	定积分与无穷积分计算	56
3.3.3	多重积分问题的 MATLAB 求解	56
3.4	函数的级数展开与级数求和问题求解	57
3.4.1	Taylor 幂级数展开	57
3.4.2	Fourier 级数展开	61
3.4.3	级数求和的计算	63
3.4.4	序列求积问题	64
3.5	曲线积分与曲面积分的计算	65

3.5.1	曲线积分及 MATLAB 求解	65
3.5.2	曲面积分与 MATLAB 语言求解	67
3.6	数值微分问题	69
3.6.1	数值微分算法	69
3.6.2	中心差分方法及其 MATLAB 实现	70
3.6.3	二元函数的梯度计算	71
3.7	数值积分问题	73
3.7.1	由给定数据进行梯形求积	73
3.7.2	单变量数值积分问题求解	75
3.7.3	广义数值积分问题求解	78
3.7.4	双重积分问题的数值解	79
3.7.5	三重定积分的数值求解	80
3.7.6	多重积分数值求解	80
3.8	习 题	81
	参考文献	84
第 4 章	线性代数问题的计算机求解	85
4.1	特殊矩阵的输入	86
4.1.1	数值矩阵的输入	86
4.1.2	符号矩阵的输入	90
4.2	矩阵基本分析	91
4.2.1	矩阵基本概念与性质	91
4.2.2	逆矩阵与广义逆矩阵	97
4.2.3	矩阵的特征值问题	100
4.3	矩阵的基本变换与分解	103
4.3.1	矩阵的相似变换与正交矩阵	103
4.3.2	矩阵的三角分解和 Cholesky 分解	104
4.3.3	矩阵的伴随变换、对角变换和 Jordan 变换	107
4.3.4	矩阵的奇异值分解	111
4.4	矩阵方程的计算机求解	113
4.4.1	线性方程组的计算机求解	113
4.4.2	Lyapunov 方程的计算机求解	115
4.4.3	Sylvester 方程的计算机求解	118
4.4.4	Riccati 方程的计算机求解	120
4.5	非线性运算与矩阵函数求值	120
4.5.1	面向矩阵元素的非线性运算	120
4.5.2	矩阵函数求值	121
4.6	习 题	127
	参考文献	130

第 5 章 积分变换与复变函数问题的计算机求解	131
5.1 Laplace 变换及其反变换	131
5.1.1 Laplace 变换及反变换的定义与性质	131
5.1.2 Laplace 变换的计算机求解	132
5.2 Fourier 变换及其反变换	135
5.2.1 Fourier 变换及反变换定义与性质	135
5.2.2 Fourier 变换的计算机求解	136
5.2.3 Fourier 正弦和余弦变换	137
5.2.4 离散 Fourier 正弦、余弦变换	139
5.3 其他积分变换问题及求解	140
5.3.1 Mellin 变换	140
5.3.2 Hankel 变换及求解	142
5.4 Z 变换及其反变换	142
5.4.1 Z 变换及反变换定义与性质	143
5.4.2 Z 变换的计算机求解	143
5.5 复变函数问题的计算机求解	144
5.5.1 复数矩阵及其变换	144
5.5.2 复变函数映射及其微积分运算	145
5.5.3 留数的概念与计算	145
5.5.4 有理函数的部分分式展开	147
5.5.5 基于部分分式展开的 Laplace 变换	150
5.5.6 封闭曲线积分问题计算	151
5.6 差分方程迭代求解与复平面映射分形	153
5.6.1 差分方程求解	153
5.6.2 复平面映射分形迭代与图形绘制	155
5.7 习 题	161
参考文献	164
第 6 章 代数方程与最优化问题的计算机求解	165
6.1 代数方程的求解	165
6.1.1 代数方程的图解法	165
6.1.2 多项式型方程的准解析解法	167
6.1.3 一般非线性方程数值解	170
6.1.4 非线性矩阵方程求解	172
6.2 无约束最优化问题求解	174
6.2.1 解析解法和图解法	174
6.2.2 基于 MATLAB 的数值解法	175
6.2.3 全局最优解与局部最优解	176
6.2.4 利用梯度求解最优化问题	177

