21 世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

概率论与数理统计

浙大四版

全程导学及习题全解

谢　婧　张红慧　孙燕囡　编　王进良　主审

◆知识归纳　梳理主线重点难点

◆习题详解　精确解答教材习题

◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社

China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

概率论与数理统计

浙大四版

全程导学及习题全解

谢 婧 张红慧 孙燕图 编 王进良 主审

◆知识归纳 梳理主线重点难点
◆习题详解 精确解答教材习题
◆提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计（浙大四版）全程导学及习题全解/谢婧，张红慧，孙燕囡编. —北京：中国时代经济出版社，2009.9
（21世纪高等院校经典教材同步辅导）
ISBN 978-7-80221-936-6

Ⅰ.概… Ⅱ.①谢… ②张… ③孙… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第131907号

概率论与数理统计（浙大四版）全程导学及习题全解

谢婧 张红慧 孙燕囡 编

出版者	中国时代经济出版社
地址	北京市西城区车公庄大街乙5号 鸿儒大厦B座
邮编	100044
电话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传真	(010)68320634
发行	各地新华书店
印刷	北京鑫海达印刷有限公司
开本	787×1092 1/16
版次	2009年9月第1版
印次	2010年2月第2次印刷
印张	23.875
字数	350千字
印数	5001～10000册
定价	25.00元
书号	ISBN 978-7-80221-936-6

内容简介

本书是按照高等院校教材《概率论与数理统计》（第四版 浙江大学 盛骤等编）而编写的学习辅导与习题全解参考书。全书按教材章节进行编写，每章分为本章知识要点、典型例题讲解（第十、十一章）和教材课后习题全解等部分。并对教材书后的补充习题给出了全面的解答过程。

本书可作为高等院校在校学生及自考生学习《概率论与数理统计》课程的辅导教材、复习参考书以及考研强化指导书，并可作为教师的教学参考用书。

前言

《概率论与数理统计》是一门专门研究和探索客观世界中随机现象的数学学科，并且在许多领域中都有着重要的应用。这门课程被列为高等院校工科、理科、经济管理等门类各专业学生必修的重要基础课程。为了帮助在校学生及考研同学扎实掌握概率论与数理统计的知识精髓，提高应试能力，我们根据国家教委审订的高等院校"概率论与数理统计"课程教学大纲的要求编写了此书。

本书按照被全国许多院校采用的浙江大学盛骤等主编的《概率论与数理统计》（第四版 高等教育出版社）的章节顺序，共分为十四章，包括：

本章知识要点

在本章知识要点部分，本书对教材中的相应内容进行了系统、全面的归纳和总结，有助于读者全面掌握基本知识，清晰把握各章知识的脉络。同时，这一部分也可以作为学习者日后复习备考的重要手册。

典型例题讲解

其中第十、十一章，由于教材中没有给出习题，为给读者得到更多练习的机会，特精选了本章所涉及的典型题型，同时给出详细解答过程，以帮助读者更好地进行自我巩固与提高。

习题全解

在教材习题同步解答部分，本书对原教材中的全部习题做出了详细解答。从读者的角度，给出了解题的每一个步骤，避免忽略掉一些看似简单但对读者理解解题思路起到关键作用的细节。部分习题还给出了多种解法及分析，揭示解题规律，使读者能全面地掌握解题要点。本书在最后还针对教材书后的补充习题给出了详细的解答过程，可供读者参考。

全书由谢婧、张红慧、孙燕囡编写，由王进良主审。本书编写过程中得到赵晖、詹维、杨蕤、任卉、钮键等同志的大力协助，并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持，为此表示忠心的感谢！

对《概率论与数理统计》（第四版）教材作者盛骤等老师，表示衷心感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有疏漏与不妥之处，恳请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2009 年 **8** 月

目　录

第一章　概率论的基本概念

本章知识要点讲解

一、随机试验和随机事件

1. 随机试验

概率论中所研究的随机试验通常用 E 表示，且具有下列三个特点：

(1) 在相同的条件下试验可以重复进行；

(2) 每次试验的结果具有多种可能性，而且所有可能结果是明确可知的；

(3) 在每次试验之前不能准确地预言该次试验将出现哪一种结果.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，常记为 S. S 中的元素即 E 的每一个结果称为样本点.

