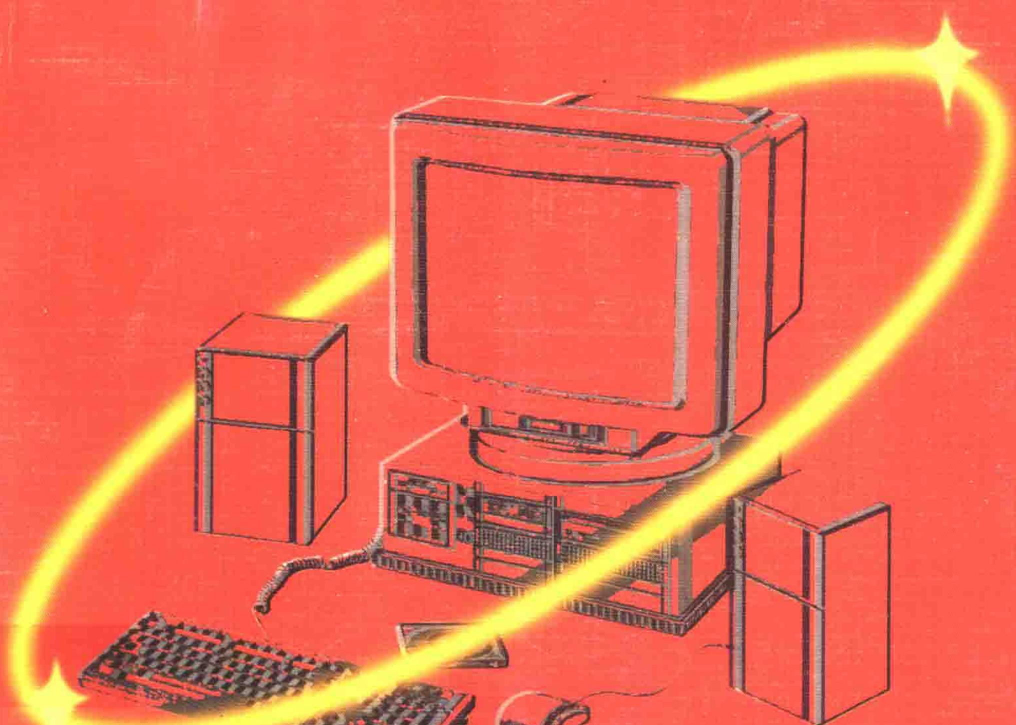
计算机科学导论

〔德〕 冈特·霍茨 著

石 茵 译

魏道政 吴宏中 审



北京航空航天大学出版社

计算机科学导论

[德] 冈特·霍茨 著

石 茵 译
魏道政
吴宏中 审

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书作者把计算机的理论以数学为基础作为出发点，从简单的程序编制入手，逐步引导出计算机的结构。全书共分四章。第一章介绍了基本数学概念。第二章介绍建立计算机模型，引进了模拟的概念作为理解算法正确性的一种方法。第三章引导读者了解计算机原理，介绍了组合电路、双稳态开关电路和触发器，概述了用开关电路来实现微程序。第四章介绍了高级程序设计语言的理论，对各种数据类型及其上的运算作了详细描述。

该书可供大专院校计算机专业的师生作为教科书，教学参考书以及作为从事计算机研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

计算机科学导论/［德］霍茨著；石茵译．－北京：北京航空航天大学出版社，1998.12

ISBN 7-81012-813-2

I．计… II．①霍… ②石… III．电子计算机-基本知识 IV．TP3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 17744 号

本书经 Teubner 允许由德文版本译成中文

Günter Hotz, Einführung in die informatik (c) B.G. Teubner Stuttgart 1990.

