高等学校教学参考书

数学物理方法解题指导

胡嗣柱　徐建军

高等教育出版社

高等学校教学参考书

数学物理方法解题指导

胡嗣柱　徐建军

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法解题指导/胡嗣柱，徐建军编著，—北京：高等教育出版社，1997

高等学校教学参考书

ISBN 7-04-005778-6

Ⅰ.数…　Ⅱ.①胡…　②徐…　Ⅲ.数学物理方法－解题－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.0411.1

中国版本图书馆CIP数据核字（96）第04395号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街55号

邮政编码：100009　传真：64014048　电话：64054588

新华书店上海发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 15.75　字数 406 000

1997年7月第1版　1997年7月第1次印刷

印数　0001—1 113

定价 15.00 元

内 容 提 要

本书是国家教委高等学校1991—1995年物理学教材编写选题规划中的一本教学参考书，目的是帮助学习数学物理方法课程的学生较好地掌握所学内容，提高他们分析问题、解决问题的能力以及应试能力．全书共分12章，各章都分成内容提要、例题、练习题3部分．内容提要部分简明、实用．例题部分共收约230题，兼顾典型性和综合性．各例题一般又分解法和说明：解法常不只一种，而说明则涉及解题思路和技巧、各解法之间的联系和比较、解法的难点和易出错之处以及如何深入研究等等．练习题部分共收约290题，书末附有答案、提示和说明．

本书可作为高等学校物理类专业学生学习数学物理方法课程的教学参考书，对有关专业的研究生、教师也有一定的参考作用．

序　言

当我的亲密同事胡嗣柱将他这本书厚厚一叠书稿交给我看的时候，我的思绪仿佛又回到了三十多年前．那是在1958年，我从物理系毕业三年之后，他刚从数学系提前毕业到物理系工作，共同接受了上“数学物理方法”这门课的任务．当时没有合适的教科书，参考书不多，有经验的老教师也极少．我们二个人凭着热情，全身心投入工作，边干边学，由不懂到懂，编写了讲义，搜罗了各种习题，在大课、习题课和答疑课上经过几年锻炼，才初步过了教学关．我们二人常常为弄清楚一个数学概念，反复讨论了许多年；也常常为算出一个积分或解出一个方程而欣喜不已．1964年以后，我的工作转到其他方面去，这门课的教学一直由他主持进行．他比我更注意资料的积累，深入钻研了许多教材内容和习题，于是才可能有1989年我们合写的那本《数学物理方法》(复旦大学出版社)一书和现在这本书的出版．

30年当然是一个很长，也许是太长的时间．然而仔细回想起来，我们自己真正把这门课融会贯通起来，那还是1972年以后二人较多地做了科研工作之后的事情．正如华罗庚先生所说，读书要经过由“薄”到“厚”、再到“薄”的过程，我们确实经历了这一过程，而只有走教学与科研相结合的路，才能实现和缩短这一过程．下面谈两点我们的体会．

学物理的人念数学，应该主要地遵循“从特殊到一般”的认识道路．这句话是相对于“从一般到特殊”的学习或研究方法而言的．我们从物理上归结出数学问题时，往往得到一个特殊的方程式，首先总是问：“怎么求解?”而不会首先去关心如何证明这个方程的解是否“存在”？或是否“唯一”？这后一个问题主要依靠数学家去解决．因为一般说来，我们不具备这种能力；而真的一旦当我们必须

面对某种微妙的数学上的严格性问题时，那一定是已经接近物理本质问题的核心了，这种机会是可遇而不可求的．因此对初学者来说，主要矛盾始终是如何学习和掌握各种具体的计算方法，多做练习，“熟能生巧”．当然，算的时候和算好之后，还要多想．

最近听到谷超豪先生有一个很形象化的譬喻：告诉你在长白山“存在”有世界上最好的野生人参，这难道是能够使人感到满足的吗？

“从特殊到一般”，有一个出色的范例．1954 年杨振宁先生和 Mills 通过同位旋 SU(2)群的考虑，首先提出非阿贝尔规范场的理论．后来物理学家一步步的研究证明，自然界各种相互作用都是通过规范场而传递的．1975 年杨振宁和吴大峻又进一步弄清楚：规范场理论就一般地对应于数学上的纤维丛理论．今天一个物理系学生学了“四大力学”和“数学物理方法”之后，进一步去学杨-Mills 理论并不太难，但倘若想先掌握纤维丛理论后再去学杨-Mills 理论，那就将是一条远为漫长而困难的道路．