3. 随机事件

样本空间 S 的子集称为随机事件，简称事件. 通常用大写拉丁字母 A、B、C 等表示.

4. 基本事件

由一个样本点组成的单点集称为基本事件.

5. 必然事件

样本空间 S 是自身的子集，包含所有的样本点，即每次试验中一定发生的事件，故称为必然事件.

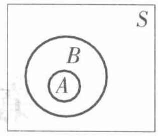
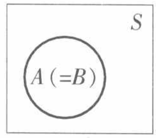
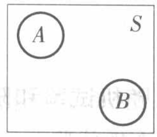
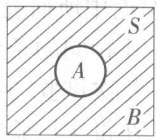
6. 不可能事件

空集 $\varnothing$ 也是样本空间 S 的子集，但不包含任何样本点，即每次试验中一定不发生的事件，故称为不可能事件.

二、事件间的关系及其运算

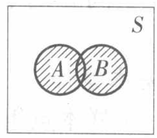
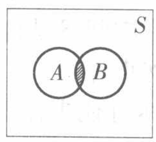
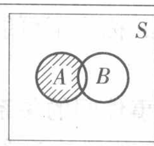
1. 事件间的关系共有四种，如表 1—1 所示.

表 1—1

关系	符号	概率论中的含义	文氏图
包含关系	$A \subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生.	
相等关系	$A = B$	事件 A 发生,则事件 B 一定发生,反之亦然.	
互斥关系(互不相容)	$A \cap B = \varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生.	
对立关系(互逆)	$A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = S$	事件 A、B 中必有一个发生,且仅有一个发生	

2. 事件间的运算共有三种,如表 1—2 所示.

表 1—2

关系	符号	概率论中的含义	文氏图
事件的和(并)	$A+B$ $(A \cup B)$	事件 A、B 中至少有一个发生	
事件的积(交)	AB $(A \cap B)$	事件 A、B 同时发生	
事件的差	$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	

3. 事件运算的性质

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(4)De · Morgan 对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$；

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$；　$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i$.

三、事件的概率及其性质

1. 概率的统计定义

在相同的条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率. 当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动. 且一般来说，n 越大，摆动幅度越小，则称常数 p 为事件 A 的概率.

2. 概率的古典定义

(1) 古典概型(等可能概型) 的特点：

① 试验的样本空间只包含有限个元素；

② 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

(2) 概率的古典定义：

设古典概型 E 的样本空间 S 由 n 个基本事件组成，而事件 $A(\subset S)$ 包含 k 个基本事件，则事件 A 的概率定义为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}.$$

3. 概率的公理化定义

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋于一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性：对任意事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(S) = 1$；

(3) 可列可加性：若 $A_iA_j = \varnothing (i \neq j; i,j = 1,2,\cdots)$，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

4. 概率的性质

(1) 对于不可能事件 $\varnothing$，$P(\varnothing) = 0$；对于任一事件 A，$P(A) \leqslant 1$.

(2) 有限可加性：若 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3) 减法公式：$P(B-A)=P(B)-P(AB)$，
特别地，若 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，从而有 $P(B)\geqslant P(A)$.

(4) 求逆公式：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(5) 加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

(6) 广义加法公式：$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$
$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$，

特别地，$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$.

四、条件概率

1. 条件概率

设 A,B 是任意两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

2. 乘法公式

设 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A),$$

一般地，若 $P(A_1A_2\cdots A_n)>0$，则有

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

3. 划分的定义

设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件. 若

(1) $B_iB_j=\varnothing,(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$，

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.

4. 全概率公式

设试验 E 的样本空间为 S，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对试验 E 的任意事件 A 有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

5. 贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，

则对试验E的任意不为零的事件A有

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A \mid B_j)},\ i=1,2,\cdots,n.$$

五、事件的独立性

1. 事件独立的定义

(1) 设A、B是两事件,如果满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件A与B相互独立.

(2) 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个事件,如果其中任意两个事件相互独立,即满足

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\quad(1\leqslant i<j\leqslant n)$$

则称事件$A_1,A_2\cdots,A_n$两两独立.

