Advanced Applied Mathematical Problem Solutions with MATLAB® (second edition)

高等应用数学问题的 MATLAB® 求解

（第二版）

薛定宇　陈阳泉　著

Dingyü Xue and Yangquan Chen

清华大学出版社

029
3=2

Advanced Applied Mathematical Problem Solutions with MATLAB® (second edition)

高等应用数学问题的 MATLAB® 求解

（第二版）

薛定宇　陈阳泉　著

Dingyü Xue and Yangquan Chen

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书首先介绍了 MATLAB 语言程序设计的基本内容，在此基础上系统介绍了各个应用数学领域的问题求解，如基于 MATLAB 的微积分问题、线性代数问题的计算机求解、积分变换和复变函数问题、非线性方程与最优化问题、常微分方程与偏微分方程问题、数据插值与函数逼近问题、概率论与数理统计问题的解析解和数值解法等，还介绍了较新的非传统方法，如模糊逻辑与模糊推理、神经网络、遗传算法、小波分析、粗糙集及分数阶微积分学等领域。

本书可作为高等学校理工科各专业本科生和研究生学习计算机数学语言的教材和参考书，也可供科技工作者、教师学习和应用 MATLAB 语言解决实际数学问题时参考，还可作为读者查询某数学问题求解方法的手册。

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学问题的 MATLAB 求解/薛定宇，陈阳泉著. —2 版. —北京：清华大学出版社，2008.10

ISBN 978-7-302-18618-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①薛…②陈…　Ⅲ. 应用数学–计算机辅助计算–软件包，MATLAB–高等学校–教材　Ⅳ. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 145761 号

责任编辑：王一玲
责任校对：李建庄
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　**地　址：**北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编：**100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购：**010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　**印　张：**28.5　**字　数：**657 千字
版　次：2008 年 10 月第 2 版　**印　次：**2010 年 6 月第 4 次印刷
印　数：7501～10500
定　价：45.00 元

产品编号：029629-01

第二版前言

数学问题是科学研究中经常需要解决的问题。研究者通常将自己研究的问题用数学建模的方法建立起数学模型，然后通过求解数学模型的方法获得所研究问题的解。

本书有两个目标，其一是系统地介绍基于 MATLAB 语言的应用数学问题求解方法，这里涉及的内容涵盖理工科学生本科或研究生期间所接触到的几乎所有数学分支，而深度与广度远远超过相关数学课程的内容。对于非数学专业的读者来说，通过系统地学习本书的方法和思路，求解应用数学问题的能力会有质的提升。本书的另一个目标是作为实用数学问题求解手册供研究者参考。读者在实际研究工作中遇到数学问题的时候，完全可以套用本书的相关内容和语句直接求解，这无疑对读者会有巨大的帮助。

自本书第一版于 2004 年出版以来，作者在教学研究中又有了很多新的想法，同时得到了很多读者的反馈信息，为本书出版新版增添了新的素材。本书第二版在写作风格和格局上沿用第一版成功的套路，仍然根据系统求解数学问题的需要，组织 MATLAB 语言求解的材料，由浅入深地系统介绍数学问题的求解方法，侧重点仍然放在基于 MATLAB 的数学问题求解上。除了 MATLAB 语言版本上的更新外，本版进一步充实、完善了很多第一版的原有内容；另外添加了多重数值积分、差分方程递推求解、分形、线性矩阵不等式、多目标规划、动态规划、矩阵方程与矩阵微分方程求解、切换微分方程与随机微分方程求解、特殊函数、主成分分析、Monte Carlo 方法、径向基神经网络、粒子群优化等诸多新的主题，分数阶微积分学一节融入了作者许多新的研究成果，所以本版的内容更充实、更全面。

本书的英文版 “Solving Applied Mathematical Problems with MATLAB” 将由 CRC 出版社 2008 年出版，而本书第二版的内容略多于英文版的内容。本书配备的习题参考解答是配合英文版编写的，可以作为本书的习题参考。本书还配备了中、英文版的教学课件可供直接使用。

在本书新版写作过程中仍得到师长、朋友和学生的支持和建议，特别感谢东北大学徐心和教授、新加坡国立大学葛树志教授、首都师范大学赵春娜博士等。在写作过程中和同事潘峰博士、石海滨博士、陈大力博士、胡清河博士、庞哈利教授、张雪峰副教授、王斐博士等的有益讨论也为本版最终成型起了重大作用。另外，学生鄂大志、张玲敏、熊鲲、董雯彬、彭军、罗映等为本书的勘误、代码验证和辅助教学课件开发等起了重要作用，在此表示深深的感谢。