其次我们想请读者在看这本书的时候，随时随地注意“量纲”．一定要记住：三角函数或指数函数的宗量是没有量纲的，因此如果书中出现 $\sin x$ 或 e^t 时，其中的 x 或 t 决不是空间或时间坐标．仅当写明 $\sin kx$ 或 $e^{i\omega t}$ 时，x 或 t 才是空间或时间坐标，而 k（波数）或 ω（圆频率）的量纲分别恰好与 x 或 t 的量纲抵消掉．一般特殊函数都有类似的情形．不过 δ 函数也许是唯一重要的例外，$\delta(x)$ 的量纲是它宗量 x 的量纲的倒数，因为 $\int_{\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x = 1$ 是无量纲数．以上这些话似乎一讲便懂，但事实上有些学物理的人在这上面还会犯错误；反之，谁若在这一点上想得最深，谁就能在这方面做出很聪明的研究工作来．

多讲是无益的，因为别人的体会并不能直接变成自己的体会．治学主要靠个人刻苦钻研，但有没有好的参考书确实大不一样．正是在这点上，我相信这本书对广大读者将会有很大的帮助．

20世纪即将结束，面向21世纪的物理教学和教材内容改革的任务正摆在我们面前. 嗣柱和建军两位作者的辛勤劳动在某种意义上是为复旦40年来在这门课教学上的经验作了一个总结，希望年青的读者在这基础上更上一层楼，勇敢地迎接新世纪的到来. 是为序.

倪光炯

1995年1月于复旦大学

前　言

国家教委高等学校理科物理学教学指导委员会理论物理教材建设组在“八五”规划中拟组织编写一本数学物理方法解题指导方面的书，以帮助学习这门课程的学生较好地掌握这门课，提高他们分析问题、解决问题的能力和应试能力，并供正在从事这门课教学的教师参考.另一方面，我们多年从事数学物理方法课程的教学，想把这方面陆续积累起来的资料整理一下.这样，我们就将这个编写任务接受了下来.后来，我们将编写这本书的一些设想在高校数学物理方法第三届年会暨数学物理方法教材研讨会上作了介绍，与会代表对此进行了讨论并提出了许多有益的意见.此后我们按上述要求着手进行编写，现交付出版.

本书共有十二章，每章都分“内容提要”、“例题”和“练习题”三个部分，书末附有“练习题答案、提示和说明”.内容提要部分写得尽可能简要、实用.例题部分是本书的主要部分，收有具有一定的典型性和综合性的例题共约230个.一般每个例题又分为解法(也有一题多解)和说明，其中说明部分谈的是诸如解题思路和技巧，各解法之间的联系和比较，解法的难点和容易出错的地方，以及如何深入研究(包括介绍参考资料)等问题，也有我们自己做的一点工作.这是本书的特色所在.练习题部分给出了近290个问题.内容提要、例题或练习题中具有一定深度或难度者(约占总内容的1/4)在题号前冠以“ * ”号.

为使全书篇幅不过大，例题和练习题数目选得并不很多，内容上也不面面俱到(例如数学物理方程的分类和简化本书就没有涉及).由于本书是供正在学习或已学过此课程的读者用的，为了叙述上的方便，我们将现行教科书的某些内容重新作了安排(例如Γ

函数、δ函数、拉普拉斯变换和傅里叶变换，另外，求解数学物理方程定解问题的延拓法分别在行波法和积分变换法两部分中给出).

本书的编写得益于先期出版的国内外有关书籍和资料，高等教育出版社给予我们大力的支持.在此我们谨向这些书的作者和本书的编辑以及关注着本书出版的人们致以衷心的感谢.

虽然我们作了很大的努力以确保内容的准确性，但由于作者水平有限，本书中的缺点和错误在所难免，恳请同行和读者批评指正.

作者

1994年12月于复旦大学

目　　录

第一章　复变函数和解析函数

本章介绍复变函数的基本概念和解析函数的定义、充要条件及其物理解释.