6.2.5	带有变量边界约束的最优化问题求解	179
6.3	有约束最优化问题的计算机求解	179
6.3.1	约束条件与可行解区域	180
6.3.2	线性规划问题的计算机求解	181
6.3.3	二次型规划的求解	183
6.3.4	一般非线性规划问题的求解	184
6.4	混合整数规划问题的计算机求解	186
6.4.1	整数线性规划问题的求解	186
6.4.2	一般非线性整数规划问题与求解	188
6.4.3	0-1 规划问题求解	189
6.5	线性矩阵不等式问题求解	190
6.5.1	线性矩阵不等式的一般描述	191
6.5.2	Lyapunov 不等式	191
6.5.3	线性矩阵不等式问题分类	193
6.5.4	线性矩阵不等式问题的 MATLAB 求解	194
6.5.5	基于 YALMIP 工具箱的最优化求解方法	195
6.6	多目标优化问题求解	197
6.6.1	多目标优化模型	197
6.6.2	无约束多目标函数的最小二乘求解	198
6.6.3	多目标问题转换为单目标问题求解	199
6.6.4	多目标优化问题的 Pareto 解集	201
6.6.5	极小极大问题求解	203
6.6.6	目标规划问题求解	204
6.7	动态规划及其在路径规划中的应用	205
6.7.1	图的矩阵表示方法	205
6.7.2	有向图的路径寻优	206
6.7.3	无向图的路径最优搜索	209
6.7.4	绝对坐标节点的最优路径规划算法与应用	209
6.8	习 题	210
	参考文献	214
第 7 章	微分方程问题的计算机求解	215
7.1	常系数线性微分方程的解析解方法	215
7.1.1	线性常系数微分方程解析解的数学描述	215
7.1.2	微分方程的解析解方法	216
7.1.3	Laplace 变换在线性微分方程求解中的应用	218
7.1.4	线性状态空间方程的解析解	219
7.1.5	特殊非线性微分方程的解析解	220
7.2	微分方程问题的数值解法	221

7.2.1	微分方程问题算法概述	221
7.2.2	四阶定步长 Runge-Kutta 算法及 MATLAB 实现	222
7.2.3	一阶微分方程组的数值解	224
7.2.4	微分方程数值解的验证	228
7.3	微分方程转换	228
7.3.1	单个高阶常微分方程处理方法	228
7.3.2	高阶常微分方程组的变换方法	230
7.3.3	矩阵微分方程的变换与求解方法	234
7.4	特殊微分方程的数值解	236
7.4.1	刚性微分方程的求解	236
7.4.2	隐式微分方程求解	239
7.4.3	微分代数方程的求解	242
7.4.4	延迟微分方程求解	244
7.4.5	切换微分方程的求解	245
7.4.6	随机线性微分方程的求解	246
7.5	边值问题的计算机求解	249
7.5.1	线性方程边值问题的打靶算法	250
7.5.2	非线性方程边值问题的打靶算法	252
7.5.3	一般边值微分方程的求解方法	253
7.6	偏微分方程求解入门	255
7.6.1	偏微分方程组求解	255
7.6.2	二阶偏微分方程的数学描述	257
7.6.3	偏微分方程的求解界面应用举例	259
7.7	微分方程的框图求解	265
7.7.1	Simulink 简介	265
7.7.2	Simulink 相关模块	265
7.7.3	微分方程的 Simulink 建模与求解	267
7.8	习 题	271
	参考文献	274
第 8 章	数据插值、函数逼近问题的计算机求解	275
8.1	插值与数据拟合	275
8.1.1	一维数据的插值问题	275
8.1.2	已知样本点的定积分计算	278
8.1.3	二维网格数据的插值问题	279
8.1.4	二维一般分布数据的插值问题	281
8.1.5	高维插值问题	284
8.1.6	基于样本数据点的离散最优化求解	285
8.2	样条插值与数值微积分问题求解	285

8.2.1	样条插值的 MATLAB 表示	286
8.2.2	基于样条插值的数值微积分运算	289
8.3	由已知数据拟合数学模型	291
8.3.1	多项式拟合	291
8.3.2	给定函数的连分式展开及基于连分式的有理近似	293
8.3.3	有理式拟合 — Padé 近似	296
8.3.4	函数线性组合的曲线拟合方法	298
8.3.5	最小二乘曲线拟合	300
8.4	特殊函数及曲线绘制	302
8.5	信号分析与数字信号处理基础	306
8.5.1	信号的相关分析	306
8.5.2	快速 Fourier 变换	307
8.5.3	滤波技术与滤波器设计	309
8.6	习 题	312
	参考文献	314
第 9 章	概率论与数理统计问题的计算机求解	315
9.1	概率分布与伪随机数生成	315
9.1.1	概率密度函数与分布函数概述	315
9.1.2	常见分布的概率密度函数与分布函数	316
9.1.3	概率问题的求解	323
9.1.4	随机数与伪随机数	323
9.2	统计量分析	324
9.2.1	随机变量的均值与方差	324
9.2.2	随机变量的矩	326
9.2.3	多变量随机数的协方差分析	327
9.2.4	多变量正态分布的联合概率密度即分布函数	327
9.2.5	基于 Monte Carlo 法的数学问题求解	329
9.3	数理统计分析方法及计算机实现	330
9.3.1	参数估计与区间估计	330
9.3.2	多元线性回归与区间估计	332
9.3.3	非线性函数的最小二乘参数估计与区间估计	333
9.4	统计假设检验	336
9.4.1	统计假设检验的概念及步骤	336
9.4.2	假设检验问题求解	337
9.5	方差分析与主成分分析	339
9.5.1	方差分析	340
9.5.2	主成分分析	343
9.6	习 题	345