计算机科学导论

［德］ 冈特·霍茨 著

石 茵 译

魏道政 吴宏中 审

责任编辑 杨俊池

责任校对 张韵秋

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市学院路 37 号(100083)，发行部电话 82317024

http://www.buaapress.cn.net

E-mail:pressell@publica.bj.cninfo.net

北京宏文印刷厂印装　　各地书店经销

*

开本：787×1092　1/16　印张：21　字数：537 千字

1999 年 2 月第 1 版　1999 年 2 月第 1 次印刷　印数：3 000 册

ISBN 7-81012-813-2/TP·297　　定价：33.00 元

版权号　图字：01-1999-0660 号

前　　言

本书源于我在萨尔州大学讲授计算机科学 I、II 这门课的讲稿。自 1969 年开始的 3 至 4 年中，我每年都讲授这门课，并很快完成了一本名为“计算机科学：计算机”的书，1972 年由 Teubner 出版社出版。当时计算机科学的教育在德国的大学中刚刚开始，几乎没有这方面的文献。本书不单纯是过去那本书的扩充，它还介绍了完全新的内容。

我主张计算机科学的教学应从简单的程序编制入手，逐步引导出计算机的结构。此外，计算机的理论应以数学为基础。目前计算机科学这门课中以数学为基础拟定的内容太少，因此，我认为很有必要适当增加。本书第一章介绍了一些必要的基本数学概念。

第二章将逐步建立起一个计算机模型。通过程序编制，说明了从一级到另一级过渡的原因。引进模拟的概念作为理解算法正确性的一种方法是十分重要的，它在介绍子程序技术时也很有用。本章详细地介绍了子程序技术，它为理解高级程序设计语言的编译程序打下了很好的基础。

第三章引导读者理解计算机的原理。首先介绍组合电路，然后讨论双稳态开关电路和触发器，最后讨论有限自动机及其开关电路表示。“程序”表示了描述开关电路的一种可能性，本章概述了用开关电路来实现微程序。本章的最后还介绍了几个微程序的例子、一个存储器的形式模型和微程序的工作原理。通过这一章，将使读者达到自己能够设计一台“计算机”的状况。

在第四章中，我们将介绍高级程序设计语言的理论。我们对数据类型实型、字符串型、表类型及句子类型的详细描述为此奠定了基础。这些数据类型都是非纯一的代数。变量定义为这些数据类型，并且变量的运算也限于这些类型。

程序的基本控制结构用树来定义。它提供了将程序归结为一棵结构树的一种简单方法，为定义程序语义奠定了基础。程序的解释构成了一棵结构树的图。通过对图采取深度优先的搜索方法，可对程序所定义的计算进行控制。

我们将介绍数组及作为复合数据结构的记录和可变数组。

最后我们说明，用本书中介绍的程序设计语言设计的程序可以翻译成机器程序。我们的方法是，首先消去子程序，然后将所有数据结构归于可变数组。如此构造的程序显然可以用第二章中介绍的计算机来实现。

关于程序设计语言不完备性的定理使本书得以完善，并将我们引到可计算性这类基本问题上去。

本书的第四章和第三章的第 3.1 节至 3.3.4 节的 $\mathrm{LAT_EX}$ 排版是由 Dreyer 女士完成的。Andreas Nikolaus 先生完成了所有其他部分的 $\mathrm{LAT_EX}$ 排版，并对这两部分稿的排版作了最后的统一。他消除了原稿中的许多错误，并对有关模拟章节的内容作出了重要的贡献。因此，从这方面讲，他使我的原稿增色不少。他单独撰写了关于后进先出机理的重要的第 2.3 节，并详

细解释了尤其是关于狄克语言和线性时序电路的证明草图。他制作了很多表格，并且用 LATEX 绘制了大量主要的插图。在此，我向他们表示衷心的感谢。

B. Becker，J. Hartmann，R. Kolla，T. Kretschmer，P. Molitor 以及 A. Nikolaus 协助了习题部分的工作。T. Kretschmer，P. Molitor，G. Pitsch，M. Ries 和 E. Schoemer 校对了原稿。对此，我也表示衷心的感谢。

毫无疑问，这样一本书不是在真空中形成的，它经历了和同事们的讨论，并采纳了他们的宝贵意见。J. Loeckx，K. Mehlhorn 和 R. Wilhelm 对本书的第一版作出了突出贡献，尽管现在的这本书在它第一版的基础上有很大的扩充和增改，但他们的功不可抹，他们的思想使两本书都受益匪浅。该书的形成和多年来的教学互为因果。