作者

2008 年 7 月

第一版前言

美国 The MathWorks 公司推出的 MATLAB 语言一直是国际科学界应用和影响最广泛的三大计算机数学语言之一。从某种意义上讲，在纯数学以外的领域中，MATLAB 语言有着其他两种计算机数学语言 Mathematica 和 Maple 无法比拟的优势和适用面。在很多领域，MATLAB 语言是科学研究者首选的计算机数学语言。目前关于 MATLAB 语言和应用的书籍在国际上数以千计，但从其覆盖面和应用水平来说，往往难以达到日益增长的 MATLAB 语言使用者的要求。国内外出版的著作从涵盖面及深度与广度上缺乏高层次、全面系统介绍高等应用数学问题各个分支的计算机求解的书籍[1]。本书试图填补这个空白，在更高层次上系统介绍 MATLAB 语言在高等应用数学各个分支中的应用，包含的应用数学分支为微积分、线性代数、积分变换和复变函数、非线性方程与最优化、常微分方程与偏微分方程、数据插值与函数逼近、概率论与数理统计以及新的非传统方法，如模糊逻辑与模糊推理、神经网络、遗传算法、小波分析、粗糙集及分数阶微积分学等。本书不同于现有的类似于 MATLAB 手册的著作，不是 MATLAB 有什么内容就介绍什么内容，而是根据系统求解数学问题的需要，组织 MATLAB 语言求解的材料，由浅入深地介绍数学问题的求解方法。本书比作者所见识到的国内外任何一部基于 MATLAB 语言的应用数学著作都要全面、系统。

由于工作性质，作者接触过众多非数学专业的本科生、研究生、博士生，感觉大多数学生缺乏对应用数学问题的较全面了解，他们对什么问题能用数学描述、什么样的数学问题能求解不清楚，以致于在学习与研究中走了很多弯路。作者坚信，通过阅读本书可以使读者的数学能力，尤其是数学问题求解能力上一个很大的台阶。即使读者在阅读本书时对有些数学公式理解得不太透彻，只要学习本书的 MATLAB 求解方法，也能容易地求解类似的数学问题。本书的重要目标是让数学基础不深厚的读者同样能轻易地利用计算机解决较高深的应用数学问题。

本书是为东北大学自动化专业新课程“MATLAB 与数学运算”编写的教材，但内容完全脱离了自动化专业的背景，同样适用于其他理工科专业的本科生、研究生教学。本书的大部分内容在东北大学自动化专业本科生以及全校研究生选修课中讲授过，受到普遍欢迎。由于 MATLAB 语言在很多理工科专业的后续课程中有很大作用，建议有条件的学校也开设相应的课程，使学生能认识和掌握该语言，提高应用数学问题求解的水平。为此，本书配有全套的、适用于计算机辅助教学的 CAI 课件材料。

作者从 1988 年开始系统地使用 MATLAB 语言进行程序设计与科学研究，积累了丰富的第一手经验，也了解 MATLAB 语言的最新动态。作者用 MATLAB 语言编写的程序曾作为英国 Rapid Data 软件公司的商品在国际范围内发行，新近编写的几个通用程序在

[1] 由对 The MathWorks 图书网站列出的全部相关书目及目录的分析得出的结论。

The MathWorks 公司的网站上可以下载，其中反馈系统分析与设计程序 CtrlLAB 长期高居控制类软件的榜首，已经用于国际上很多高校的实际教学。

多年来，作者一直在试图以最实用的方式将 MATLAB 语言介绍给国内的读者，并在清华大学出版社出版了 4 部有关 MATLAB 语言及其应用方面的著作，受到了国内外广大中文读者的普遍欢迎。其中，1996 年出版的《控制系统计算机辅助设计 —— MATLAB 语言与应用》一书被公认为国内关于 MATLAB 语言方面书籍中出版最早、影响最广的著作，被国内期刊文章引用近千次。

本书合作者陈阳泉博士现在美国 Utah 州立大学任教，任自组织与先进智能控制中心执行负责人，IEEE 学会高级会员，在先进智能控制、分数阶系统理论及设计、机器人导航与控制等领域均有很深的造诣和学术影响，2002 年与本人合作在清华大学出版社出版的《基于 MATLAB/Simulink 的系统仿真技术与应用》在中文读者中有很大影响，并被广为引用。