参考文献	349
第 10 章 数学问题的非传统解法	351
10.1 集合论、模糊集与模糊推理	351
10.1.1 经典可枚举集合论问题及 MATLAB 求解	351
10.1.2 模糊集合与隶属度函数	353
10.1.3 模糊推理系统及其 MATLAB 求解	358
10.2 粗糙集理论与应用	361
10.2.1 粗糙集理论简介	361
10.2.2 粗糙集的基本概念	362
10.2.3 信息决策系统	362
10.2.4 粗糙集数据处理问题的 MATLAB 求解	365
10.2.5 粗糙集约简的 MATLAB 程序界面	367
10.3 人工神经网络及其在数据拟合中的应用	367
10.3.1 神经网络基础知识	368
10.3.2 径向基网络结构与应用	376
10.3.3 神经网络界面	378
10.4 进化算法及其在最优化问题中的应用	381
10.4.1 遗传算法的基本概念及 MATLAB 实现	381
10.4.2 遗传算法在求解最优化问题中的应用举例	382
10.4.3 遗传算法在有约束最优化问题中的应用	388
10.4.4 粒子群优化算法与求解	390
10.4.5 求取精确的全局最优解	391
10.5 小波变换及其在数据处理中的应用	392
10.5.1 小波变换及基小波波形	393
10.5.2 小波变换技术在信号处理中的应用	397
10.5.3 小波问题的程序界面	400
10.6 分数阶微积分学问题求解及应用	400
10.6.1 分数阶微积分的定义与性质	401
10.6.2 分数阶微积分的计算方法	403
10.6.3 对象编程实例 —— 分数阶传递函数模型	412
10.6.4 分数阶微分方程的求解方法	416
10.6.5 分数阶系统的模型降阶研究	424
10.7 习 题	427
参考文献	429
MATLAB 函数名索引	431
术语索引	437

第1章 计算机数学语言概述

1.1 数学问题计算机求解概述

数学问题是科学研究中经常需要解决的问题。研究者通常将自己研究的问题用数学建模的方法建立起数学模型,然后通过求解数学模型获得所研究问题的解。建立数学模型需要所研究问题的领域知识,而有了数学模型则可以采用本书介绍的通用数值方法或解析方法去求解。本章将首先对计算机数学语言给出简单介绍,通过实例介绍为什么需要学习计算机数学语言,然后介绍计算机数学语言和数学工具发展简况。本章最后将介绍本书的框架,列出涉及到的数学分支并进行概述。

1.1.1 为什么要学习计算机数学语言

求解数学问题时手工推导当然是有用的,但并不是所有的问题都是能手工推导的,故需要由计算机来完成相应的任务。用计算机的方式也有两种,其一是用成型的数值分析算法、数值软件包与手工编程的方法相结合的求解方法,其二是采用国际上有影响的专门计算机语言来求解问题,这类语言包括 MATLAB、Mathematica、Maple 等,本书统一称之为计算机数学语言。顾名思义,用数值方法只能求解数值计算的问题,至于像公式推导等数学问题,例如求解 $x^3 + ax + c = d$ 方程的解,在 a, c, d 不是给定数值时,数值分析的方式是没有用的,必须使用计算机数学语言来求解。

本书将涉及的问题求解方法称为“数学运算”,以区别于传统意义下的“数学计算”,因为后者往往对应于数学问题的数值求解方法。本书将介绍的内容还尽可能地包括解析求解方法。

在系统介绍本书的内容之前,先介绍几个例子,读者可以思考其中提出的问题,从中体会学习本书的必要性。

例 1-1 大学的高等数学课程学习了微分与积分的概念和数学推导方法,但实际应用中可能遇到高阶导数的问题。已知 $f(x) = \sin x / (x^2 + 4x + 3)$ 这样的简单函数,如何求解出 $d^4 f(x) / dx^4$? 当然,用手工推导是可行的,由高等数学的知识先得出 $df(t) / dx$,对结果求导得出二阶导数,对结果再求导得出三阶导数,对其再求导一步就能求出所需的 $d^4 f(x) / dx^4$,重复此方法还能求出更高阶的导数。这个过程比较机械,适合计算机实现,所以用现有的计算机数学语言可以由一条语句得出结果为