§1.1　内 容 提 要

(一) 复数及其运算

设 x 和 y 是两个实数,引入 $\mathrm{i} \equiv \sqrt{-1}$(即 $\mathrm{i}^2 = -1$),称

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{1.1}$$

为一个复数, x 和 y 分别称为 z 的实部和虚部(分别记为 $\mathrm{Re}z$ 和 $\mathrm{Im}z$). $x - \mathrm{i}y$ 称为复数(1.1)的共轭复数,记为 z^* 或 $\bar{z}$(本书采用前者). 一个复数 z 可用复平面①上一个点 P 或一个向量 $\boldsymbol{OP}$ 表示(见图 1.1),只要向量的长度和指向都一样,则这些向量都表示同一个复数. 由图 1.1 可见,(1.1)式也可以写成

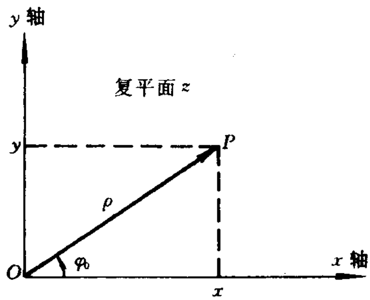

图　1.1

$$z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \tag{1.2}$$

其中 $\varphi = \varphi_0 + 2n\pi(0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi)$, n 为任意整数,这时 ρ 和 φ 分别称为 z 的模和幅角(分别记为 $|z|$ 和 $\arg z$). (1.2)式还可以写成

$$z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{1.3}$$

---

① 复平面与实平面上直角坐标系的区别在于:后者两坐标轴的单位分别为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$,满足 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1$, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0$,而前者两坐标轴的单位分别为 1 和 i,满足 $\mathrm{i}^2 = -1$.

其中 $e^{i\varphi}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\varphi)^n$，而 $0!\equiv1$. (1.1)、(1.2)和(1.3)式分别称为复数 z 的代数式、三角式和指数式.

两复数相等的充要条件是其实部和虚部分别相等. 两复数的加减法是

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \end{aligned} \tag{1.4}$$

两复数的乘除法是

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1), \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (\text{设 } x_2 + iy_2 \neq 0). \end{aligned} \tag{1.6}$$

用指数式(1.3)来做乘除法更为方便:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{1.7}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \quad (\text{设 } \rho_2 \neq 0). \tag{1.8}$$

复平面上的无穷远点($z=\infty$)只有一点，即当 $\rho\to\infty$ 时 $z=\rho e^{i\varphi}$ 的极限点(不论 φ 取何值).

(二) 复变函数和初等函数

任何一个以 $z=x+iy$ 为自变量的复变函数 $w=f(z)$ 总可以写成

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{1.9}$$

其中 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是 x 和 y 的实函数.

基本初等函数有:

指数函数

$$e^z = e^{x+iy} \equiv e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{1.10}$$

三角函数

$$
\begin{cases}
\sin z \equiv \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \\
\cos z \equiv \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \\
\mathrm{tg}\, z \equiv \dfrac{\sin z}{\cos z}
\end{cases}
\tag{1.11}
$$

等等以及它们的反函数.

双曲函数

$$
\begin{cases}
\mathrm{sh}\, z \equiv \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}), \\
\mathrm{ch}\, z \equiv \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}), \\
\mathrm{th}\, z \equiv \dfrac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}
\end{cases}
\tag{1.12}
$$

等等以及它们的反函数.

对数函数

$$\ln z = \ln(\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) \equiv \ln\rho + \mathrm{i}\varphi. \tag{1.13}$$

幂函数

$$z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln z} \qquad (\alpha \text{ 为复常数}), \tag{1.14}$$

特别,当 $\alpha = \dfrac{1}{n}$ $(n = 2,3,4,\cdots)$时有

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/n} = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}} \qquad (k = 0,1,\cdots,n-1), \tag{1.15}$$

它有 n 个不同的值.

$\ln z$、z^{α}(当 α 不是整数时)以及反三角函数和反双曲函数都是多值函数.

由(1.9)式可见,复变函数的极限和连续性问题等价于一对二元实函数 $u(x,y)$和 $v(x,y)$的极限和连续性问题.