最后，我要感谢 Teubner 出版社，并特别要感谢 Peter Spuhler 博士，多年来我们一直保持了很好的合作关系。

冈特·霍茨

1990 年 7 月于萨尔布吕肯

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

“计算机科学：计算机”一书的前言

本书是我在大学授课的一份讲稿。在 1970 年和 1971 年的两个夏季学期中，我两次用它讲授了名为“计算机科学 I(关于计算机结构的介绍)”这门课。它是为大学计算机专业的初学者而准备的。

授课目的在于对计算机设计范围内的问题作一个系统的介绍。因此，计算机结构的介绍应该从具体的程序设计开始，以自然的方式展开。结构的变化对可计算的函数的范围有怎样的影响应该是清楚的。本书描述了组合电路、时序电路及其优化方法，以及一些复杂指令的微程序实现。

本书不介绍基本的物理技术，它是另外一门专门的课程。本书虽不是十分详细地但却介绍了如存储器那样的全部部件，因而使整个授课计划建立在严格而切合实际的基础上。

可以象讲授数学课那样来讲授这门课。但毫无疑问，这并不是唯一可行的方法，如 F. L. Bauer 和 G. Goos 的书就是完全按照实验物理学的现象逻辑的结构来安排的。我的看法是，应该在我所知道的一些有效的方法中尝试一种选择。因此，我将这门课的讲稿写成了这本书。

G. Kaufholz 先生和 O. Spaniol 博士对我的讲课提出了很多宝贵意见。H. Kopp 先生为本书编排了习题并编制了目录。Kaufholz 先生不仅为本书的出版做了主要的工作，而且还修改了本书最后关于存储器限制那部分，使之更加简单明了。我的听课者也提出了几处修正。由于他们的工作，使本书得以迅速地出版，在此，我向他们表示衷心的感谢。

Teubner 出版社对我在排版方面的要求给予了大力的帮助，使本书能够在如此短的时间内出版。在这里，我向 Teubner 出版社及其所有合作者表示我真诚的感谢。

冈特·霍茨

1972 年 4 月于萨尔布吕肯

作 者 序

此书是我 1990 年德文版的中译文，译者对其中的某些章节作了少许修改，与原书相比又有了一些改进。对此，我向译者石茵博士表示衷心的感谢。此外，我也衷心感谢吴宏中博士和关永刚博士，他们提供了帮助。如果此书能够对中国学生了解计算机科学有所帮助，我将感到非常高兴。

作者：Günter Hotz 博士

1997 年 3 月于德国萨尔州大学

译者序

本书的原作者 Günter Hotz 博士是前联邦德国计算机学会第一任主席，是一位对计算机科学有着卓越贡献的著名科学家。Hotz 博士著有多部著作，对计算机基础科学具有深入和独特的研究。Hotz 博士是一位充满智慧和幽默的学者，和他交谈过的人无一不感受到这一点。他的活跃的思维、严谨的逻辑推理和治学方法，都在他的著作中得到充分体现。译者从 1995 年开始致力于将这本优秀的著作介绍给国内的读者，因为在国内虽然能读英文书籍的人很多，但能读德文书籍的人却不多，译者衷心希望本书能给我们国内学习和研究计算机科学的广大读者带来帮助。

本书得以出版，译者在这里首先要感谢北京航空航天大学的李未教授，是他的热情关心和支持才使本书得以顺利和读者见面。

译者衷心感谢译者的导师、中国科学院计算技术研究所的魏道政教授，以及远在德国的吴宏中博士、关永刚博士和朱宾博士，他们在译者翻译此书的过程中和审阅译稿的过程中都给予了极大的关心和很多具体的指导和帮助。尤其是吴宏中博士，他在百忙中抽出了大量的时间来审阅译稿，为本书的问世付出了很多心血。