本书主要介绍目前最新的 MATLAB 7.0 版，即 MATLAB Release 14，但相应的内容对 MATLAB 及相关工具箱的版本依赖程度不高，所以这里介绍的算法函数绝大部分均可以在 MATLAB 6.x 甚至更早期版本下正常运行。同时，考虑到在将来很长一段时间内两个版本可能并存，所以在很多地方也将介绍 MATLAB 6.x 的解法。

本书从使用者的角度出发，并结合作者十数年的实际编程经验和丰富的教学经验，系统地介绍 MATLAB 语言的编程技术及其在科学运算中的应用，书中融合了作者的许多编程思想和第一手材料，内容精心剪裁，相信仍然会受到读者的欢迎。

作者的一些同事、同行和朋友也先后给予作者许多建议和支持，包括东北大学信息学院的徐心和教授、东北大学信息学院院长王福利教授、北京交通大学机电学院院长朱衡君教授等，还有在互联网上交流的众多知名的和不知名的同行与朋友。本书部分内容由博士生张雪峰、潘峰编写，部分辅助程序与模型由硕士生陈大力同学编写，计算机辅助教学材料由硕士生刘莹莹同学开发，在此表示深深的谢意。

本书的出版得到了清华大学出版社欧振旭编辑细心的加工，得到清华大学出版社蔡鸿程主编的关怀，本书的出版还得到了美国 The MathWorks 公司图书计划的支持，在此表示谢意，并特别感谢 Noami Fernandez 女士、Courtney Esposito 先生为作者提供的各种帮助，感谢大连威尔思德科技发展有限公司王龙飞先生为教学网站 MATLAB 大观园提供的各种帮助。

由于作者水平所限，书中的缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指教。

谨以此书献给我的妻子杨军和女儿薛杨。在编写本书时花费了大量本该陪伴她们的业余时间，没有她们一如既往的鼓励、支持和理解，本书不可能顺利完成。

薛定宇

2004 年 7 月 6 日于沈阳东北大学

目　录

第 1 章 计算机数学语言概述

1.1 数学问题计算机求解概述

数学问题是科学研究中经常需要解决的问题。研究者通常将自己研究的问题用数学建模的方法建立起数学模型，然后通过求解数学模型获得所研究问题的解。建立数学模型需要所研究问题的领域知识，而有了数学模型则可以采用本书介绍的通用数值方法或解析方法去求解。本章将首先对计算机数学语言给出简单介绍，通过实例介绍为什么需要学习计算机数学语言，然后介绍计算机数学语言和数学工具发展简况。本章最后将介绍本书的框架，列出涉及到的数学分支并进行概述。

1.1.1 为什么要学习计算机数学语言

求解数学问题时手工推导当然是有用的，但并不是所有的问题都是能手工推导的，故需要由计算机来完成相应的任务。用计算机的方式也有两种，其一是用成型的数值分析算法、数值软件包与手工编程的方法相结合的求解方法，其二是采用国际上有影响的专门计算机语言来求解问题，这类语言包括 MATLAB、Mathematica、Maple 等，本书统一称之为**计算机数学语言**。顾名思义，用数值方法只能求解数值计算的问题，至于像公式推导等数学问题，例如求解 $x^3+ax+c=d$ 方程的解，在 a,c,d 不是给定数值时，数值分析的方式是没有用的，必须使用计算机数学语言来求解。

本书将涉及的问题求解方法称为“数学运算”，以区别于传统意义下的“数学计算”，因为后者往往对应于数学问题的数值求解方法。本书将介绍的内容还尽可能地包括解析求解方法。