例如

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) + \mathrm{i} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y),$$

其中 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$.

(三) 复变函数的导数,解析函数

单值函数 $f(z)$在 z_0 点的导数定义为

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}, \tag{1.16}$$

其中 $\Delta z=z-z_0$.注意,复变函数 $f(z)$在一点 z_0 可导的要求要比实函数 $f(x)$在实轴上一点 x_0 可导的要求高得多!不可导的点称为$f(z)$的奇点.

如果 $f(z)$在点 z_0 的某邻域内处处可导,则称 $f(z)$在点 z_0 解析.对于区域上的连续函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, $f(z)$为解析函数的充要条件是满足科希-黎曼条件:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases} \tag{1.17}$$

对于解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,已知其实部(或虚部)可以求出其虚部(或实部):

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right)+C, \tag{1.18}$$

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y\right)+C, \tag{1.19}$$

其中 C 为任意实常数, $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 是区域内的某一定点,积分路径可以在区域内任意选取.

(四) 多值函数和黎曼面

对于多值函数 $w=f(z)$,在其定义域内总存在这样的点 $z=z_0$,在它的邻域内,当点 $z=z_0+\rho e^{\mathrm{i}\varphi}(\rho\ll 1)$关于点 z_0 的幅角由 φ 变为 $\varphi+2\pi$(即绕 z_0 一周)时,有

$$f(z_0+\rho e^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi)})\neq f(z_0+\rho e^{\mathrm{i}\varphi}),$$

则称 z_0 为该函数的枝点.如果幅角再由 $\varphi+2\pi$ 变为 $\varphi+4\pi$ 时有

$$f(z_0+\rho e^{\mathrm{i}(\varphi+4\pi)})=f(z_0+\rho e^{\mathrm{i}\varphi}),$$

则称枝点 z_0 为一阶枝点;如果仍有

$$f(z_0+\rho e^{i(\varphi+4\pi)})\neq f(z_0+\rho e^{i\varphi}),$$

但是有

$$f(z_0+\rho e^{i(\varphi+6\pi)})=f(z_0+\rho e^{i\varphi}),$$

则称枝点 z_0 为二阶枝点;……;如果存在某自然数 $n(n\geqslant 2)$使

$$f(z_0+\rho e^{i(\varphi+2m\pi)})\neq f(z_0+\rho e^{i\varphi})\qquad(m=1,2,\cdots,n-1),$$

但是有

$$f(z_0+\rho e^{i(\varphi+2n\pi)})=f(z_0+e^{i\varphi}),$$

则称枝点 z_0 为 $n-1$ 阶枝点.阶数为有限的枝点统称为代数枝点,否则称为超越枝点[①].

对于多值函数的 $n-1$ 阶枝点 z_0[②],为了形象地表明其邻点 z 关于 z_0 的幅角 φ 的变化范围是 $0<\varphi<2\pi$, $2\pi<\varphi<4\pi$, $\cdots$, $2(n-2)\pi<\varphi<2(n-1)\pi$,或是 $2(n-1)\pi<\varphi<2n\pi$,设想 z 平面是由 n 叶平面组成的,这 n 叶的 z_0 点重合且都从此点出发沿平行于正实轴的方向剪开,其中上一叶的剪开线的下岸与下一叶剪开线的上岸连接在一起,而最下一叶剪开线的下岸则与最上一叶的剪开线的上岸连接在一起.这种由 n 叶复平面组成的面称为该函数的黎曼面,而剪开的线称为该复平面的割线.割线总是从枝点发出,但是取什么样的路线有一定的任意性.对应于原复平面上的任意一点(枝点除外),在黎曼面的各叶上其函数值是互不相同的,因此,函数具有 n 个单值分支.如果将多值函数的定义域扩大到该函数的黎曼面,则在黎曼面上该函数成为单值函数,因而同样可以定义导数和讨论解析性(但枝点总是奇点).

(五) 解析延拓

复变函数的解析区域的扩大过程称为解析延拓.一个解析函数由其在定义域内一个小区域或小线段上的值唯一确定,这称为

① 这些有关枝点的定义对于无穷远点也同样适用,这里不再详述.

② 为了叙述上的方便,这里设 z_0 是该函数的唯一的有限远枝点.