最后，译者衷心感谢北京航空航天大学出版社为出版本书所付出的辛勤劳动，并特别向出版社许传安社长和杨俊池先生表示衷心的感谢。

译者：石茵
1998 年 7 月于新加坡

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　基本数学概念

1.1　符号表示法

我们用 $\mathbf{N}$ 表示自然数的集合，即

$$\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$$

用 $\mathbf{N}_0$ 表示包含 0 的自然数的集合。用 $\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$ 及 $\mathbf{R}$ 分别表示整数、有理数及实数的集合。

若干不同的物体 $a, b, c, \cdots$ 构成集合 M。我们通过将这些元素写在一个花括弧内来描述这个集合，也即

$$M = \{a, b, c, \cdots\}$$

这里，花括弧中元素的顺序无关紧要，因此有

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$$

序列是与集合不同的概念。例如，(a, b, a, c) 是一个序列。序列是要考虑元素次序的。比如，(a, b, a, c) 不同于 (a, a, b, c)。此外，序列与集合的另一个区别是 $(a, a) \neq (a, a, a)$，而 $\{a, a, a\} = \{a, a\}$。

如果 M 是一个集合，a 是其中的一个元素，则记为 $a \in M$。反之，如果 a 不是 M 中的一个元素，则记为 $a \notin M$。通常，我们定义 A 和 B 构成的集合如下：

$$A \cup B := \{a \mid a \in A \text{ 或 } a \in B\}$$

$$A \cap B := \{a \mid a \in A \text{ 并且 } a \in B\}$$

$$A - B := \{a \mid a \in A \text{ 并且 } a \notin B\}$$

这种表示读作 a 的具有…性质的集合。进一步，有如下的表示：

$$A \subset B :\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$$

如果仅考虑一个给定集合 M 的子集，那么可用 $\bar{A}$ 来表示 $M - A$，并且称 $\bar{A}$ 为 A 的关于 M 的补集。

设 A 是一个有限集，规定：

$$\# A := A \text{ 中元素的总数。}$$

如果 A 不是有限集，那么规定 $\# A := \infty$。$\# A$ 也可记作 $\mathrm{card}(A)$。

设 A 和 B 是两个集合，定义

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$A \times B$ 称为 A 和 B 的笛卡尔积。

此外，如果 $R \subseteq A \times B$，则称 $r = (A, B, R)$ 为 A 和 B 之间的一个关系，记为：

$$r(a) = \{b \in B \mid (a, b) \in R\} \qquad \text{其中，} a \in A$$

和

$$r^{-1} = (B, A, R^{-1}) \qquad \text{其中，} R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

对 $r = (A, B, R)$，定义 $Q(r) = A$，$Z(r) = B$，并且称 $Q(r)$ 为 r 的象源，$Z(r)$ 为 r 的象点。

如果 $r = (C, D, R)$ 和 $s = (A, B, S)$ 是两个关系，那么当且仅当 $Z(s) = Q(r)$，我们定义

运算 $r\circ s$ 为：

$$r\circ s=(A,D,T)\qquad \text{其中}, T=\{(a,d)\mid \text{存在 } c\in B \text{ 使}(a,c)\in S \text{ 和}(c,d)\in R\}$$

读者或许会问，为什么用 r 代替 R，并且不省略 A 和 B？原因是为了形式化。如果考虑将 $A\times B$ 的元素记为 (a,b)，可以用唯一的方式还原分量 a 和 b，那么确实可以省略象源和象点的表示。但是，如果 A 和 B 由元素序列 $a,a,\cdots,a$ 组成，那么 $(a,\cdots,a,a,\cdots a)$ 的分解有时可能会有问题。因此，只写出象源和象点还不十分明确，我们需要一种规则来还原这两个分量。在下文中我们称这种规则为映射。