在系统介绍本书的内容之前，先介绍几个例子，读者可以思考其中提出的问题，从中体会学习本书的必要性。

例 1-1 大学的高等数学课程学习了微分与积分的概念和数学推导方法，但实际应用中可能遇到高阶导数的问题。已知 $f(x)=\sin x/(x^2+4x+3)$ 这样的简单函数，如何求解出 $\mathrm{d}^4 f(x)/\mathrm{d}x^4$？当然，用手工推导是可行的，由高等数学的知识先得出 $\mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}x$，对结果求导得出二阶导数，对结果再求导得出三阶导数，对其再求导一步就能求出所需的 $\mathrm{d}^4 f(x)/\mathrm{d}x^4$，重复此方法还能求出更高阶的导数。这个过程比较机械，适合计算机实现，所以用现有的计算机数学语言可以由一条语句得出结果为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^4 f(t)}{\mathrm{d}t^4}=&\frac{\sin x}{x^2+4x+3}+4\frac{\cos x\,(2x+4)}{(x^2+4x+3)^2}-12\frac{\sin x\,(2x+4)^2}{(x^2+4x+3)^3}+12\frac{\sin x}{(x^2+4x+3)^2}-24\frac{\cos x\,(2x+4)^3}{(x^2+4x+3)^4}\\&+48\frac{\cos x\,(2x+4)}{(x^2+4x+3)^3}+24\frac{\sin x\,(2x+4)^4}{(x^2+4x+3)^5}-72\frac{\sin x\,(2x+4)^2}{(x^2+4x+3)^4}+24\frac{\sin x}{(x^2+4x+3)^3}\end{aligned}$$

当然，经过计算机化简，还可以得出更简的形式为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^4f(x)}{\mathrm{d}x^4}&=8(x^5+10x^4+26x^3-4x^2-99x-102)\frac{\cos x}{(x^2+4x+3)^4}+\\&(x^8+16x^7+72x^6-32x^5-1094x^4-3120x^3-3120x^2+192x+1581)\frac{\sin x}{(x^2+4x+3)^5}\end{aligned}$$

显然，若依赖手工推导，得出这样的结果需要很繁杂、细致的工作，稍有不慎就可能得出错误的结果。因此，手工推导得出结果的可信度有时是值得怀疑的。如果能采用计算机代替手工推导则会既省力，又增加可信度，故需要计算机数学语言来解决这样的问题。实践表明，利用著名的 MATLAB 语言，在 1 秒内①就可以精确地求出 $\mathrm{d}^{100}f(x)/\mathrm{d}x^{100}$。

例 1-2 在许多学科的实际应用中经常需要求出多项式方程的根。著名的 Abel-Ruffini 定理已经有了定论，5 次或以上的多项式方程没有通用的解析解求解方法，但在实际应用中经常需要求解高次代数方程的根，故可以采用数值方法求解，如使用林士谔-Bairstrow 算法，这是数值分析中最常见的方法。考虑下面的多项式方程

$$s^6+9s^5+\frac{135}{4}s^4+\frac{135}{2}s^3+\frac{1215}{16}s^2+\frac{729}{16}s+\frac{729}{64}=0$$

用林士谔-Bairstrow 算法得出的结果是

$$s_{1,2}=-1.5056\pm \mathrm{j}0.0032,\quad s_{3,4}=-1.5000\pm \mathrm{j}0.0065,\quad s_{5,6}=-1.4944\pm \mathrm{j}0.0032$$

将 s_1 代入原始方程，则能容易计算出方程左侧为 $-8.7041\times10^{-14}-\mathrm{j}1.8353\times10^{-15}$。虽然误差不大，毕竟对这类问题来说，数值方法可能导致错误的结论。采用计算机数学语言能得出更精确的结果，即所有的根均为 -1.5。

例 1-3 线性代数课程中介绍了求解矩阵行列式的方法，例如用代数余子式的方法可以将一个 n 阶矩阵的行列式问题化简成 n 个 $n-1$ 阶行列式问题，而 $n-1$ 阶的又可以化简为 $n-2$ 阶的问题，这样用递归的方法可以最终化简成一阶矩阵的行列式求解问题，而该问题是有解析解的，就是该一阶矩阵本身，所以数学家可以得出结论，任意阶矩阵的行列式都可以直接求解出解析解。

事实上，这样的结论忽略了复杂度或可行性问题，这样的算法计算量很大，高达 $(n-1)(n+1)!+n$，例如 $n=20$ 时，运算次数为 9.7073×10^{20}，相当于在每秒百亿次的巨型机 (中国最快的银河-III 计算机) 上 3000 年的计算量，所以虽然用代数余子式的方法可以求解，但求解是不现实的。其实在某些领域中甚至需要求解成百上千阶的问题，所以用代数余子式的方法是不可行的。

数值分析中提供了求解行列式问题的各种算法，但传统的方法对某些矩阵有时会得出错误的结果，特别是接近奇异的矩阵。考虑 Hilbert 矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n\\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1)\end{bmatrix} \tag{1-1-1}$$