(3) 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个事件,如果其中任意$k(2\leqslant k\leqslant n)$个事件均满足

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})\ (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$$

则称事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立.

2. 独立事件的性质

(1) 若A与B相互独立,且$P(A)>0$,则$P(B \mid A)=P(B)$.反之亦然.

(2) 若A与B相互独立,则$\overline{A}$与B,A与$\overline{B}$,$\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立.

(3) 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立,则其中任意$k(2\leqslant k\leqslant n)$个事件也相互独立.

(4) 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i),$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i).$$

3. 独立试验概型

(1)n重伯努利(Bernoulli)试验:在每次试验中某事件A或者发生或者不发生,假设每次试验的结果与其它各次试验结果无关,即在每次试验中事件A出现的概率都是$p(0<p<1)$.这样一系列重复试验(比如n次),称为n重伯努利试验.

(2) 伯努利定理:设一次试验中事件A发生的概率为$p(0<p<1)$,则n重伯努利试验中,事件A恰好发生k次的概率$P_n(k)$为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

其中$q=1-p$.

习题全解

1. 写出下列随机试验的样本空间 S：

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数.

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上"正品",不合格的记上"次品",如连续查出 2 个次品就停止检查,或检查 4 个产品就停止检查,记录检查的结果.

(4) 在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

解 (1) 设 n 为小班的人数,依题意可知,该班在一次数学考试中的总成绩可能为 $0,1,\cdots,100n$. 故该班在一次数学考试中平均分数的所有可能结果,即样本空间为

$$S=\left\{\frac{i}{n}\mid i=0,1,\cdots,100n\right\}.$$

(2) 依题意可知,① 若生产 10 件产品均为正品,则记录的产品总件数为 10;② 若生产 10 件产品中有 1 件次品,需继续生产,且若第 11 件产品恰为正品,则记录的产品总件数为 11;依此类推可得,记录的产品总件数的所有可能结果,即样本空间为

$$S=\{10,11,\cdots\}.$$

(3) 依题意可令 0 表示查到次品,1 表示查到正品,则检查的所有可能结果,即样本空间为

$$S=\{00,100,0100,0101,0110,1100,1010,1011,0111,1101,1110,1111\}.$$

(4) 依题意可知,单位圆内的任意一点 (x,y) 与原点的距离都小于圆半径 1,故单位圆内任一点坐标的所有可能结果,即样本空间为

$$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}.$$

2. 设 A,B,C 为三事件,用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生,B 与 C 不发生.

(2) A 与 B 都发生,而 C 不发生.

(3) A,B,C 中至少有一个发生.

(4) A,B,C 都发生.

(5) A,B,C 都不发生.

(6) A,B,C 中不多于一个发生.

(7) A,B,C 中不多于两个发生.

(8) A,B,C 中至少有两个发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$.

(2) $AB\overline{C}$.

(3)$A \cup B \cup C$.

(4)ABC.

(5)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(6)A,B,C 中不多于一个发生，即是 A,B,C 中只有一个发生或 A,B,C 全不发生，故所求事件为

$$\begin{aligned}&\overline{A}\,\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\\ &= [\overline{A}\,\overline{B}C \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}] \cup [\overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}] \cup [A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}]\\ &= \overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{C} \cup \overline{B}\,\overline{C}.\end{aligned}$$

(7)A,B,C 中不多于两个发生，即是 A,B,C 全发生的对立事件，故所求事件为

$$\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}.$$

(8)A,B,C 中至少有两个发生，即是 A,B,C 中有两个发生或 A,B,C 全发生，故所求事件为

$$\begin{aligned}&AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC\\ &= [AB\overline{C} \cup ABC] \cup [A\overline{B}C \cup ABC] \cup [\overline{A}BC \cup ABC]\\ &= AB \cup AC \cup BC.\end{aligned}$$

3. (1) 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$，$P(AB) = P(BC) = 0$，$P(AC) = 1/8$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

(2) 已知 $P(A) = 1/2$，$P(B) = 1/3$，$P(C) = 1/5$，$P(AB) = 1/10$，$P(AC) = 1/15$，$P(BC) = 1/20$，$P(ABC) = 1/30$，求 $A \cup B$，$\overline{A}\,\overline{B}$，$A \cup B \cup C$，$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，$\overline{A}\,\overline{B}C$，$\overline{A}\,\overline{B} \cup C$ 的概率.