一种特殊的关系是：

$$1_A=\{(m,m)\mid m\in A\}$$

它满足

$$r\circ 1_A=1_B\circ r=r$$

因此，对每一个满足 $Q(r)=A$ 和 $Z(r)=B$ 的关系 r，都有一个左单位元 1_B 和一个右单位元 1_A。

我们特别感兴趣的是只与一个集合有关的关系，即形如 $r=(A,A,R)$ 的关系。这里规定

$$r^0:=1_A$$

$$r^1:=r$$

$$r^2:=r\circ r$$

$$r^3:=r\circ r^2$$

一般地，对于 $k=1,2,\cdots$

$$r^k:=r\circ r^{k-1}$$

定义

$$r^*:=1_A\cup r\cup r^2\cup\cdots$$

对此也记为

$$r^*=\bigcup_{k=0}^{\infty}r^k$$

r^* 称为 r 的自反传递闭包。

定义 1.1 关系 r 称为

自反和传递的，当且仅当 $r=r^*$；

对称的，当且仅当 $(m,n)\in R\Rightarrow(n,m)\in R$；

等价关系，当且仅当(1) r 是自反和传递的；(2) r 是对称的。 ■

在这种情况下，也可用 $a\overset{r}{\equiv}b$、$a\overset{r}{\sim}b$ 或 $a=b(r)$ 来代替 $a\in r(b)$。$r(a)$ 也可以记为 $[a]_r$。所有这些写法以及其他写法都可在文献中见到。这种关系读作“a 模 r 等价于 b”。

引理 1.1 如果 r 是一个等价关系，则对所有 a、$b\in A$，有

$$r(a)\cap r(b)=\varnothing \text{ 或 } r(a)=r(b)$$

证明： 证明留给读者作为练习。 ■

如果 r 是一个等价关系，那么称 $r(a)$ 为 $a\in A$ 的等价类。我们将 A 的等价类的集合记为 $A/(r)$。

关系的概念可以用一个城市的街道系统来说明。设一个关系建立在街道的十字路口集合 A 上。对于一个十字路口对 (a,b)，当且仅当 a 到 b 之间没有任何十字路口时，(a,b) 属于关

系 r。十字路口对(c,e)属于关系 r^2，当且仅当存在十字路口对(c,d)和(d,e)，使得(c,d)和(d,e)属于关系 r。十字路口对(e,g)属于关系 r^3，当且仅当存在十字路口对(e,f)和(f,g)，使得(e,f)属于 r，(f,g)属于 r^2，……。在一个城市中，应该有 $r^* = A\times A$。

定义 1.2　关系 $r\subseteq A\times B$ 称为

单射　$\Leftrightarrow$　$\# r^{-1}(b)\leqslant 1$，对所有 $b\in B$；

满射　$\Leftrightarrow$　$\# r^{-1}(b)\geqslant 1$，对所有 $b\in B$；

双射　$\Leftrightarrow$　$\# r(a)=1$，并且 $\# r^{-1}(b)=1$，对所有 $a\in A$，$b\in B$；

部分映射　$\Leftrightarrow$　$\# r(a)\leqslant 1$，对所有 $a\in A$；

完全映射　$\Leftrightarrow$　$\# r(a)=1$，对所有 $a\in A$。■

如果 $f=(A,B,F)$是一个完全映射，则可记为 $f:A\to B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$；如果 f 是一个部分映射，则记为 $f:A \rightharpoonup B$。下文中，“映射”总是指“完全映射”。常常用“函数”作为“映射”的同义词。

集合 $Def(f):=\{a\in A\mid \# f(a)=1\}$称为 f 的定义域。在 $f:A\to B$ 的情况下，有 $Def(f)=A$。

假定 $r=(A,B,R)$是一个关系，并且 $\tilde{A}\subseteq A$，$\tilde{B}\subseteq B$。如果有 $\tilde{R}=\{(m,n)\in R\mid (m,n)\in \tilde{A}\times\tilde{B}\}$，则关系 $\tilde{r}=(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{R})$称为 r 在 $\tilde{A}\times\tilde{B}$ 上的限制。对此，也可以记为　$\tilde{R}=R\cap(\tilde{A}\times\tilde{B})$。

如果 $\tilde{r}$ 是 r 在 $\tilde{A}\times\tilde{B}$ 上的限制，那么称 r 为 $\tilde{r}$ 在 $A\times B$ 上的一个延拓。