$$\begin{aligned} \frac{d^4 f(t)}{dt^4} = & \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 3} + 4 \frac{\cos x (2x + 4)}{(x^2 + 4x + 3)^2} - 12 \frac{\sin x (2x + 4)^2}{(x^2 + 4x + 3)^3} + 12 \frac{\sin x}{(x^2 + 4x + 3)^2} - 24 \frac{\cos x (2x + 4)^3}{(x^2 + 4x + 3)^4} \\ & + 48 \frac{\cos x (2x + 4)}{(x^2 + 4x + 3)^3} + 24 \frac{\sin x (2x + 4)^4}{(x^2 + 4x + 3)^5} - 72 \frac{\sin x (2x + 4)^2}{(x^2 + 4x + 3)^4} + 24 \frac{\sin x}{(x^2 + 4x + 3)^3} \end{aligned}$$

当然,经过计算机化简,还可以得出更简的形式为

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = 8(x^5 + 10x^4 + 26x^3 - 4x^2 - 99x - 102) \frac{\cos x}{(x^2 + 4x + 3)^4} + (x^8 + 16x^7 + 72x^6 - 32x^5 - 1094x^4 - 3120x^3 - 3120x^2 + 192x + 1581) \frac{\sin x}{(x^2 + 4x + 3)^5}$$

显然,若依赖手工推导,得出这样的结果需要很繁杂、细致的工作,稍有不慎就可能得出错误的结果。因此,手工推导得出结果的可信度有时是值得怀疑的。如果能采用计算机代替手工推导则会既省力,又增加可信度,故需要计算机数学语言来解决这样的问题。实践表明,利用著名的 MATLAB 语言,在 1 秒内^①就可以精确地求出 $d^{100} f(x)/dx^{100}$ 。

例 1-2 在许多学科的实际应用中经常需要求出多项式方程的根。著名的 Abel-Ruffini 定理已经有了定论,5 次或以上的多项式方程没有通用的解析解求解方法,但在实际应用中经常需要求解高次代数方程的根,故可以采用数值方法求解,如使用林士谔-Bairstrow 算法,这是数值分析中最常见的方法。考虑下面的多项式方程

$$s^6 + 9s^5 + \frac{135}{4}s^4 + \frac{135}{2}s^3 + \frac{1215}{16}s^2 + \frac{729}{16}s + \frac{729}{64} = 0$$

用林士谔-Bairstrow 算法得出的结果是

$$s_{1,2} = -1.5056 \pm j0.0032, s_{3,4} = -1.5000 \pm j0.0065, s_{5,6} = -1.4944 \pm j0.0032$$

将 s_1 代入原始方程,则能容易计算出方程左侧为 $-8.7041 \times 10^{-14} - j1.8353 \times 10^{-15}$ 。虽然误差不大,毕竟对这类问题来说,数值方法可能导致错误的结论。采用计算机数学语言能得出更精确的结果,即所有的根均为 -1.5 。

例 1-3 线性代数课程中介绍了求解矩阵行列式的方法,例如用代数余子式的方法可以将一个 n 阶矩阵的行列式问题化简成 n 个 $n-1$ 阶行列式问题,而 $n-1$ 阶的又可以化简为 $n-2$ 阶的问题,这样用递归的方法可以最终化简成一阶矩阵的行列式求解问题,而该问题是有解析解的,就是该一阶矩阵本身,所以数学家可以得出结论,任意阶矩阵的行列式都可以直接求解出解析解。

事实上,这样的结论忽略了复杂度或可行性问题,这样的算法计算量很大,高达 $(n-1)(n+1)! + n$,例如 $n=20$ 时,运算次数为 9.7073×10^{20} ,相当于在每秒百亿次的巨型机(中国最快的银河-III 计算机)上 3000 年的计算量,所以虽然用代数余子式的方法可以求解,但求解是不现实的。其实在某些领域中甚至需要求解成百上千阶的问题,所以用代数余子式的方法是不可行的。

数值分析中提供了求解行列式问题的各种算法,但传统的方法对某些矩阵有时会得出错误的结果,特别是接近奇异的矩阵。考虑 Hilbert 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{bmatrix} \quad (1-1-1)$$

并假设 $n=20$,用传统的数值分析很容易得出 $\det(H) = 0$ 的错误结论。事实上,用计算机数学语言 MATLAB 很容易在 0.4 秒内得出该行列式的精确解为

^①本书中涉及的求解时间均指作者使用的迅驰-II 2.0/2GB 的笔记本计算机上测出的,且 CPU 的不同运行状态下测出的时间也有差异。