(3) 已知 $P(A) = 1/2$，(i) 若 A,B 互不相容，求 $P(A\overline{B})$，(ii) 若 $P(AB) = 1/8$，求 $P(A\overline{B})$.

解　(1) 依题意可知，事件 A,B,C 至少有一个发生可表示为 $A \cup B \cup C$，故由加法公式可得

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$，

而 $0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB) = 0$，则有

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

(2)$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{11}{15}$

$P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{15} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{17}{20}\end{aligned}$$

$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{17}{20}=\frac{3}{20}$

$P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(\overline{A}\,\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{7}{60}$

$P(\overline{A}\,\overline{B}\cup C)=P(\overline{A}\,\overline{B})+P(C)-P(\overline{A}\,\overline{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}$

(3)(i) 因为 AB 互不相容,所以有 $P(AB)=0$

则 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

(ii) $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

4. 设 A,B 是两个事件.

(1) 已知 $A\overline{B}=\overline{A}B$,验证 $A=B$.

(2) 验证事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率为 $P(A)+P(B)-2P(AB)$.

解 (1) 由 $A\overline{B}=\overline{A}B$ 有

$A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}=AB\cup\overline{A}B=(A\cup\overline{A})B=B$ 得证.

(2) 事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率为

$$P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A-AB)+P(B-AB)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)-2P(AB)\quad\text{得证.}$$

5. 10 片药片中有 5 片是安慰剂.

(1) 从中任意抽取 5 片,求其中至少有 2 片是安慰剂的概率.

(2) 从中每次取一片,作不放回抽样,求前 3 次都取到安慰剂的概率.

解 (1) 至少有 2 片是安慰剂的概率 $=1-$ 最多有 1 片是安慰剂的概率

$$=1-\frac{C_5^5+C_5^1C_5^1}{C_{10}^5}=1-\frac{1+25}{\frac{10!}{5!\times 5!}}$$

$$=1-\frac{13}{126}=\frac{113}{126}$$

(2) 前 3 次都取到安慰剂的概率 $=\frac{C_5^1}{C_{10}^1}\frac{C_4^1}{C_9^1}\frac{C_3^1}{C_8^1}=\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{12}$

6. 在房间里有 10 个人,分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章,任选 3 人记录其纪念章的号码.

(1) 求最小号码为 5 的概率.

(2) 求最大号码为 5 的概率.

解 依题意可知,这是一个古典概型问题,且从 10 个人中任选 3 个人的组合数为 C_{10}^3,则样本空间 S 中包含的基本事件总数 $n=C_{10}^3$.

(1) 令事件 A 表示"最小号码为 5".若最小号码为 5,则其余两个号码均从 6,7,8,

9,10 中选出,故共有 C_5^2 种选法,即 A 包含的基本事件数 $k=C_5^2$. 因此所求事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}.$$

(2) 令事件 B 表示"最大号码为 5". 若最大号码为 5,则其余两个号码均从 1,2,3,4 中选出,故共有 C_4^2 种选法,即 B 包含的基本事件数 $k=C_4^2$. 因此所求事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{k}{n}=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}.$$

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆,其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶,在搬运中所有标签脱落,交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客,能按所定颜色如数得到订货的概率是多少?

解　依题意可知,这是一个古典概型问题,且样本空间 S 中包含的基本事件总数 $n=C_{17}^9$. 令事件 A 表示"能按所定颜色如数得到定货",由于顾客订购 4 桶白漆共有 C_{10}^4 种取法,订购 3 桶黑漆共有 C_4^3 种取法,订购 2 桶红漆共有 C_3^2 种取法,故事件 A 包含的基本事件数 $k=C_{10}^4C_4^3C_3^2$. 因此所求事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{C_{10}^4C_4^3C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2431}.$$

8. 在 1500 个产品中有 400 个次品、1100 个正品. 任取 200 个.