上述定义也可用于映射。如果 $\tilde{A}\subseteq A$，并且 $f:A\to B$ 是一个映射，那么可以将 f 在 $\tilde{A}$ 上的限制理解为对所有 $a\in\tilde{A}$，满足 $\tilde{f}(a)=f(a)$的映射 $\tilde{f}:\tilde{A}\to B$。对此也简记为 $\tilde{f}=f|\tilde{A}$。对于部分映射 $f:A\rightharpoonup B$ 也类似地有上述讨论。

1.2　半群和独异点

计算机处理的是符号的组合，并输出组合的符号。例如，在最简单的情况下，这种符号的组合是由字母和数字组成的序列。复杂的输入、输出对图形来说是必要的。由于这个原因，文字和形式语言的理论在计算机科学中起着基础的作用。我们的字符集中只考虑字母 $a,b,\cdots,z,A,B,\cdots,Z$ 和数字 $0,1,\cdots,9$ 已很快被证实为是一个太大的限制。必须允许这样的字符集，其元素本身已经是字符序列。这样的结构可能会造成混乱或模糊，因此，这一节专门讨论上述概念。

设 A 是一个集合，比如说 $A=\{a,b,\cdots,z\}$。我们用 A 中的元素构成字 abc，$aabbcc$，$abacad$，$azbycxazbycx$ 等等。我们用 A^+ 来表示这些字的集合。通过将两个字放在一起的方法可以产生出一个新的字。例如，用“毗连”的方法可以从两个字 abc 和 $aabcc$ 得到一个新的字 $abcaabcc$，对此简记为 $abc\cdot aabcc=abcaabcc$。

如果考虑

$$(abc\cdot cd)\cdot aaa = abccd\cdot aaa = abccdaaa$$

则可看出

$$(abc\cdot cd)\cdot aaa = abc\cdot(cd\cdot aaa)$$

这意味着，这种乘积满足结合律。

下文中，我们将只考虑字母表中小写字母表示的字，并用 u，v，w，…来表示这样的字。例如，$w = abccdaa$。用 $w(i)$ 表示字 w 的第 i 个字符。例如，在上例中，$w(1) = a$，$w(3) = c$，$w(7) = a$。

一个字的长度等于它的字符总数。在前面的例子中，字 w 的长度是 7，记为长度$(w) = 7$，或简写为 $|w| = 7$。如果 w 是长度为 n 的一个字，即 $|w| = n$，那么有

$$w = w(1) \cdot w(2) \cdot \cdots \cdot w(n)$$

通常，我们用 w_i 来代替 $w(i)$，因此也有

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot \cdots \cdot w_n$$

如果 w 和 v 是字，那么有 $|w \cdot v| = |w| + |v|$。

如前所述，复杂的字符集中的字将发挥重要作用，因此，我们需要对这个概念下一个严格的定义。

我们已经知道 $w(i)$ 为 w 的第 i 个字符，也就是说，可以将 w 理解为映射 $w:[1:n] \to A$，其中 $[1:n] := \{i \in \mathbf{N} | 1 \leqslant i \leqslant n\}$，并且 $n = |w|$。

定义 1.3 集合 $A^+ := \{f | f:[1:n] \to A, n = 1, 2, \cdots\}$ 称为 A 上的非空字集合，$w \in A^+$ 称为 A 上的字。

如果 w 是映射 $w:[1:n] \to A$，那么我们规定 $|w| := n$，并且称 $|w|$ 为 w 的长度。

$A^* := \{f | f:[1:n] \to A, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 称为映射到 A 上的字的集合。

由此得出，$A^* - A^+ = \{\varepsilon:[1:0] \to A\}$。因为 $[1:0] = \varnothing$，所以 $\varepsilon_A = (\varnothing, A, \varnothing)$。$\varepsilon_A$ 称为映射到 A 上的空字。 ■