并假设 $n=20$，用传统的数值分析很容易得出 $\det(\boldsymbol{H})=0$ 的错误结论。事实上，用计算机数学语言 MATLAB 很容易在 0.4 秒内得出该行列式的精确解为

①本书中涉及的求解时间均指作者使用的迅驰-II 2.0/2GB 的笔记本计算机上测出的，且 CPU 的不同运行状态下测出的时间也有差异。

$$\det(\boldsymbol{H})=\frac{1}{\underbrace{2377454716\cdots3680000000000000000000000000000000000000}_{225\text{ 位，因排版限制省略了中间的数字}}}\approx4.206179\times10^{-224}$$

求解一般高阶矩阵求逆问题需要计算机数学语言，对特殊的矩阵问题更需要这样的语言，以免得出错误的结果。

例 1-4 考虑著名的非线性方程 —— Van der Pol 方程 $\ddot{y}+\mu(y^2-1)\dot{y}+y=0$，当 μ 很大时，例如 $\mu=1000$，传统的数值分析方法求解可能有问题，需要用专用的刚性方程求解算法进行求解，而不能利用数值分析类课程中介绍的 Runge-Kutta 算法求解。

如果一阶微分方程可以写成 $\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t=-0.1y(t)+0.2y(t-30)/[1+y^{10}(t-30)]$，这样的方程称为延迟微分方程，一般的数值分析教材和软件包中均不提供这种方程的数值解法，所以只能采用计算机数学语言，如 MATLAB 中的延迟微分方程求解函数 dde23() 或图形化建模仿真工具 Simulink 来求解这样的问题。在本书后面相应的内容中将介绍此方程的解法。

例 1-5 考虑最优化问题，假设线性规划问题的数学描述如下：

$$\min_{\boldsymbol{x}\ \text{s.t.}\left\{\begin{array}{l}2x_2+x_3+4x_4+2x_5\leqslant54\\3x_1+4x_2+5x_3-x_4-x_5\leqslant62\\x_1,x_2\geqslant0,x_3\geqslant3.32,x_4\geqslant0.678,x_5\geqslant2.57\end{array}\right.}(-2x_1-x_2-4x_3-3x_4-x_5)$$

因为上述问题是有约束问题，不能用高等数学中令目标函数导数为 0，得出若干方程再用求解方程的方式求解最优化问题，而必须用线性规划中介绍的算法来求解，得出 $x_1=19.7850$, $x_2=0$, $x_3=3.3200$, $x_4=11.3850$, $x_5=2.5700$。

这样的求解借助数值分析或最优化方法等课程介绍的数值算法可以容易地实现。但如果再添加约束，例如需要得出该最优化问题的整数解，原来的问题就变成了整数规划问题。很少有相关书籍、软件能直接求解这样的问题。而利用计算机数学语言可以求出该整数规划问题的解为 $x_1=19,x_2=0,x_3=4,x_4=10,x_5=5$。

例 1-6 许多课程要用到的高等应用数学分支，如积分变换、复变函数、偏微分方程、数据插值与拟合、概率论与数理统计、数值分析等，课程考试之后您还记得其中问题的求解方法吗?

例 1-7 现代科学技术在其发展过程中，催生了若干新的数学分支，如模糊集合与粗糙集合、人工神经网络等，如果不借助于现成的计算机工具，要想利用其中任何一个分支去解决实际问题都是个耗时并困难的任务。因为首先要了解相关领域的来龙去脉，弄清算法并将算法用计算机语言正确地实现。然而，利用这些新分支的数学工具解决某些特定的数学问题却是较容易的，因为可以借助前人已经开发好的工具和框架。

很多专门的课程，如电路、电子技术、电力电子技术、电机与拖动、自动控制原理等，在介绍原理与方法时一般采用简单的例子，回避高阶的或复杂的例子。究其原因，是当时缺少高水平计算机数学语言甚至是数值分析技术的支持，所以在这些课程中很多方法不一定适合于复杂的问题求解。在实际研究中遇到稍复杂一点的问题时，只靠手工推导的方法是得不出精确结果的，所以需要特殊的专业软件或语言来解决问题，而计算机数学语言，如 MATLAB 语言，通常可以较好地解决相关问题。

从上面的例子可以看出，解决数学问题用手工推导的方法虽然有时可行，但对很多