(1) 求恰有 90 个次品的概率.

(2) 求至少有 2 个次品的概率.

解　依题意可知,这是一个古典概型问题,且样本空间 S 中包含的基本事件总数 $n=C_{1500}^{200}$.

(1) 令事件 A 表示"恰有 90 个次品",则事件 A 包含的基本事件数 $k=C_{400}^{90}C_{1100}^{110}$. 因此所求事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{C_{400}^{90}C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}.$$

(2) 令事件 B 表示"至少有 2 个次品",则 $\overline{B}$ 表示"至多有 1 个次品",故事件 $\overline{B}$ 包含的基本事件数 $k=C_{1100}^{200}+C_{400}^1C_{1100}^{199}$,从而事件 $\overline{B}$ 的概率为

$$P(\overline{B})=\frac{k}{n}=\frac{C_{1100}^{200}+C_{400}^1C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}},$$

故由对立事件的性质知,所求事件 B 的概率为

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{1100}^{200}+C_{400}^1C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}.$$

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?

解　依题意可知,这是一个古典概型问题,且样本空间 S 中包含的基本事件总数

$n = C_{10}^4$. 令事件 A 表示"4 只鞋子中至少有两只配成一双",则事件 $\overline{A}$ 表示"4 只鞋子都不成双",而"4 只鞋子都不成双"的取法为:先从 5 双鞋子中任取 4 双,再从这 4 双鞋子中每双取其中一只,这样最后得到的 4 只鞋子都不成双了. 故事件 $\overline{A}$ 包含的基本事件数 $k = C_5^4 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1$,从而事件 $\overline{A}$ 的概率为

$$P(\overline{A}) = \frac{k}{n} = \frac{C_5^4 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1}{C_{10}^4} = \frac{8}{21},$$

故由对立事件的性质知,所求事件 A 的概率为

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{13}{21}.$$

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母,从中任意连抽 7 张,求其排列结果为 ability 的概率.

解 依题意可知,从 11 个字母中任选 7 个进行的所有可能排列构成了样本空间 S,且其包含的基本事件总数 $n = A_{11}^7$. 令事件 A 表示"排列结果为 ability",则事件 A 包含的基本事件数 $k = C_1^1 C_2^1 C_2^1 C_1^1 C_1^1 C_1^1 C_1^1 = 4$. 因此所求事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{A_{11}^7} = \frac{4}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5} = 0.0000024.$$

11. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去,求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

解 依题意可知,将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去共有 4^3 种放法,即样本空间 S 中包含的基本事件总数 $n = 4^3$,令事件 A_i 表示"杯中球的最大个数为 i"($i = 1,2,3$),则有:

(1) 事件 A_1 可以理解为,从 4 个杯子中选出 3 只,将 3 个球分别放入选中的杯子中,每只杯子中有且仅有一个球. 故事件 A_1 包含的基本事件数 $k_1 = C_4^3 A_3^3$,从而事件 A_1 的概率为

$$P(A_1) = \frac{k_1}{n} = \frac{C_4^3 A_3^3}{4^3} = \frac{6}{16}.$$

(2) 事件 A_2 可以理解为,从 4 个杯子中选出 1 只,再从 3 个球中选出 2 个球放入选中的杯子中,最后将剩下的 1 个球随机地放入其它 3 个杯子中. 故事件 A_2 包含的基本事件数 $k_2 = C_4^1 C_3^2 C_3^1$,从而事件 A_2 的概率为

$$P(A_2) = \frac{k_2}{n} = \frac{C_4^1 C_3^2 C_3^1}{4^3} = \frac{9}{16}.$$

(3) 事件 A_3 可以理解为,从 4 个杯子中选出 1 只,将 3 个球全部放入选中的杯子中. 故事件 A_3 包含的基本事件数 $k_3 = C_4^1$,从而事件 A_3 的概率为

$$P(A_3) = \frac{k^3}{n} = \frac{C_4^1}{4^3} = \frac{1}{16}.$$

注意:考虑到 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$ 且 $A_i A_j = \varnothing, i \neq j$,因而 $P(A_1) + P(A_2) +$