字 ε_A 的引进使得表达可以更简单明了。以下我们都删去 ε_A 的下标，用 ε 来表示 ε_A。

对 $\# A = m < \infty$，下面确定关于 A 的长度为 n 的字的总数：

1	长度为 0 的字
m	长度为 1 的字
m^2	长度为 2 的字

由此可以推测出下面的引理 1.2。

引理 1.2 $\# \{w \in A^* | |w| = n\} = m^n$

证明： 对于 $n = 0, 1, 2$，我们已经知道命题成立。假设命题对 $n \in \mathbf{N}$ 成立，下面要推出命题对 $n + 1$ 也成立。

设 $w:[1:n+1] \to A$，$w' = w|[1:n]$。映射 $u, v:[1:n+1] \to A$ 是两个不同的映射，如果 $u' = u|[1:n] \neq v' = v|[1:n]$ 或 $u(n+1) \neq v(n+1)$。

按照归纳法假设，存在长度为 n 的 m^n 个字。这 m^n 个字中的每一个字都可以按照 m 种不同的方式延续为一个长度为 $n + 1$ 的字。这样就得到了长度为 $n + 1$ 的 m 个字。由此，对所有 $n \in \mathbf{N}$，本命题用归纳法得以证明。 ■

现在我们定义乘积，即字的"毗连"。为此，我们定义映射 $\tau: A^* \times A^* \to A^*$ 如下：

$$\tau(u, v) = w :\Leftrightarrow \text{同时满足下面的(1)和(2)式}$$

(1) $|w| = |u| + |v|$

(2) $w(i) = \begin{cases} u(i) & 1 \leqslant i \leqslant |u| \\ v(i - |u|) & |u| < i \leqslant |u| + |v| \end{cases}$

因为(1)和(2)式也可以用来作为一个用 u 和 v 构成 w 的唯一确定的规则，所以，对每一个 $u,v\in A^*$，显然都正好存在一个 $w\in A^*$，满足 $\tau(u,v)=w$。

如果我们令 $\tau'=\tau|A^+\times A^+$，容易看出下面的定理成立。

定理 1.3 对 $u,v,w\in A^*$，有

$$\tau(\tau(u,v),w)=\tau(u,\tau(v,w))$$

和

$$\tau(\varepsilon,u)=\tau(u,\varepsilon)=u$$

这就是说，(A^+,τ)和(A^+,τ')都满足结合律，ε 是A^*中的单位元素。 ■

定义 1.4

(a) (A^*,τ)称为关于 A 的字独异点。

(b) (A^+,τ')称为关于 A 的字半群。 ■

对于 $w=w_1\cdot\cdots\cdot w_n$ 或 $w=w(1)\cdot\cdots\cdot w(n)$，我们也记为 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$。

下面的例子解释了这种写法的原因。

设 $u=(a,b,c)$，$v=(c)$，$w=(a,b)$。由此构成$\{u,v,w\}^*$。这个集合包含了字 $x=((a,b),(c))$和 $y=((a,b,c))$。这两个元素是不同的，因为

$$|x|=2，并且\ x(1)=(a,b),x(2)=(c)$$

$$|y|=1，并且\ y(1)=(a,b,c)$$

括号的使用使我们可以用一种简单的表示方法来区别 x 和 y。

因为字(a)总是带着括号太麻烦，下文中约定将(a)简记为 a。这样，也有：$A\subset A^+$ 和 $A\subset A^*$

下面再熟悉一下 A^*。根据 A^*，对 $w:[1:n]\to A$，可以定义映射“映像”$rev:A^*\to A^*$如下：

$$rev(w):[1:n]\to A$$

其中，$rev(w)(i):=w(n-i+1)$，$i=1,\cdots,n$。

如果我们写 $w=(w_1,\cdots,w_n)$，那么“映像”的表示是容易理解的。

显然，$rev(w)=(w_n,\cdots,w_1)$，并且 $rev(\varepsilon)=\varepsilon$。

引理 1.4 对所有 $u,v\in A^*$，有

$$rev(\tau(u,v))=\tau(rev(v),rev(u))$$

证明： 这个简单的证明留给读者作为练习。 ■

(A^*,τ)和(A^+,τ')是独异点和半群的特殊情况。

定义 1.5 设 H 是一个集合，$\tau:H\times H\to H$ 是一个映射，对所有 $a,b,c\in H$，如果都有

$$\tau(a,\tau(b,c))=\tau(\tau(a,b),c)$$

那么称(H,τ)为半群。

如果还存在一个 $\varepsilon\in H$，使得所有 $a\in H$，都有

$$\tau(a,\varepsilon)=\tau(\varepsilon,a)=a$$

则称(H,τ)为独异点，称 ε 为(H,τ)的单位元素。 ■

如果一个满足结合律的连接 $\tau(a,b)$也满足交换律，即对所有 $a,b\in H$，有 $\tau(a,b)=\tau(b,a)$，那么，我们今后也用 $a\cdot b$ 或$a+b$ 来代替$\tau(a,b)$。

引理 1.5 一个独异点只含有一个单位元。

证明： 设 $\epsilon, \lambda \in H$ 都是单位元。因为 λ 是单位元，所以有 $\epsilon \cdot \lambda = \epsilon$。因为 ϵ 也是单位元，所以也有 $\epsilon \cdot \lambda = \lambda$，由此得出 $\epsilon = \lambda$。 ■

下面是几个独异点和半群的例子。

例 1.1

(1) $(A^+, \cdot)$是半群。

(2) $(A^*, \cdot)$是独异点。

(3) $(\mathbf{N}, +)$是满足交换律的半群。

(4) $(\mathbf{N}, \cdot)$是满足交换律的独异点。

(5) $(\mathbf{N}_0, +)$是满足交换律的独异点。

(6) $(\mathbf{Z}, +)$是满足交换律的独异点。

(7) $(\mathbf{Z}, \cdot)$是满足交换律的独异点。

(8) 如果 $Abb(A, A) = \{f \mid f: A \to A\}$，则$(Abb(A, A), \circ)$是具有单位元 1_A 的独异点。 ■

注意，对于 $\# A > 1$，$(Abb(A, A), \circ)$不满足交换律。

例 1.2 设 $A = \{a, b\}$，有 $f(a) = b, f(b) = a$，并且 $g(a) = g(b) = a$。于是，
$a = g(f(a)) = (g \circ f)(a) \neq (f \circ g)(a) = f(g(a)) = b$。 ■

1.3 子半群、子独异点、同态及生成元系统

定义 1.6 设(H, τ)和(H', τ')是半群。如果有

$$H' \subset H, \text{并且 } \tau' = \tau \mid H' \times H'$$

那么(H', τ')称为(H, τ)的子半群。

设(H, τ)和(H', τ')是独异点。如果他们同时满足

(1) (H', τ')是(H, τ)的子半群；

(2) 如果 ϵ 是(H, τ)的单位元，则 $\epsilon \in H'$。

那么(H', τ')称为(H, τ)的子独异点。 ■

从半群(H, τ)和集合 $E \subset H$ 出发，我们感兴趣的是(H, τ)的包含 E 的最小子半群。为此，我们考虑(H, τ)的具有性质 $E \subset H'$ 的子半群(H', τ')的集合。利用下面的表达式来定义这个集合

$$H(E) := \{H' \mid (H', \tau') \text{是}(H, \tau)\text{的子半群}, E \subset H'\}$$

现在我们构造

$$\langle E \rangle_H := \bigcap_{H' \in H(E)} H'$$

可以看出，它满足下面的引理。

引理 1.6 对所有 $u, v \in \langle E \rangle_H$，有 $\tau(u, v) \in \langle E \rangle_H$。

证明： 如果 $H' \in H(E)$，并且 $u, v \in H'$，因为(H', τ')是(H, τ)的子半群，因此有 $\tau(u, v) \in H'$。因为这对每一个 $H' \in H(E)$都成立，所以一般对所有 $H' \in H(E)$也成立。于是我们得到，$\tau(u, v) \in \langle E \rangle_H$。 ■

设

$$\tau_E: \langle E \rangle_H \times \langle E \rangle_H \to \langle E \rangle_H$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com